

ATTI

20-21

DELLA

ACCAD. ADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLIII

1956

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XX

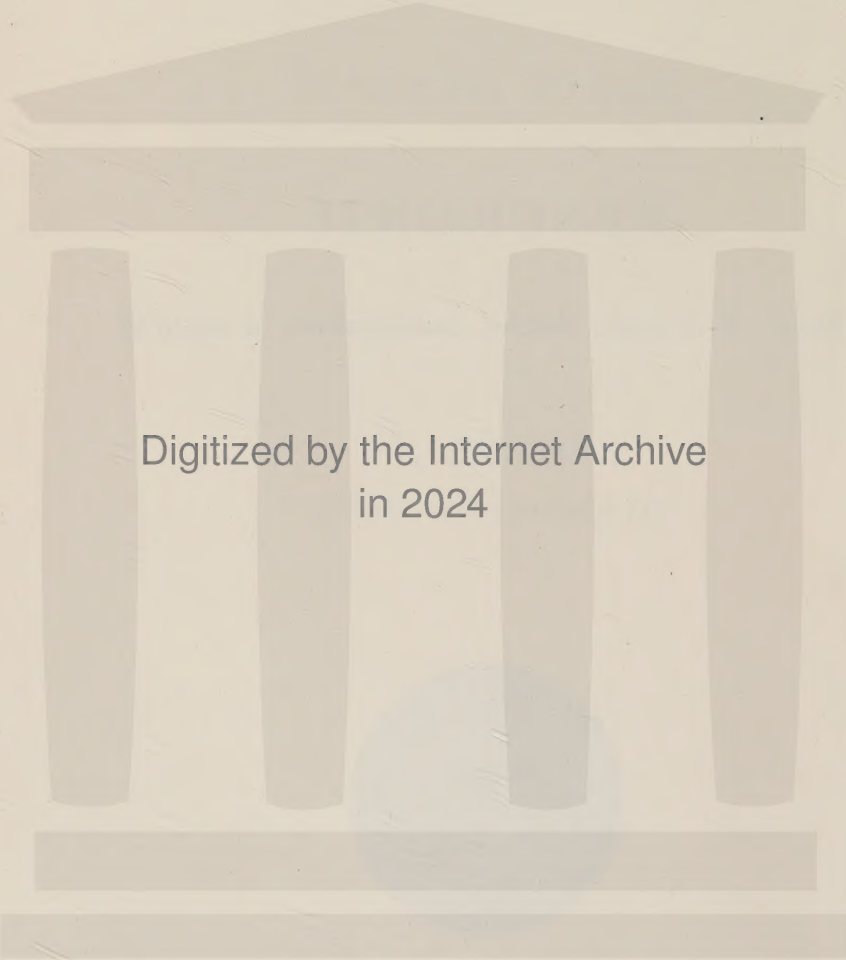
(1° semestre 1956)



ROMA

ACCAD. ADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1956



Digitized by the Internet Archive
in 2024

RENDICONTI

DELLE SEDUTE
DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 gennaio 1956

Presiede il Socio anziano GIUSEPPE LEVI

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche.*
Nota (*) III (**) del Socio BENIAMINO SEGRE.

§ IV. — ESISTENZA DI TRASFORMAZIONI LINEARIZZABILI FORMALMENTE, MA NON SOSTANZIALMENTE.

Si dimostra facilmente (ved. il n. 15 delle citate lezioni) che *ogni trasformazione analitica di una V_n in sé, che possenga un punto fisso O e sia ciclica d'ordine m , ha ciascuno dei coefficienti di dilatazione in O uguale ad una radice m^{ma} dell'unità e risulta linearizzabile nell'intorno di O in modo sostanziale.* Ed è chiaro *a priori* che una T che non sia ciclica d'ordine m , ma che abbia come coefficienti di dilatazione in un suo punto fisso O delle radici m^{me} dell'unità, non può essere sostanzialmente linearizzabile nell'intorno di O .

Poggiando sul § II, si possono inoltre costruire delle trasformazioni analitiche dotate di un punto fisso O , nell'intorno del quale esse non siano formalmente linearizzabili. Una siffatta trasformazione risulta a fortiori non linearizzabile dal punto di vista sostanziale, e di necessità aritmeticamente particolare in O , in forza del § II.

Maggiore interesse offrono le trasformazioni aritmeticamente generali, e quindi (§ II) formalmente linearizzabili, che tuttavia risultino non linearizzabili dal punto di vista sostanziale. L'esistenza di siffatte trasformazioni, stabilita appresso, dipende da certe proprietà aritmetiche dei loro n coefficienti di dilatazione. I valori assoluti di questi ultimi, supposti

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1955.

(**) Continuazione delle Note I e II, apparse alle pp. 200 e 357 di questo volume dei « Rendiconti ».

tutti diversi dall'unità, non possono essere tutti minori o tutti maggiori di uno, in forza del § III, sicché dev'essere $n \geq 2$ se si vuole che abbia a presentarsi la suddetta eventualità.

In seguito ci limiteremo per semplicità a certi casi particolari notevoli relativi all'ipotesi $n = 2$; ma non sarebbe difficile di estendere la trattazione a casi più generali. Ci riferiremo più precisamente ad una trasformazione T, di una V_2 in sé, rappresentata da equazioni del tipo

$$(25) \quad u = ax + a_{ij} x^i y^j, \quad v = by,$$

dove le a, b siano numeri reali positivi soddisfacenti alle

$$(26) \quad a > 1, \quad b < 1$$

e a certe altre condizioni di natura aritmetica, appresso assegnate, e dove gli ulteriori coefficienti a_{ij} siano numeri reali, taluni dei quali vanno scelti non troppo piccoli in valore assoluto e con segni opportuni, ma — a parte ciò — soggetti all'unica condizione di rendere convergente la serie $a_{ij} x^i y^j$. Dimosteremo allora che:

Ogni T siffatta risulta linearizzabile dal punto di vista formale, ma non da quello sostanziale.

Incominciamo con l'osservare che, in forza delle (26), possiamo assumere

$$(27) \quad a = e^a, \quad b = e^{-b},$$

dove a e b denotano due numeri reali positivi. Posto per abbreviare

$$(28) \quad c = a/b,$$

facciamo anzitutto vedere che

Una trasformazione analitica T di una V_2 in sé, avente in un suo punto fisso O i coefficienti di dilatazione (27), risulta ivi aritmeticamente particolare o generale, secondoché il numero reale (28) è razionale od irrazionale.

Invero, per definizione (§ I), la T è in O aritmeticamente particolare se, e soltanto se, in corrispondenza a qualche coppia di interi (i, j) non negativi — diversa da una delle $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ — sussiste almeno una delle

$$a = a^i b^j, \quad b = a^i b^j.$$

In forza delle (27), queste ultime relazioni equivalgono rispettivamente alle

$$a = ia - jb, \quad -b = ia - jb,$$

ossia, tenuto conto della (28), alle

$$c = \frac{j}{i-1}, \quad c = \frac{j-1}{i};$$

sicché ne segue senz'altro l'asserto.

La T riesce quindi aritmeticamente generale, ove si assuma c dato da una frazione continua infinita ad elementi c_i interi positivi arbitrari:

$$(29) \quad c = (c_0, c_1, c_2, c_3, \dots),$$

in quanto allora il secondo membro della (29) notoriamente converge, rappresentando un numero c irrazionale. È noto inoltre che, posto $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0$, denotata con p_r/q_r (per $r = 0, 1, 2, \dots$) la ridotta (c_0, c_1, \dots, c_r) scritta sotto forma di frazione irriducibile, ed assunto

$$c_r = (c_{r+1}, c_{r+2}, c_{r+3}, \dots),$$

talché

$$c_r > c_{r+1},$$

risulta:

$$c - \frac{p_r}{q_r} = \frac{(-1)^r}{c_r q_r^2 + q_{r-1} q_r}.$$

Pertanto, se r è pari, si ha

$$(30) \quad 0 < c - \frac{p_r}{q_r} < \frac{1}{c_r q_r^2} < \frac{1}{c_{r+1} q_r^2}.$$

Conveniamo ora di assumere nella (29) gli interi c_i di indice pari ad arbitrio; per i rimanenti, imponiamo soltanto le limitazioni

$$(31) \quad c_{r+1} \geq q_r^{q_r-1} \quad \text{per } r \text{ pari,}$$

le quali permettono manifestamente di completare la definizione del numero c dato dalla (29), scegliendo successivamente (con una certa latitudine) le c_{r+1} per $r = 0, 2, 4, \dots$ (ossia le c che ancora restavano da determinare). Dopo di ciò, preso a *arbitrio* il numero reale positivo b , la (28) determina a ; sicché rimangono così univocamente definite le a, b in base alle (27). Rileviamo per il seguito che, in virtù delle (30), (31), risulta

$$(32) \quad 0 < c - \frac{p_r}{q_r} < q_r^{-(q_r+1)} \quad \text{per } r \text{ pari.}$$

Fissati nel modo anzidetto i coefficienti a e b che compaiono nelle (25), scegliamo ivi i rimanenti coefficienti a_{ij} quali numeri reali soggetti alle seguenti condizioni (certamente compatibili, ed anzi assai poco restrittive):

(i) la serie $a_{ij} x^i y^j$ risulti convergente in un intorno 2-dimensionale del punto $O(0, 0)$;

(ii) per i particolari valori degli indici i, j esprimibili [in relazione alla frazione continua (29)] nella forma

$$(33) \quad i = q_r + 1, \quad j = p_r \quad (\text{con } r \text{ pari}),$$

le a_{ij} abbiano un segno che ci riserbiamo di precisare fra poco, e siano in valor assoluto limitate inferiormente da una qualche costante positiva, che denotiamo con ω .

Allora, in virtù della (i), le (25) rappresentano anzitutto una trasformazione analitica, T , avente in O un punto fisso coi suddetti coefficienti di dilatazione a, b . La T è di conseguenza aritmeticamente generale in O , in forza di ciò che precede, ed è quindi (§ II) formalmente linearizzabile in un intorno di O . Ciò significa che esiste uno - ed anzi (§ II) un solo - cambiamento formale di coordinate del tipo

$$X = x + \alpha_{ij} x^i y^j, \quad Y = y$$

che linearizza formalmente le equazioni di T attorno ad O . Ci proponiamo di dimostrare che

La T suddetta risulta non linearizzabile attorno ad O dal punto di vista sostanziale.

All'uopo occorre e basta far vedere che:

La serie doppia $\alpha_{ij} x^i y^j$ non converge in nessun intorno 2-dimensionale dell'origine,

in quanto la possibilità (di cui al § II) di modificare preliminarmente le equazioni di T operando una trasformazione moltiplicativa sulle coordinate, non ha alcuna influenza sulla convergenza o non convergenza degli sviluppi formali (4), ottenuti nel modo indicato nel § II e cioè col determinarne i coefficienti mediante le equazioni (8).

Attualmente, queste equazioni riduconsi alle

$$(34) \quad (a - a^i b^j) \alpha_{ij} = a_{ij} + \dots,$$

ove i puntini stanno in luogo di quantità reali che non occorre precisare. Orbene, per i valori di i, j esprimibili nella forma (33), conveniamo - giusta ciò che si è detto in (ii) - di scegliere induttivamente il segno di a_{ij} in guisa che si abbia

$$|(a - a^i b^j) \alpha_{ij}| \geq |a_{ij}|:$$

in virtù della (34), all'uopo basta che il segno di a_{ij} collimi con quello dell'espressione ivi indicata con puntini, se questa è diversa da zero, mentre esso resta in nostro arbitrio se questa si annulla. Tenuto conto della (ii) e delle (33), (27), (28), (32), per i suddetti valori di i, j abbiamo quindi successivamente:

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} |\alpha_{ij}| &\geq \frac{\omega}{a \cdot |1 - a^{i-1} b^j|} = \frac{\omega}{a \cdot |1 - e^{a q_r - b p_r}|} = \\ &= \frac{\omega}{a \cdot |e^{b q_r (c - p_r/q_r)} - 1|} > \frac{\omega}{a (e^{b q_r - q_r} - 1)} \end{aligned} \right.$$

Stabiliremo quanto asserito nell'ultimo enunciato per assurdo, supponendo cioè che esistano due costanti ξ, η complesse, entrambe diverse da zero, tali che la serie $\alpha_{ij} \xi^i \eta^j$ converga. Presi allora i numeri reali λ, μ soddisfacenti alle

$$0 < \lambda < |\xi|, \quad 0 < \mu < |\eta|,$$

vi sarà una costante reale positiva K tale che — per ogni scelta degli indici i, j , e quindi pure ove in particolare li si definiscano con le (33) — risulti

$$|\alpha_{ij}| \lambda^i \mu^j < K.$$

Con tale scelta degli indici i, j , e facendo poi tendere all'infinito l'indice r che figura nelle (33) (con che anche i, j e q_r tendono all'infinito, mentre i/q_r tende all'unità, e $j/q_r = p_r/q_r$ ed j/i tendono a c), si ha dunque:

$$|\alpha_{ij}|^{\frac{1}{i+j}} < K^{\frac{1}{i+j}} \lambda^{\frac{-1}{1+j/i}} \mu^{\frac{-j/i}{1+j/i}} \rightarrow \lambda^{\frac{-1}{1+c}} \mu^{\frac{-c}{1+c}} < \infty.$$

D'altro canto, la (35) fornisce invece

$$|\alpha_{ij}|^{\frac{1}{i+j}} > \left(\frac{\omega}{a\delta} \right)^{\frac{1}{i+j}} \cdot \left(\frac{bq_r^{-q_r}}{e^{bq_r^{-q_r}} - 1} \right)^{\frac{1}{i+j}} \cdot q_r^{\frac{1}{i/q_r + j/q_r}} \rightarrow \infty;$$

e questa contraddizione col risultato precedente dimostra l'asserto.

Geometria algebrica. — *Contributi alla teoria delle irregolarità d'una varietà algebrica.* Nota (*) del Socio FRANCESCO SEVERI.

In due Note preventive, or ora pubblicate nei «Comptes rendus» dell'Accademia delle Scienze di Parigi [1], dopo avere stabilito alcune proprietà delle forme differenziali di 1ª specie, di grado qualunque (forme differenziali esterne, nel senso di Poincaré–Cartan), a coefficienti funzioni razionali del punto variabile sopra una varietà algebrica, ∞^r , irriducibile non singolare, M_r ⁽¹⁾, ho posto le fondamenta d'una teoria delle irregolarità di M_r . Di tali irregolarità avevo dato soltanto un rapido cenno in alcuni miei antichi lavori (Lincei, 1907; Rendiconti di Palermo, 1909) da cui prese inizio la parte più moderna della geometria sulle varietà algebriche. I tempi non erano però allora maturi per tentar di costruire una teoria generale delle irregolarità.

La teoria delle irregolarità, in rapporto, come dicevo, con le forme differenziali di 1ª specie, si troverà ampiamente sviluppata in una Memoria in corso di stampa negli «Annali di Matematica» [2]. Qui desidero soltanto indicare qualche complemento, in collegamento con risultati precedenti, di altri e miei. Ne resta confermata la previsione di stretti legami fra la detta teoria e quella dei sistemi d'equivalenza, algebrica o razionale, di sottovarietà di M_r [3].

(*) Presentata nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) Di M_r consideriamo un modello proiettivo non singolare od anche uno con singolarità ordinarie, proiezione generica di uno non singolare. La varietà si suppone immersa in un S_d lineare, proiettivo, di cui sono x_1, \dots, x_d le coordinate non omogenee di punto; r di queste, per esempio x_1, \dots, x_r , si assumono a variabili indipendenti sopra M_r .

1. Alcune notizie preliminari son necessarie.

Ho chiamato *ultima irregolarità* o *r-irregolarità* di M_r la differenza $q_r^h = P_g^r - P_a^r$ fra il genere geometrico P_g^r ed il genere aritmetico P_a^r di M_r . Per $r = 2$ (superficie) è $q_2 \geq 0$. Per $r > 2$ può anche essere $q_r < 0$. (Ved. a tal proposito il. n. 9).

Ho inoltre chiamato *ordinaria* una sottovarietà V_h (irriducibile non singolare) di M_r ($2 \leq h \leq r-1$) quando possiede esattamente lo stesso numero di forme differenziali di 1ª specie linearmente indipendenti di ogni grado s ($1 \leq s \leq h-1$), posseduto da M_r ; ed ho dimostrato [2] che *sopra una M_r esistono, per ogni h , varietà ordinarie* ed anzi che una varietà ∞^h ordinaria è, in un certo senso, « generale » entro M_r .

La considerazione delle varietà ordinarie è fondamentale per la teoria, perché [2] l'ultima irregolarità q_h d'una V_h ordinaria di M_r è indipendente dalla V_h prescelta ed è pertanto un carattere di M_r , invariante assoluto per trasformazioni birazionali: la *h-irregolarità* di M_r .

Si hanno così $r-1$ irregolarità q_2, q_3, \dots, q_r di M_r , alle quali può aggiungersi l'irregolarità (nulla) q_1 d'una qualunque curva algebrica di M_r . Una M_r dicesi *h-irregolare* se $q_h \neq 0$ (in particolare *superficialmente irregolare*, se $q_2 \neq 0$); *completamente regolare* se tutte le sue irregolarità sono nulle. L'irregolarità superficiale era conosciuta (fu inizialmente considerata da Castelnuovo-Enriques e studiata dipoi anche da me).

L'importanza delle irregolarità è affermata già dal teorema seguente, per la cui dimostrazione rinvio a [2]:

Il numero i_k delle forme differenziali di 1ª specie, linearmente indipendenti, di grado k ($1 \leq k \leq r-1$) appartenenti ad una M_r , uguaglia $q_k + q_{k+1}$ ($q_1 = 0$). Per $k = r$ si sa che $i_r = P_g^r$.

2. Si tenga altresì conto che su M_r il prodotto (ordinato, in un qualsiasi prefissato ordine) d'una forma di 1ª specie di grado h per una forma di 1ª specie di grado k è una forma di 1ª specie di grado $h+k$, identicamente nulla quando $h+k > r$. Se $h \neq k$ i predetti prodotti (ordinati) sono in numero di $i_h i_k$, ma non è detto che sieno linearmente indipendenti.

Per esempio quando $h = k$ è un numero dispari, il quadrato di una forma di grado h è identicamente nullo. Qualora risulti $i_h i_k > i_{h+k}$, i prodotti in questione son certo linearmente dipendenti; ma lo posson essere, anche se queste disuguaglianze non son soddisfatte (ved. il seguito).

Analoghe riflessioni valgono pei prodotti di tre, quattro; ecc. forme di 1ª specie.

Ci limiteremo a studiare i prodotti di forme lineari, ma anche per essi le ricerche potrebbero essere spinte molto più innanzi, ad imitazione di quanto fecero varii anni or sono, per le forme lineari di una superficie, nel 1905, De Franchis [4] e Castelnuovo [5] e, non soltanto per le forme di una superficie, ma anche di varietà superiori, Comessatti [7], in stretta dipendenza, quest'ultimo, con una mia Memoria del 1913 [8].

3. Ho altra volta [9] chiamato involuzione ∞^h o involuzione di specie $r-h$ (ora brevemente diremo *h-involuzione*) ($1 \leq h \leq r-1$) sopra una M_r un sistema algebrico d'indice 1 (ossia tale che per un punto generico di M_r passi una sola V_{r-h} del sistema), costituito da ∞^h sottovarietà algebriche V_{r-h} di M_r .

Diciamo W_h una varietà algebrica immagine birazionale degli elementi (varietà V_{r-h}) della data involuzione ∞^h . Allora, se W_h contiene \bar{q}_2 forme lineari di 1ª specie linearmente indipendenti (ossia ha l'irregolarità superficiale \bar{q}_2) la trasformazione razionale da W_h ad M_r muta queste forme in altrettante forme di 1ª specie indipendenti di M_r , le quali s'annullano lungo le V_{r-h} dell'involuzione; sicché $\bar{q}_2 \leq q_2$, essendo q_2 l'irregolarità superficiale di M_r . Queste forme (cioè i loro integrali) hanno inoltre, su M_r , $2\bar{q}_2$ periodi ridotti.

Se $q < r$ vale il teorema, che stabilii in [6, n. 6] e in [8] con procedimento algebrico-geometrico, senza l'uso di forme differenziali:

Una varietà M_r d'irregolarità superficiale q_2 , minore della dimensione, contiene sempre qualche involuzione ∞^h d'irregolarità superficiale q_2 (ove h ha un conveniente valore compreso tra 1 ed $r-1$).

Si badi che, se $h=1$, all'irregolarità dell'involuzione, che è nulla ($q_1=0$) va sostituito il genere dell'involuzione, che è in tal caso un fascio irrazionale d'ipersuperficie, di genere ≥ 1 .

4. Prima di procedere oltre stabiliamo un lemma. Sieno:

$$(I) \quad \omega_j = \sum_{i=1}^r A_{ji} dx_i \quad (j = 0, 1, \dots, h)$$

$h+1$ forme di 1ª specie, linearmente indipendenti (è dunque $h \leq q_2-1$), appartenenti ad M_r , a coefficienti A funzioni razionali del punto di M_r . Se gl'integrali semplici di 1ª specie su M_r :

$$u_0 = \int \omega_0, u_1 = \int \omega_1, \dots, u_h = \int \omega_h$$

sono funzionalmente dipendenti, cioè se la matrice

$$(2) \quad \begin{vmatrix} A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0r} \\ A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{h1} & A_{h2} & \dots & A_{hr} \end{vmatrix}$$

ha il rango al più h (per ogni generico punto di M_r) diremo che sopra M_r sono *razionalmente dipendenti* le $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_h$ ⁽²⁾. Qualora fra queste ω esistono h forme razionalmente indipendenti, la matrice (2) avrà il rango h e non minore e potranno trovarsi pertanto $h+1$ funzioni razionali (non tutte identicamente nulle) $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_h$ del punto di M_r soddisfacenti alle:

$$\sum_{v=0}^h A_{vl} \mu_v = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, r)$$

epperò le $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_h$ saranno legate dalla relazione

$$(3) \quad \sum_{v=0}^h \mu_v \omega_v = 0,$$

(2) La relazione (3), che segue subito, giustifica la denominazione.

nella quale le μ non possono ridursi tutte a costanti (non tutte nulle) altrimenti le ω sarebbero linearmente dipendenti, contro il supposto. Dunque qualcuna delle ω , per esempio ω_0 , è combinazione lineare delle rimanenti:

$$(4) \quad \omega_0 = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \cdots + \lambda_h \omega_h,$$

con le λ funzioni razionali, non tutte costanti.

Si aggiunga che, formato il prodotto (esterno) $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_h$ si trova:

$$\omega_0 \omega_1 \cdots \omega_h = \sum_{I_0 < I_1 < \cdots < I_h} \begin{vmatrix} A_{0I_0} & A_{0I_1} & \cdots & A_{0I_h} \\ A_{1I_0} & A_{1I_1} & \cdots & A_{1I_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{hI_0} & A_{hI_1} & \cdots & A_{hI_h} \end{vmatrix} dx_{I_0} dx_{I_1} \cdots dx_{I_h};$$

sicché si può enunciare il lemma:

La condizione affinché il prodotto (esterno) $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_h$ sia identicamente nullo su M_r equivale alla condizione che le forme differenziali lineari di 1^a specie $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_h$ sieno razionalmente dipendenti; e, se non son nulli tutti i prodotti delle ω ad h ad h , dalla condizione consegue che i coefficienti del legame lineare tra le ω , che è necessariamente unico, son funzioni razionali non tutte nulle né tutte costanti⁽³⁾.

5. Ciò premesso sussiste il teorema seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perché una M_r (d'irregolarità superficiale $q_2 > 0$) contenga una h -involuzione ($1 \leq h \leq r-1$) d'irregolarità superficiale $\geq h+1$ (un fascio di genere ≥ 1 d'ipersuperficie, per $h=1$) è che su M_r esistano $h+1$ forme di 1^a specie, linearmente indipendenti, il cui prodotto sia nullo, senza che lo sieno tutti i prodotti di quelle forme ad h ad h .

Il teorema è sostanzialmente contenuto in lavori precedenti miei e di Comessatti.

Precisamente: la necessità della condizione trovasi in [8]; la sufficienza spetta a Comessatti [7], che brillantemente proseguì, nello stesso 1913, la mia Memoria [8] di quell'anno. Il linguaggio in [7,8] è però diverso da quello qui adottato.

La sufficienza consegue ovviamente (seguendo un concetto di De Franchis e di Castelnuovo) da un'ingegnosa osservazione di Comessatti relativa ad $h+1$ funzioni analitiche di r variabili legate da una relazione lineare a coefficienti analitici (non tutti costanti). Consegue da questa osservazione che le funzioni razionali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$, che figurano nel legame (4), son *integrali primi* (cioè una specie di moltiplicatori) del sistema differenziale

$$(5) \quad \omega_0 = 0, \omega_1 = 0, \dots, \omega_h = 0,$$

(3) Quando i coefficienti delle ω appartengono ad un dato anello, il banale ragionamento prova che le μ sono elementi dell'anello. Ved. per esempio [13], p. 20.

epperò gl'integrali u_0, u_1, \dots, u_h sono costanti su ciascuna delle varietà *algebriche*

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_h = \bar{\lambda}_h,$$

costituenti, al variare delle $\bar{\lambda}$, un'involuzione razionale (che è un sistema di equivalenza, intersezione completa).

Ne deriva subito che la varietà generica di questo sistema (a prescindere da eventuali componenti fisse) è composta con V_{r-h} algebriche irriducibili variabili in un'involuzione ∞^h d'irregolarità superficiale $\geq h + 1$, le quali sono alla loro volta integrali del sistema (5).

6. Varie interessanti conseguenze Comessatti trae, nei lavori [7], dalla sufficienza della precedente condizione, in ordine a disuguaglianze fra i generi d'una superficie e fra il genere geometrico e l'irregolarità superficiale d'una varietà a tre dimensioni. Qui indicheremo altre conseguenze del teorema del numero precedente, riguardanti anche varietà di dimensione qualunque r .

Si ritrova anzitutto subito il teorema, stabilito per via algebrico-geometrica nella mia Memoria [6], che cioè ogni M_r con $q_2 > 0$, di genere geometrico $P_g^r = 0$, contiene sempre per qualche h ($1 \leq h \leq r - 1$) un h -involuzione superficialmente irregolare (un fascio irrazionale per $h = 1$).

Ciò risulta senz'altro dal teorema del n. 5. Invero il prodotto di r forme di 1ª specie indipendenti di M_r non può che esser nullo, perché altrimenti esso darebbe luogo a una forma di 1ª specie di grado r e sarebbe $P_g^r > 0$.

Similmente si prova che:

Una M_r con $q_2 \geq r - 1 > 0$ ha tutte le irregolarità positive, oppure contiene per qualche valore di h (tra 1 ed $r - 1$) un' h -involuzione superficialmente irregolare.

Sia invero q_{h+2} ($h \leq r - 2$) la prima irregolarità non positiva di M_r . Poiché $i_{h+1} = q_{h+1} + q_{h+2}$, $q_{h+2} \leq 0$, risulta $i_{h+1} \leq q_{h+1}$. D'altronde $i_h = q_h + q_{h+1}$, e siccome $q_h > 0$, così $i_h > q_{h+1}$. Pertanto $i_h > i_{h+1}$. Ciò significa che qualcuno dei prodotti di h forme lineari di 1ª specie o è nullo o moltiplicato per un'altra conveniente forma lineare di 1ª specie dà un prodotto nullo di $h + 1$ forme lineari di 1ª specie; donde la conclusione che M_r contiene un'involuzione irregolare di dimensione h ; ma non è escluso che ne contenga qualcuna di dimensione inferiore.

In particolare:

L'irregolarità tridimensionale d'una varietà a tre dimensioni M_3 , superficialmente irregolare, è negativa soltanto se la varietà contiene un fascio irrazionale o un'involuzione irregolare ∞^2 di curve algebriche.

Comessatti [7] aveva solamente provato che si presentano queste alternative quando $q_3 \leq 0$ (ma non aveva stabilito la reciproca). Si precisa altresì con facilità (come fece Comessatti) che, se $q_2 > 2$, il fascio ha il genere ≥ 2 ; mentre se $q_2 = 2$ la M_3 può trasformarsi birazionalmente nel prodotto d'una curva razionale e di una superficie di generi $p_g = 1$, $p_a = -1$, prodotto già considerato nella mia prima Memoria del 1909 sui fondamenti della geometria algebrica.

Inoltre:

Il genere aritmetico d'una M_3 , superficialmente irregolare, di genere geometrico nullo, è positivo (ed uguaglia l'irregolarità superficiale).

Infatti, essendo $P_g^3 = 0$, $q_2 > 0$, non può che essere $i_2 = 0$, se no il prodotto di una forma lineare e di una forma quadratica di 1^a specie darebbe una forma cubica di prima specie e risulterebbe $P_g^3 > 0$. Siccome poi è $i_2 = q_2 + q_3 = q_2 - P_a^3$, ne segue l'asserto.

Invece, per le superficie irregolari di genere geometrico nullo il genere aritmetico è negativo.

Il genere aritmetico d'una M_3 irregolare di genere geometrico e d'irregolarità superficiale nulli, è negativo.

Invero, essendo $P_g^3 = 0$; $q_2 = 0$, sarà $i_2 = q_2 + q_3 = q_3 > 0$ (altrimenti M_3 sarebbe totalmente regolare). E poiché $q_3 = -P_a^3$, ne segue il teorema.

7. Un'ulteriore proprietà, costituente un altro sintomo della profondità dei legami tra le irregolarità e le proprietà dei sistemi algebrici di sottovarietà di M_r , è la seguente:

Ogni sistema algebrico irriducibile di sottovarietà di qualunque dimensione $r - h$ ($1 \leq h \leq r - 1$) appartenente ad una M_r totalmente regolare (e invadente la varietà), è totalmente regolare.

Ci limitiamo a un cenno di dimostrazione. Se il sistema Σ , di cui trattasi, è un'involuzione, le sue eventuali forme di 1^a specie si trasformano razionalmente, come si è già detto, in forme di 1^a specie di M_r . Ma, essendo M_r totalmente regolare, ossia $q_2 = q_3 = \dots = q_r = 0$, è anche $i_1 = i_2 = \dots = i_{r-1} = 0$, epperò Σ è totalmente regolare.

Sia Σ d'indice $v > 1$ e W sia un'immagine birazionale degli elementi, varietà, di Σ . Ai punti di M_r corrisponde sopra W una serie algebrica irriducibile di gruppi di v punti di W , che riempie questa varietà. Sia ω una forma di 1^a specie di grado h di W e P_1, \dots, P_v i punti di W corrispondenti a un generico punto di P di M_r . Allora $\omega(P_1) + \dots + \omega(P_v)$ è una forma di 1^a specie di grado h a coefficienti razionali del punto P variabile su M_r ; oppure è identicamente nulla. Ambedue le conclusioni sono assurde. La prima perché M_r non possiede forme di 1^a specie, la seconda perché risulterebbero nulli i singoli coefficienti di quella somma, ed ω non sarebbe dunque un'effettiva forma di 1^a specie sopra W .

8. Passiamo infine a considerare la teoria delle irregolarità sopra una varietà di Picard M_p ($p = q_2$) definita (come originariamente fecero Enriques-Severi) quale varietà ∞^p possedente un gruppo abeliano continuo ∞^p assolutamente transitivo di automorfismi birazionali [ved. per esempio 10].

Essa possiede p forme lineari di 1^a specie du_1, du_2, \dots, du_p , ove u_1, u_2, \dots, u_p sono variabili uniformizzanti in grande la varietà. Le coordinate dei punti di M_r risultano funzioni abeliane di u_1, u_2, \dots, u_p .

È facile riconoscere che le forme di 1^a specie di grado h ($\leq p$) di M_p sono tutte e sole le combinazioni lineari a coefficienti costanti dei prodotti ad h ad h delle predette forme lineari [11]. Invero, se

$$\omega = \Sigma A_{i_1 i_2 \dots i_h} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_h}$$

è una forma di 1ª specie di grado h di M_p (l_1, \dots, l_h essendo una disposizione di h degl'indici $1, 2, \dots, p$ delle variabili indipendenti x_1, x_2, \dots, x_p), passando alle variabili uniformizzanti risulta:

$$\omega = \sum A_{l_1 l_2 \dots l_h} \frac{\partial (x_{l_1} x_{l_2} \dots x_{l_h})}{\partial (u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_h})} du_{j_1} du_{j_2} \dots du_{j_h},$$

ove i coefficienti dei differenziali (di grado h) devono risultare olomorfi in u_1, u_2, \dots, u_p , appunto perché ω è di 1ª specie. Ma siccome si tratta di funzioni abeliane, le quali sono meromorfe, se dipendono effettivamente dalle u , oppure sono costanti, si conclude che i coefficienti stessi sono costanti, cioè che ω è una combinazione lineare dei differenziali di grado h formati coi differenziali du_1, du_2, \dots, du_p .

Si hanno così $\binom{p}{h}$ differenziali del tipo $du_{j_1} du_{j_2} \dots du_{j_h}$, i quali sono tutti diversi da zero (il loro unico coefficiente è invero la costante 1 e d'altronde le variabili u_1, u_2, \dots, u_p sono del tutto indipendenti).

Ma i $\binom{p}{h}$ prodotti predetti possono essere linearmente dipendenti?

Verifichiamo che ciò non può avvenire.

Supponiamo infatti che tra i differenziali $du_{j_1} du_{j_2} \dots du_{j_h}$, di grado h , sussista una relazione lineare omogenea:

$$(6) \quad \sum \lambda_{j_1 j_2 \dots j_h} du_{j_1} du_{j_2} \dots du_{j_h} = 0$$

a coefficienti λ costanti.

Prendiamo su M_p h cicli lineari indipendenti $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h$. Posto $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_h$, risulta:

$$(7) \quad \sum \lambda_{j_1 j_2 \dots j_h} \int_{\sigma} du_{j_1} du_{j_2} \dots du_{j_h} = 0;$$

e di più:

$$\int_{\sigma} du_{j_1} du_{j_2} \dots du_{j_h} = \int_{\sigma_1} du_{j_1} \times \int_{\sigma_2} du_{j_2} \times \dots \times \int_{\sigma_h} du_{j_h}.$$

Supposta normalizzata la tabella dei periodi degl'integrali semplici di 1ª specie u_1, u_2, \dots, u_p e scelti come cicli $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_h$ quei cicli (normali) dove, rispettivamente, gl'integrali $u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_h}$ hanno il periodo 1, mentre gli altri integrali sono ivi nulli, poiché $du_{j_1} du_{j_2} \dots du_{j_h}$ è non nullo, la (7) riducesi a:

$$\lambda_{j_1 j_2 \dots j_h} = 0.$$

Pertanto i numeri i_1, i_2, \dots, i_p delle forme differenziali di 1ª specie e dei gradi $1, 2, \dots, p$, appartenenti ad M_p sono espressi da

$$(8) \quad i_1 = p, i_2 = \binom{p}{2}, \dots, i_{p-1} = \binom{p}{p-1}, i_p = \binom{p}{p} = 1.$$

Dunque:

Per una varietà di Picard M_p i numeri delle forme di 1^a specie dei gradi $1, 2, \dots, p$ ad essa appartenenti, sono espressi dalle (8); epperò le irregolarità sono date da

$$(9) \quad q_h = \binom{p}{h-1} - \binom{p}{h-2} + \dots + (-1)^h p \quad (h = 1, 2, \dots, p);$$

il genere geometrico vale $P_g^p = 1$ ed il genere aritmetico P_a^p vale ⁽⁴⁾

$$P_a^p = \sum_{s=0}^{p-1} \binom{p}{p-s} (-1)^s = (-1)^{p-1}.$$

L'ultima irregolarità di M_p è dunque 2 o zero secondo che p è pari o dispari.

OSSERVAZIONE. - Se M_p contiene un' h -involuzione ($1 \leq h \leq p-1$) vi sono $h+1$ forme lineari di 1^a specie di M_p linearmente indipendenti, ma legate invece linearmente con coefficienti razionali non tutti nulli né tutti costanti. Ciò corrisponde all'esistenza d'un sottogruppo algebrico ∞^h del gruppo continuo abeliano ∞^p ammesso da M_p .

9. Applicando ad una M_r qualunque le argomentazioni del numero precedente si giunge al teorema:

Sopra una M_r d'irregolarità superficiale $q_2 = p > 0$, non contenente involuzioni irregolari di dimensione $< r$ (e quindi avente $p > r$) i numeri i_1, i_2, \dots, i_r delle forme di 1^a specie linearmente indipendenti dei gradi da 1 fino a r ad essa appartenenti soddisfanno alle relazioni

$$(10) \quad i_1 = p, i_2 \geq \binom{p}{2}, \dots, i_r \geq \binom{p}{r}.$$

Infatti, nessuna delle $\binom{p}{h}$ forme di 1^a specie provenienti dai prodotti ad h ad h , in un prefissato ordine, delle forme lineari di 1^a specie, appartenenti ad M_r , può esser identicamente nulla su M_r , perché la M_r conterrebbe un'involuzione d'irregolarità superficiale p e di dimensione $< r$.

D'altronde le $\binom{p}{h}$ forme considerate non possono essere legate da una relazione lineare a coefficienti λ costanti, perché, con processo analogo a quello usato nel n. 8 per la varietà di Picard, ne segue o l'annullarsi di tutte le costanti λ o l'annullarsi di qualcuna di quelle forme e quindi in quest'ultimo caso l'esistenza su M_r d'involuzioni irregolari di dimensione $< r$.

(4) Si applica qui una mia induzione del 1909, dimostrata di recente da KODAIRA e si fa uso dell'identità numerica:

$$(1-1)^p = \sum_{s=0}^p \binom{p}{p-s} (-1)^{p-s} = 1 + (-1)^p \sum_{s=0}^{p-1} \binom{p}{p-s} (-1)^s = 1 + (-1)^p P_a^p$$

Per questioni concernenti i valori di i_1, i_2, \dots, i_p , P_a^p sopra M_p ved. anche [12]. In questa Memoria Lefschetz deduce direttamente il valore di P_a^p dalla formula di postulazione per mezzo della quale io ne avevo dato la definizione generale nel 1909.

Ne deriva per esempio che $q_2 + q_3 (= i_2) \geq \binom{p}{2}$, cioè l'irregolarità tridimensionale d'una varietà M_r ($r > 2$) d'irregolarità superficiale $p > 0$, priva di involuzioni irregolari di dimensione $< r$ (epperò avente $p > r$) è almeno uguale a $p(p-3)$.

È probabile che irregolarità negative (necessariamente di dimensione > 2) non esistano che su M_r a moduli particolari. (Nel n. 6 l'affermazione trovasi già dimostrata quando $q_2 = p \geq r-1$). Alla frase si può dare un senso preciso! Una M_r irriducibile la diremo a moduli particolari, *rispetto ad una certa proprietà* P , quando essa o una sua trasformata birazionale appartiene, quale varietà totale, in uno spazio conveniente, ad un sistema irriducibile di varietà ∞^r , la cui generica non gode della proprietà P .

Circa la questione prospettata, si può poi aggiungere qualche riflessione, non del tutto superflua.

La M_r , soddisfacente alle ipotesi di cui sopra, è birazionalmente equivalente ad una \bar{M}_r , semplice o multipla, appartenente alla sua varietà di Picard W_p [8]. Anzi, se si esclude altresì che M_r possenga un'involuzione irregolare ∞^r , l'immagine \bar{M}_r su W_p è addirittura semplice.

Suppongasi di più che \bar{M}_r abbia entro W_p tal grado di generalità da risultare una varietà ordinaria. Allora nelle (10), fino a i_s ($s \leq r-1$), vale il segno = e le irregolarità di M_r sono espresse dalle (9) e quindi sono tutte non negative.

Nella Memoria [2] si collegano qualitativamente le irregolarità di una varietà coi numeri di Betti « ridotti » ⁽⁵⁾. Da tale punto di vista \bar{M}_r è generale entro W_p quando i suoi numeri di Betti ridotti sono uguali a quelli delle stesse dimensioni di W_p . Basta dunque tale condizione perché le irregolarità di M_r sieno tutte non negative.

Qui si presenta inoltre un problema di notevole interesse, circa il calcolo dei numeri di Betti ridotti di W_p , a partire dai numeri di Betti di W_p , quali trovansi nell'opera classica di Lefschetz. Così per esempio per $p=2$ il numero di Betti di dimensione 2 di W_2 è $R_2=6$, mentre il numero di Betti ridotto \bar{R}_2 è in generale 5, ma per W_2 a moduli particolari può essere $R_2=4, 3, 2$ (Bagnera e De Franchis), a seconda del numero-base inerente alle curve algebriche di W_2 . Per $r > 2$ il problema presenta maggiori difficoltà, perché non si può escluder l'esistenza di cicli non trascendenti di W_p che non sieno algebrici [2].

Vi è infine l'altro problema di collegare l'esistenza su M_r d'irregolarità negative con quello dell'esistenza di forme di 1^a specie (dei vari gradi) a periodi riducibili, collegamento che si ha ragione di ritenere necessario e sufficiente.

(5) Ho chiamato numeri di Betti *ridotti* quelli che denotano, per ogni data dimensione k , il numero dei cicli ∞^k *trascendenti* (ossia sopra ciascuno dei quali non si annullano tutte le forme differenziali di 2^a specie di grado k di M_r) omologicamente indipendenti rispetto al modulo dei cicli non trascendenti. Essi sono invarianti assoluti per trasformazioni birazionali.

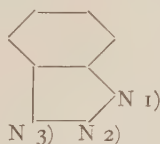
BIBLIOGRAFIA.

- [1] SEVERI, *Les formes de première espèce attachées à une variété algébrique. Les irrégularités d'une variété algébrique et leurs liens avec les formes de première espèce* (« Comptes rendus », 14 e 19 dicembre 1955).
- [2] SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche: terza Memoria* (« Annali di matematica », 1956).
- [3] SEVERI, *Complementi alla teoria delle equivalenze sulle varietà algebriche* (questi « Rendiconti », seduta del 16 aprile e dell'11 maggio 1955).
- [4] DE FRANCHIS, *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve* (« Rendiconti del Circolo matematico di Palermo », seduta del 25 aprile 1905).
- [5] CASTELNUOVO, *Sulle superficie algebriche aventi il genere aritmetico negativo*. (« Rend. di Palermo », seduta del 14 maggio 1905).
- [6] SEVERI, *Sulle superficie e varietà algebriche di genere geometrico nullo* (questi « Rendiconti », seduta del 23 aprile 1911).
- [7] COMESSATTI, *Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti* (questi « Rendiconti », ferie del 1913); *Sopra certe disuguaglianze fra i caratteri d'una varietà algebrica* (ibidem, 1913); *Sopra una disuguaglianza fra i generi d'una superficie* (questi « Rendiconti », ferie del 1919); *Intorno alle superficie algebriche irregolari con $p_g \geq 2(p_a + 2)$ ed un problema analitico ad esse collegato*. Non va dimenticato che contributi parziali al problema stesso, trattato per via aritmetico-geometrica, furono apportati, per le superficie (con qualche restrizione), da ROSENBLATT (« Rend. di Palermo », seduta del 12 gennaio 1913; nonché due lavori precedenti, del 1912, citati in tale Nota).
- [8] SEVERI, *Relazioni fra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1^a specie d'una varietà algebrica* (« Annali di Matematica », 1913; volume in onore di Lagrange).
- [9] SEVERI, *Sugl'integrali semplici di 1^a specie e sulle involuzioni irregolari appartenenti ad una varietà o superficie algebrica* (« Annali di matematica », 1942). In tale Memoria si determinano, per ciò che concerne le superficie, tutte le superficie irregolari con infinite involuzioni irregolari (di gruppi di punti) della stessa irregolarità della superficie e, per ciò che concerne le varietà superiori M_r , si dà l'estensione delle due varietà di Picard associate ad una superficie. L'una, quella che di solito si chiama *varietà di Picard*, seguendo l'iniziativa di Enriques-Severi-Castelnuovo, si costruisce a partire dai sistemi irriducibili completi d'ipersuperficie della M_r ; l'altra si costruisce a partire dai periodi degl'integrali semplici di 1^a specie appartenenti ad M_r e fu introdotta da SEVERI (« Atti Istituto Veneto », 1913). I rapporti fra le due varietà furono notevolmente approfonditi da Andreotti, da Igusa, da A. Weil e da altri. In qualche Memoria dei seguaci della Scuola americana di geometria algebrica, la seconda varietà chiamasi (inesattamente) *varietà di Albanese*. Le due varietà sono *duali*, nel senso di A. Weil.
- [10] SEVERI, *Funzioni quasi abeliane* (« Pontificia Accademia delle Scienze », Scripta varia, 1947).
- [11] SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti d'una curva algebrica* (« Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », 1903). Ivi la proprietà è stabilita per una varietà di Jacobi (caso particolare d'una varietà di Picard). Il ragionamento presuppone però (implicitamente) proprietà più riposte, mentre quello che segue si appoggia soltanto sulla caratterizzazione delle forme di 1^a specie, mediante l'olomorfismo locale dei loro coefficienti (Kähler).
- [12] LEFSCHETZ, *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties I* (« Trans. Amer. Math. Society », 1921).
- [13] SEGRE B., *Forme differenziali e loro integrali* (Lezioni presso l'Istituto Nazionale di alta matematica, vol. I, Edizioni Docet, Roma, 1954).

Chimica inorganica. — *Complessi cobaltosi e cobaltici del benzoimidazolo e del benzopirazolo* (*). Nota di LIVIO CAMBI e LUIGI CANONICA, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

1. Le ricerche che comunichiamo in via preliminare si collegano a quella sui complessi triazolici precedentemente presentata (1).

La struttura probabile di supercomplessi dei sali triazolici poneva il problema se questa risultasse dal radicale N-mono-coordinativo-trivalente del nucleo triazolico, oppure dei due radicali N-mono-coordinativo-bivalente, e precisamente da due atomi vicini della catena a tre atomi di azoto. Cioè, in questo caso, se nel complesso fossero impegnate le coppie 1)-2) oppure 1)-3):



Per la discussione si presentava interessante lo studio dei sali del benzoimidazolo (I) e del benzopirazolo (II)



I dettagli sperimentali verranno riferiti in seguito.

2. SALI DEL BENZOIMIDAZOLO. — Era noto il sale (Benzimidaz.)₂Co di colore violetto intenso (2). Presenta il paramagnetismo di $\mu_{Co} = 3,85$ M. B. È un sale tipico di Co^{II} non planare, affatto analogo ai complessi Co^{II}-triazolici da noi descritti.

Le nostre indagini riguardano le reazioni fra benzoimidazolo ed i complessi cobaltici. Notammo che gli esanitriti, i tetranitriti di Erdmann, i croceodinitriti vengono demoliti in mezzo acquoso dal benzoimidazolo.

(*) Lavoro eseguito presso il Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R. dell'Istituto di Chimica Industriale dell'Università Statale di Milano.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) Questi « Rend. », serie 8^a, XVIII, p. 583 (1955).

(2) FEIGL e GLEICH, « Monaths. », 49, 392 (1928).

Gli esanitriti generano prodotti intermedi che sono allo studio, le nitrito-ammine vengono demolite e si produce il sale violetto cobaltoso sopra citato. Il prodotto infatti presenta, oltreché la stessa composizione, praticamente identico paramagnetismo.

Possiamo fin d'ora concludere che il benzoimidazolo si differenzia nettamente dai triazoli, non genera i complessi stabili, probabilmente polinucleari, cobaltoso-cobaltici e cobaltosi, pure inducendo la riduzione a bivalente del cobalto dei complessi nitrito-ammonici.

3. SALI DEL BENZOPIRAZOLO. - Il benzopirazolo precipita dalle soluzioni alcooliche di acetato di cobalto un sale color marrone, che corrisponde al rapporto 1 Co/1 Benzopirazolo, e presenta alta stabilità. Richiama per tali caratteri il corrispondente sale del benzotriazolo. Presenta il paramagnetismo: $\mu_{Co} = 1,74$ M. B.

Nella decomposizione con acido cloridrico concentrato non sviluppa cloro, risulta perciò un Co-complesso planare, con 1 elettrone spin.

Il benzopirazolo, analogamente al benzotriazolo, demolisce in soluzione acquosa le nitrito-ammine cobaltiche. I prodotti della demolizione, insolubili, stabili, bruno marrone, sono analoghi a quelli ottenuti col benzotriazolo. Si formano anche complessi intermedi, contenenti residui nitrosi, che sono allo studio. Con i sali della xanto-ammina (mononitro-pentammino) e con il trinitro-triammin-Co^{III}, i prodotti finali della demolizione corrispondono al rapporto 3 Co/6 Benzopirazolo.

A questi complessi può attribuirsi la struttura bruta



contengono in effetto cobalto trivalente.

La suscettività magnetica risulta $\mu_{Co} = 1,26$ M. B.

Cioè si avrebbe 2 Co^{III}/1 Co^{II} in cui Co^{II} non parteciperebbe ad un assetto di complesso planare, ma corrisponderebbe a quello dei complessi benzotriazoli del tipo $\{ (\text{Benzotriaz.})_4\text{Co}^{\text{III}} \}_2\text{Co}^{\text{II}}$ già descritto ⁽³⁾.

I risultati che riferiamo inducono a considerare per i complessi benzopirazolici le strutture polinucleari proposte per i triazoli nella Nota precedente e portano ad interpretarli come risultanti da radicali mono-coordinativo-bivalenti, con valenze da due atomi di azoto vicini.

Le ricerche proseguono.

(3) Questi « Rend. », loc. cit., p. 581.

Biologia. — *Azione di alcuni farmaci sugli esseri unicellulari.*

Nota di SERGIO TCHAKHOTINE e ALBERICO BENEDICENTI, presentata (*) dal Socio A. BENEDICENTI.

Una delle conquiste moderne fra le più promettenti della Biologia è la Citologia Sperimentale, che ha per scopo il chiarire, a mezzo d'esperimenti, le leggi che governano i fenomeni della vita, fenomeni che si svolgono nelle cellule stesse degli esseri viventi, siano essi animali, vegetali od umani.

Molte difficoltà tecniche si opponevano all'esecuzione di tali indagini, vista l'estrema piccolezza del maggior numero di cellule. Queste difficoltà furono superate, nel corso degli anni, da uno di noi (S. Tchakhotine): colla creazione del primo micromanipolatore meccanico ⁽¹⁾, della microraggionpuntura ultravioletta ⁽²⁾, di una serie di microstrumenti adatti ai singoli problemi ⁽³⁾, ed infine del metodo così detto di « microclinica » (Tchakhotine) ⁽⁴⁾. Una copiosa bibliografia documenta i metodi ricordati ⁽⁵⁾.

È con questo metodo che recentemente abbiamo eseguito una serie di questi esperimenti in quelle cellule isolate che sono i Protozoi ⁽⁶⁾, e specialmente negli Infusori. Il *Paramecium aurelia*, lo *Spirostomum sp.*, la *Stylonychia mytilus*, l'*Urostyla sp.*, e le *Amebe (proteus e polypodia)* si prestano egregiamente a tali scopi. Era interessante rivedere certi problemi di farmacologia ⁽⁷⁾, servendosi del metodo ricordato perché esso permette di studiare in un modo eccellente i fenomeni tossici su un'unica cellula, ponendo così le basi di una vera e propria farmacologia cellulare.

Il metodo di « microclinica » ⁽⁴⁾ consiste nel mettere, mediante una fine micropipetta (100 μ di diametro in c.) su un vetrino portoggetti con una incavatura nel centro, una serie di goccioline microscopiche (del diametro da 100 a 800 μ) di un apposito liquido di cultura, ricoperte da uno strato di olio di paraffina. In queste gocce, per mezzo di fine micropipette (diam. dell'orificio 40–100 μ), s'introduce un'unica cellula (Protozoo), indi s'inietta, nelle goccioline—« ca-

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) S. TCHAKHOTINE, « Zeit. f. wiss. Mikr. », 19, p. 188 (1912).

Negli anni 1912–1938, a Heidelberg, a Parigi e a Genova; prima pubbl. nel « Biol. Centralbl. », 32, p. 623 (1912); vedi anche: nel « Handb. d. biol. Arb. Meth. di Abderhalden », 5, p. 877 (1934) e « C. R. Acad. d. Sci. », Paris, 206, p. 133 (1938).

(3) « Bull. de la Soc. franç. de Microscopie », 4, p. 138 (1935).

(4) « Bull. Biologique », 1939 (volume giubilare per M. Caullery).

(5) Ved. varie pubblicazioni in « Boll. d. Soc. Ital. di Biol. Sperm. », ed in « C. R. de l'Acad. d. Sci. », Paris e « C. R. de la Soc. de Biol. », Paris, negli anni 1920–1939, ed in *La lutte contre le Cancer*, Paris 1936, no. 52.

(6) « Ann. de Protistologie », Paris, 5 (1936); « Arch. de l'Institut Prophylactique », Paris, 10, p. 119 (1938).

(7) « Arch. ital. Scienze farmacol. », 1937 (volume giubilare, dedicato ad Alberico Benedicenti).

merette», la sostanza di cui si vuole studiare l'azione. E quest'azione si può seguire comodamente, nella stessa «cameretta», per ore e giorni e perfino settimane.

Un dispositivo comodissimo del metodo consiste nel mettere, su un vetrino portoggetti o su un vetrino d'orologio, una serie di goccioline-camerette, vicine fra loro e disposte anche a spirale, nelle quali si mettono: nell'una la cellula di controllo, cioè nel suo mezzo naturale, senza farmaco, e nelle altre delle soluzioni di veleno di diverse concentrazioni. Questo permette di seguire comodamente e contemporaneamente le reazioni delle cellule nelle singole «camerette» e confrontarle fra loro e la cellula controllo, posta al centro della spirale; od anche seguire le reazioni delle diverse specie di cellule nelle «camerette» con la stessa concentrazione di veleno. Si possono anche introdurre diverse cellule in una sola «cameretta» ed osservare la differenza di reazione delle diverse specie di cellule.

La prima questione che ci interessava, era naturalmente quella di determinare le dosi letali dei farmaci per queste singole cellule. Abbiamo usato vari alcaloidi: la chinina, la caffeina, la morfina, la codeina, la papaverina, la stricnina, la cocaina, l'atropina, la pilocarpina, l'esperina. In più furono sperimentate anche la penicillina, il cianuro di potassio e la tossina difterica. D'ogni alcaloide abbiamo usato soluzioni all'1 %, all'0,1 %, all'0,01 % ed all'0,001 %. Criterio della dose letale era la reazione di un brusco cambiamento nel modo di muoversi della cellula nella goccia, l'arresto più o meno rapido dei movimenti, la morte della cellula, facilmente riconoscibile al microscopio nell'alterazione dell'aspetto morfologico, nella citolisi, coagulazione del citoplasma e perfino nello scoppio della cellula accompagnata da una desintegrazione totale. Tali reazioni erano caratteristiche per gli individui della stessa specie, ma differivano spesso da una specie all'altra.

Per assicurarsi che la concentrazione impiegata non venisse troppo diluita dall'aggiunta del liquido in esame al liquido della gocciolina contenente la cellula, quest'ultimo prima si aspirava cautemente, con una finissima micropipetta a bocca (20 μ di orificio), finché non ne restava più se non uno strato sottilissimo, praticamente trascurabile, il quale ricopriva la cellula che s'appiattiva. Subito dopo il liquido in esame era introdotto nella gocciolina per mezzo di un'altra micropipetta a bocca, in tale quantità che la goccia nella «microclinica» ritornava ad avere lo stesso diametro e pertanto lo stesso volume di prima.

Per lo studio delle modificazioni morfologiche e fisiologiche (per esempio, la ciclosi del citoplasma, il diametro dei vacuoli contrattili, il ritmo delle loro pulsazioni, ecc.) si usava, per ottenere un lento graduale aumento delle sostanze tossiche, il metodo seguente: si deponevano nella «microclinica» due gocce (ognuna del diametro di 300 a 600 μ): una contenente la cellula e l'altra la soluzione del veleno; dalla prima partiva un bastoncino microscopico (diam. 80 μ e 2 mm lungo, solido in vetro, di cui l'altra estremità era vicina alla goccia col veleno, senza però toccarla dapprima. Tutto si

ricopriva con olio di paraffina. Poi con una micropipetta s'introduceva tra l'estremità libera del bastoncino e la goccia col veleno una gocciolina d'acqua distillata, che metteva in comunicazione le due gocce. Così la soluzione del veleno si propagava, per diffusione, lungo il bastoncino, istituendo una sorte di canale tra le due gocce: il veleno si diffondeva poco a poco nella goccia colla cellula, le cui reazioni potevano essere allora osservate con comodo man mano che la concentrazione del veleno andava aumentando nell'ambiente ove la cellula si trovava.

Come primi risultati di questi esperimenti si dimostrarono i seguenti.

Degli alcaloidi s'avverò come il più potente veleno, per l'Infusorio *Paramecium aurelia*, fosse la chinina, che è, come si sa, un veleno specificamente citoplasmatico: già in una concentrazione di 0,001 % la sua soluzione provoca fenomeni notevoli di eccitamento, che si manifestano con moti accelerati, disordinati, e perfino rotatori lungo l'asse longitudinale del corpo, moti che dopo un'ora si rallentano; la forma della cellula diventa più raccorciata, sigaroide, i vacuoli pulsatili si dilatano ed il loro ritmo si rallenta, per arrivare, dopo tre ore, alla morte per coagulazione interna e sfacelo. In concentrazioni maggiori, queste reazioni sono molto più violente e più rapide ed alla concentrazione di 1 % la morte sopravvenuta istantanea è seguita subito da un completo sfacelo.

Molto meno tossiche si mostrano la caffeina, l'atropina, la cocaina e la pilocarpina: le dosi letali si aggirano fra 0,01 e 0,1 %.

Più resistenti ancora sono i *Parameci* verso la stricnina, la morfina, la codeina e l'eserina: le dosi letali si situano per questi alcaloidi fra 0,1 e perfino 1 %.

Lo stesso andamento, *grossomodo*, si osserva anche su altri Protozoi adoperati: lo *Spirostomum* (lunghezza circa 800 μ) ed una piccola ameba, l'*Ameba polypodia* (diam. 50 μ). Anche per queste cellule la tossicità va diminuendo dal primo gruppo (chinina), al secondo (caffeina ecc.), ed infine al terzo (stricnina, ecc.). Pertanto si può constatare che fra queste tre forme la più sensibile pare essere il *Paramecium* (180 μ), mentre la più grossa cellula dello *Spirostomum* (800 μ) resiste meglio, ed ancora meglio l'*Ameba polypodia* (50 μ). Più resistente ancora di questa è la grande *Ameba proteus* (400 μ), nella quale lo strato ialino dell'ectoplasma, relativamente molto più spesso, sembra formi un ostacolo notevole alla penetrazione dei veleni sperimentali. Al contrario, certe forme più piccole con membrane superficiali più sottili, ed il corpo più molle ed elastico, dimostrano reazioni più violente: così un Infusorio eterotricho, l'*Urostyla* (150 μ), presenta facilmente il quadro di una vera esplosione con disintegrazione totale, istantanea, di tutto il corpo. Si tratta, pare, di un fenomeno di tensione superficiale e non di azione osmotica, la reazione descritta verificandosi nelle concentrazioni di tutti i gradi, e visto che delle forme di Infusori, aventi un «citostoma», cioè una comunicazione fra il citoplasma dell'interno del corpo cellulare ed il medio esterno, vivono per ore e non scoppiano nemmeno nell'acqua distillata.

Oltre agli alcaloidi, abbiamo voluto sperimentare un antibiotico, cioè la penicillina. Fu adoperata in soluzioni di 1‰, 0,50‰ e 0,1‰ su *Paramecium aurelia*. Essendo essa una sostanza organica, di peso molecolare elevato (più di 300), appunto per questa ragione ci interessava. In dosi relativamente elevate, perfino di 1‰, si avvera letale solo dopo un'azione di circa una mezz'ora, ed i fenomeni che caratterizzano l'aspetto morfologico della cellula intossicata, consistono in un gonfiamento del corpo cellulare: la citolisi sembra prenda inizio dal citoplasma più che dalla superficie esterna.

Questo fatto ci ha indotto a tentare un esperimento con due potenti veleni, la cui natura è chimicamente opposta: l'uno, il cianuro di potassio, sale ionizzabile, con peso molecolare basso (65), e l'altro, un composto organico con molecola molto grande (peso molecolare circa 72.000): la tossina difterica.

Il cianuro, adoperato in concentrazione di 0,01‰, uccide la cellula in due minuti primi e dà luogo ad una citolisi della superficie, che si manifesta coll'apparire di larghe zone ialine che si sollevano sulla superficie del corpo cellulare; ma anche all'interno non si vede una coagulazione massiccia del citoplasma, che invece è assai caratteristica per l'azione degli acidi minerali come HCl o H₂SO₄, i quali rendono il corpo della cellula morta opaco; nel caso del cianuro il corpo rimane trasparente, indicando che anche all'interno si ha un fenomeno di citolisi e gonfiamento delle sostanze lipo-proteiche formanti certi granuli del citoplasma.

Nel caso della tossina difterica l'effetto tossico è assai più mite e la dose letale effettiva si dimostra molto più elevata. Avevamo a nostra disposizione un preparato, contenente 2000 unità d.l.m. per cavia da 250 g, di tossina difterica liofilizzata (dell'Istituto Sieroterapico Milanese). Questa fu sciolta in 1 ccm di decozione di terra di Pringsheim (mezzo nel quale si tenevano le cellule), così ad avere nella goccia di 300 µ di diametro, ove era il *Paramecio*, una soluzione contenente 0,01 unità. In questa soluzione la morte della cellula studiata avvenne in circa 10 minuti primi. La cellula cominciò a rigonfiarsi assumendo l'aspetto di una pera, e poco a poco si ricoprì alla superficie di piccole escrescenze ialine, che parevano infiltrarsi all'esterno dall'interno, che restava trasparente, fino alla disintegrazione, dopodiché i resti presero un aspetto coagulato.

Per comprendere i risultati di quest'esperienza, come di quella fatta colla penicillina, si deve tener presente che il *Paramecium* possiede un « citostoma », che è una specie di bocca, alla superficie ventrale in mezzo al corpo, e perfino una « citofaringe », traverso la quale entra l'acqua contenente microbi, che servono all'alimentazione del *Paramecio*, formando nel corpo dei vacuoli, detti « alimentari », che per mezzo della ciclosi circolano nel citoplasma. L'azione del cianuro potrebbe essere spiegata come una depolarizzazione della superficie della cellula, fenomeno dovuto alla carica contraria a quella degli ioni del sale, e a cui sussegue un gonfiamento dei colloidali della superficie. A questo si deve l'aspetto della citolisi superficiale. L'azione invece delle grosse molecole di tossina difterica e di penicillina si eserciterebbe dall'interno, pe-

netrando con l'acqua nel citostoma, agendo sul citoplasma stesso, e provocando reazioni più lente colle particelle lipoproteiche del suo contenuto e terminando infine con una dissoluzione di questi e rispettive citolisi.

Per verificare questa supposizione ha servito un esperimento, nel quale furono adoperati la saponina, la colina e la colchicina, come sostanze che potrebbero agire elettivamente sui diversi componenti nel corpo cellulare. Era presumibile che la saponina, essendo una sostanza liposolubile e fortemente saponificante, potrebbe attaccare in primo luogo i colloidi della superficie della cellula; la colina, pure citolizzante, ma in grado minore, avrebbe potuto, traverso il citostoma, raggiungere l'interno della cellula, cioè il citoplasma stesso; e la colchicina, che, com'è noto, è un veleno carioclastico, avrebbe agito soprattutto elettivamente sul nucleo cellulare.

Effettivamente, si poté constatare che l'attività tossica di queste tre sostanze si poteva differenziare secondo la seguente scala: alla concentrazione di 1 % la morte della cellula avveniva: per effetto della saponina in un minuto primo, della colina dopo un'ora, della colchicina dopo sei ore; alla concentrazione di 0,1 %: saponina dopo due minuti primi, colina dopo quindici ore, in colchicina la cellula viveva ancora dopo venti ore.

Questi e simili esperimenti possono segnare una via per ricercare i punti d'attacco delle sostanze chimiche, ed in ispecie dei farmaci, nelle cellule.

NOTA

Le esperienze che si riferiscono in questo scritto preliminare, sono state eseguite in un Laboratorio di fortuna improvvisato nella mia casa di campagna, disponendo noi di un microscopio Zeiss grande modello, di uno binoculare e di quanto altro occorreva per queste indagini.

Il Prof. Tchakhotine, a cui si debbono in gran parte le esperienze descritte, fu con me a Messina negli anni 1907-08 ed è là in quei giorni lontani che insieme abbiamo studiato i fenomeni della fosforescenza nei Ctenofori e eseguito altre ricerche.

Dopo d'allora il prof. Tchakhotine è venuto sovente, ospite graditissimo, a lavorare nell'Istituto di Farmacologia genovese da me diretto ed è là nel vecchio Laboratorio ai Cappuccini che egli poté realizzare col mio aiuto il metodo importantissimo di microraggiopuntura che ha reso molto noto il suo nome.

Vecchi entrambi abbiamo voluto per l'ultima volta lavorare ancora insieme, quasi a cementare questa nostra vecchia, fedele e sincera amicizia immutata da circa mezzo secolo. E queste esperienze, mi pare, possano aprire una nuova via nel campo della Farmacologia, quello cioè dello studio dei farmaci su una cellula sola.

A. BENEDICENTI.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. - *Logaritmi e radici r^{me} di matrici non singolari.*
Nota di SALVATORE CHERUBINO, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

In una recente Nota ⁽¹⁾ abbiamo dato una soluzione dell'equazione esponenziale $e^X = A$, per A matrice assegnata (non singolare) di ordine n , soluzione ivi denominata logaritmo principale di A ed indicata con $\lg A$. Qui troviamo tutte le soluzioni di detta equazione ⁽²⁾ e ne facciamo applicazione alla ricerca di tutte le radici r^{me} di A .

1. Premettiamo che se I è la matrice identica di ordine n , si ha $\log I = 2\pi i D$ con D una qualsiasi matrice simile ad una matrice diagonale D i cui elementi principali sono interi relativi arbitrari, zero compreso.

Infatti, dette $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ le radici caratteristiche distinte di B , se esse sono a due a due incongrue mod $2\pi i$, quelle di e^B risultano essere $e^{\beta_1}, \dots, e^{\beta_m}$ ed avranno per e^B le stesse segnature ⁽³⁾ che le corrispondenti radici β_s hanno per B . Se invece $e^{\beta_1} = e^{\beta_2}$, si ha necessariamente $\beta_1 \equiv \beta_2$, mod $2\pi i$, l'indice di e^{β_1} eguaglia il massimo dei due indici di β_1 e di β_2 e la segnatura di e^B rispetto ad e^{β_1} avrà i suoi interi somme di quelli delle segnature di B rispetto a β_1 e rispetto a β_2 ⁽⁴⁾. Tenendo poi presente che $H^{-1} e^B H = e^{H^{-1} B H}$ e che se B è composta, ad esempio, mediante a e b , e^B sarà composta mediante e^a ed e^b , si ha che:

- a) affinché e^B sia diagonalizzabile occorre e basta che lo sia anche B ⁽⁵⁾;
- b) affinché e^B sia scalare occorre e basta che B sia diagonalizzabile e che le sue radici caratteristiche siano a due a due congrue fra loro mod $2\pi i$.

In particolare:

- c) affinché sia $e^B = I$, occorre e basta che sia $B = 2\pi i D$, con D una qualsiasi matrice simile ad una diagonale ad elementi principali interi relativi qualunque (zero compreso). In altri termini, si ha $\log I = 2\pi i D$ e D varierà nell'insieme di tutte le matrici diagonalizzabili a radici caratteristiche tutte numeri interi relativi.

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) *Permutabilità e logaritmi di matrici* [« Rend. Matem. », Roma, ser. 5^a, vol. XIII (1954)] pp. 221-238.

(2) La matrice variabile nell'insieme di queste soluzioni la indicheremo con $\log A$.

(3) Basta tener presente che se $f(z) = e^z$, si ha $f'(z) = e^z$ e che qualunque sia il numero complesso z è sempre $e^z \neq 0$ e ricordare come si forma $f(X)$ serie di potenze in X .

(4) Gli interi di dette due segnature si disporranno in ordine crescente completando con zeri la segnatura di indice più piccolo. Analogamente se fosse $e^{\beta_1} = e^{\beta_2} = e^{\beta_3}$; e via di seguito.

(5) Cioè che gli indici delle radici caratteristiche di B siano tutti eguali ad uno; ovvero sia che tutti i suoi divisori elementari siano lineari.

2. Un'altra osservazione da premettere è che se $f(z)$ è una serie di potenze della variabile complessa z convergente per $z = X$, la matrice $f(X)$ è permutabile con X e con qualsiasi altra matrice permutabile con X . Si ha, dippiù, che esiste un polinomio $F(z)$ ed uno solo, di grado eguale a quello μ dell'equazione minima di X diminuito di 1, pel quale si ha $f(X) = F(X)$.

Riferendosi alla forma canonica di X occorre e basta avere:

$$(1) \quad F^{(i_s)}(\alpha_s) = f^{(i_s)}(\alpha_s), \quad (s = 1, 2, \dots, m; \quad i_s = 0, 1, \dots, i_s - 1)$$

ove le α_s sono le radici caratteristiche distinte di X ed i_s i rispettivi indici. Le $\mu = i_1 + i_2 + \dots + i_m$ equazioni (1) danno un sistema lineare nei μ coefficienti incogniti di $F(z)$ il cui determinante è diverso da zero ⁽⁶⁾. Segue immediatamente che $f(C) = F(C)$, essendo C la forma canonica di X (quella di Jordan o la nostra del 1936) e quindi che $f(X) = F(X)$. Segue che se $B = S^{-1}AS$ è pure

$$e^B = S^{-1}e^A S$$

ed analogamente che:

$$\lg B = S^{-1} \cdot \lg A \cdot S.$$

3. Ciò posto, ricordiamo che essendo $\lg A$ un polinomio in A , ogni matrice permutabile con A lo è anche con $\lg A$. Se quindi $X = \lg A + 2\pi i Y$ è una qualsiasi soluzione dell'equazione esponenziale in oggetto diversa da $\lg A$, si avrà che X e $\lg A$, sono entrambe permutabili con A . Perciò Y è permutabile con A e quindi con $\lg A$. Ne segue che:

$$(2) \quad A = e^X = e^{\lg A + 2\pi i Y} = e^{\lg A} \cdot e^{2\pi i Y} = A \cdot e^{2\pi i Y}$$

onde

$$(3) \quad e^{2\pi i Y} = I.$$

Dunque Y appartiene all'insieme delle matrici \mathbf{D} di cui al n. 1; ma non è una qualunque di esse, perché è necessariamente permutabile con A . Possiamo perciò porre

$$(4) \quad \log A = \lg A + 2\pi i \mathbf{D}^{(A)}$$

intendendo che $\mathbf{D}^{(A)}$ è una qualsiasi matrice dell'insieme predetto, permutabile con A .

Se K è una qualsiasi matrice per cui si ha:

$$(5) \quad K^{-1}AK = C$$

(6) Il calcolo di questo determinante, del resto già noto, è stato fatto da L. CANTONI per dimostrare che esiste un $F(z)$ di grado $\mu - 1$, ed uno solo, pel quale si ha $F(A) = \lg A$ (ved. « Boll. UMI », settembre 1955, p. 381).

Il teorema dimostrato vale anche se $f(z)$ è una serie di potenze a coefficienti matrici, nel qual caso anche $F(z)$ è a coefficienti matrici.

essendo C una forma canonica di A , $K^{-1} \mathbf{D}^{(A)} K$ sarà commutabile con C quindi è composta con matrici \mathbf{D}_s permutabili, nell'ordine, con le componenti ⁽⁷⁾ C_{α_s} di C . Queste \mathbf{D}_s saranno dunque della forma (11) del paragrafo 1 della Nota ora citata. E poiché si ha:

$$(6) \quad C_{\alpha_s} = \alpha_s I_s + J_s$$

con I_s matrice identica di ordine eguale alla molteplicità di α_s , si ha che \mathbf{D}_s è permutabile con J_s .

Le componenti \mathbf{D}_s di $\mathbf{D}^{(A)}$ sono diagonalizzabili come $\mathbf{D}^{(A)}$, quindi vi sono matrici \mathbf{k} per le quali si ha

$$(7) \quad \mathbf{k}^{-1} \mathbf{D}_s \mathbf{k} = D_s$$

con D_s diagonale ad elementi principali interi relativi arbitrari e permutabile con $\mathbf{k}^{-1} J_s \mathbf{k}$. Poniamo che, ad esempio, gli elementi principali di D_s siano di tre valori distinti. Allora potrà ritenersi che nella (7) D_s sia composta mediante le tre matrici scalari intere $d_1 I_1, d_2 I_2, d_3 I_3$ di ordini rispettivi s_1, s_2, s_3 . Scrivendo come sempre è possibile:

$$(8) \quad \mathbf{k}^{-1} J_s \mathbf{k} = P = |a_{rs}|; \quad r, s = 1, 2, 3$$

con a_{11}, a_{22}, a_{33} tre matrici di ordini s_1, s_2, s_3 , rispettivamente, la condizione $D_s P = P D_s$ ci assicura che P è composta con le matrici a_{11}, a_{22}, a_{33} , le altre a_{rs} essendo nulle. Portando queste componenti a forma canonica, ad esempio mediante le matrici $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$, e trasformando con la matrice \mathbf{k}' composta con esse, D_s resterà inalterata e P sarà riportata nella J_s a mezzo di opportuni scambi nell'ordine delle righe e delle colonne (gli stessi per le une e per le altre). Si otterrà così ancora una forma canonica della parte complementare di C_{α_s} che indicheremo con J'_s . La matrice ottenuta da C_{α_s} trasformando successivamente prima con \mathbf{k} e poi con \mathbf{k}' sarà:

$$(8) \quad C'_{\alpha_s} = \alpha_s I_s + J'_s.$$

I due termini del secondo membro di (8) saranno ⁽⁸⁾ le parti principale e complementare di C'_{α_s} , la quale differisce da C_{α_s} solo per gli scambi sulle righe e sulle colonne fatti sulla J_s primitiva per passare alla J'_s . Perciò C'_{α_s} è ancora una matrice canonica. Supponendo che la forma canonica C di A sia stata presa sotto l'aspetto di Jordan, si trova subito che le componenti scalari (distinte o coincidenti) di D_s corrispondono alle componenti di C_{α_s} , ossia di J_s , ed hanno gli stessi ordini di queste. Concludiamo quindi che:

(7) Vedasi la mia Nota: *Sulle matrici permutabili con una data* (« Rend. Sem. », Padova, 1935), § 1.

(8) Cfr. particolarmente il n. 2 della nostra Nota cit. (1).

d) Affinché $\lg A + 2\pi i \mathbf{D}^{(A)}$ dia la più generale soluzione dell'equazione esponenziale $e^X = A$ è necessario e sufficiente che, essendo K una qualsiasi matrice che porti A alla forma canonica $K^{-1}AK = C$ sotto l'aspetto di Jordan, accada che la matrice $\mathbf{D}^{(A)} = K^{-1} \mathbf{D}^{(A)} K$ risulti composta di altrettante matrici scalari intiere (distinte o coincidenti) quante sono le componenti di C (cioè della sua parte complementare J), siano disposte nello stesso ordine ⁽⁹⁾ ed abbiano le stesse loro dimensioni.

Il numero dei parametri arbitrari da cui dipende $\mathbf{D}^{(A)}$, cioè l'ordine di infinità delle soluzioni della equazione esponenziale considerata, è eguale alla somma dei quadrati degli intieri della segnatura di A rispetto a tutte le sue radici caratteristiche ⁽¹⁰⁾. A questa somma occorre aggiungere μ , grado della equazione minima di A , per tener conto dell'arbitrarietà delle matrici scalari intiere di cui alla proposizione ora enunciata. Inoltre, non soltanto $\lg A$, ma anche $\lg A + 2\pi i \mathbf{D}^{(A)}$, per ogni $\mathbf{D}^{(A)}$ fissata, è un polinomio in A di grado $\mu - 1$. Invero, per la permutabilità di $\lg A$ con $\mathbf{D}^{(A)}$, ogni radice caratteristica di $\log A = \lg A + 2\pi i \mathbf{D}^{(A)}$ si ottiene da una di $\lg A$ aggiungendo il prodotto di $2\pi i$ per l'intero relativo che dà la corrispondente radice di $\mathbf{D}^{(A)}$. Il polinomio desiderato si ha quindi con lo stesso procedimento del n. 2 (cfr. col n. 5 della Nota di L. Cantoni, cit. 6).

4. Se A e B sono permutabili deve potersi avere, come pel logaritmo principale:

$$(9) \quad \log (AB) = \log A + \log B.$$

Ma ciò esige che si abbia

$$\mathbf{D}^{(AB)} = \mathbf{D}^{(A)} + \mathbf{D}^{(B)}$$

il che generalmente non avviene. Porremo invece, per definizione:

$$(10) \quad \mathbf{D}^{(AB)} = \mathbf{D}^{(A, B)}$$

intendendo che il secondo membro sia una qualunque matrice comune ai due insiemi costituiti rispettivamente dalle matrici $\mathbf{D}^{(A)}$ e dalle matrici $\mathbf{D}^{(B)}$. Con analoghe convenzioni seguono ovviamente le solite proprietà formali dei logaritmi valevoli solo per matrici permutabili, come nel caso dei logaritmi principali.

5. La nozione di logaritmo permette di stabilire quella di potenza di una matrice non singolare con esponente una matrice dello stesso ordine permutabile con la base. Basta definire:

$$(11) \quad A^B = e^{B \cdot \log A}$$

(9) Quest'ordine è del resto arbitrario. Le dimensioni di dette componenti sono gli esponenti dei divisori elementari e coincidono con le dimensioni delle matrici $B_{00}^{(s)}, b_{11}^{(s)}, b_{22}^{(s)}, \dots$ della formula (11) del § 1 della nostra Nota cit. (7).

(10) Cfr. la Nota cit. (7), fine del § 1.

e tener presente che, per la permutabilità, si ha $B \cdot \lg A = (\lg A) \cdot B$. Si può pure sostituire $\lg A$ con $\log A$ purché si prenda:

$$(12) \quad \log A = \lg A + 2\pi i \mathbf{D}^{(A, B)}.$$

Se A , non singolare, B e B' sono tre matrici a due a due permutabili, si ha che

$$(13) \quad A^B \cdot A^{B'} = e^{B \lg A} \cdot e^{B' \lg A} = e^{(B+B') \lg A} = A^{B+B'}.$$

In questa si potrà sostituire $\lg A$ con $\log A$ prendendo

$$(14) \quad \log A = \lg A + 2\pi i \mathbf{D}^{(A, B, B')}$$

cioè $\mathbf{D}^{(A, B, B')}$ permutabile con A , B e B' .

Ponendosi in un insieme (ad esempio un'algebra) di matrici commutabili e prendendo in questo insieme anche le \mathbf{D} , risulta ovvio che per le potenze di matrici ad esponenti matrici valgono le solite proprietà del campo scalare⁽¹¹⁾.

6. Passiamo ora a risolvere l'equazione

$$(15) \quad X^r = A$$

r essendo un intero positivo > 1 ed A una matrice non singolare⁽¹²⁾. Prendendo i logaritmi dei due membri, si ha:

$$(16) \quad \log X = \frac{1}{r} \log A = \frac{1}{r} \lg A + \frac{2\pi i}{r} \mathbf{D}^{(A)}$$

quindi:

$$(17) \quad X = e^{\frac{1}{r} \lg A} \cdot e^{\frac{2\pi i}{r} \mathbf{D}^{(A)}}.$$

Canonizziamo A mediante H e scriviamo

$$(18) \quad H^{-1} A H = C \quad ; \quad H^{-1} \mathbf{D}^{(A)} H = \mathbf{D}^{(A)}$$

e perciò:

$$(19) \quad H^{-1} X H = e^{\frac{1}{r} \lg C} \cdot e^{\frac{2\pi i}{r} \mathbf{D}^{(A)}}.$$

(11) Si tenga presente che la relazione

$$e^X \cdot e^Y = e^{X+Y}$$

può valere anche senza che X ed Y siano permutabili. Però ciò può accadere solo per matrici i cui elementi soddisfino a particolari condizioni (cfr. una Nota di A. G. KAKAR nei « Rend. del Circ. Mat. di Palermo » del 1953).

(12) Una qualsiasi soluzione di questa equazione si indicherà con $\sqrt[r]{A}$.

Le determinazioni distinte di X sono dunque quelle che si hanno prendendo gli elementi diagonali di $D^{(A)}$ eguali agli interi $0, 1, 2, \dots, r-1$ cioè la D^A della (19) è composta mediante matrici scalari $k_s I_s$ ove k_s assume i valori $0, 1, 2, \dots, r-1$.

Indicheremo queste matrici con $D^{(A,r)}$ e le loro trasformate $HD^{(A,r)}H^{-1}$ con $\mathbf{D}^{(A,r)}$. Abbiamo così che le soluzioni della (15) sono tutte e sole le

$$(20) \quad X = e^{\frac{1}{r} \lg A + \frac{2\pi i}{r} \mathbf{D}^{(A,r)}} = \\ = e^{\frac{1}{r} \lg A} \cdot e^{\frac{2\pi i}{r} \mathbf{D}^{(A,r)}} = e^{\frac{2\pi i}{r} \mathbf{D}^{(A,r)}} \cdot e^{\frac{1}{r} \lg A}.$$

In particolare, le radici r^{me} della identità I sono tutte e sole le matrici

$$(21) \quad e^{\frac{2\pi i}{r} \mathbf{D}^{(I,r)}}$$

essendo $\mathbf{D}^{(I,r)}$ una qualsiasi matrice simile a $D^{(I,r)}$.

Ponendo ora

$$(22) \quad A^{\frac{1}{r}} = e^{\frac{1}{r} \lg A}$$

si ha:

$$(23) \quad \sqrt[r]{A} = A^{\frac{1}{r}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{r} \mathbf{D}^{(A,r)}} \\ = e^{\frac{2\pi i}{r} \mathbf{D}^{(A,r)}} \cdot A^{\frac{1}{r}}$$

e la (15) è pienamente risolta⁽¹³⁾. Inoltre, ragionando come nel n. 2, si hanno r^u polinomi in A ognuno dei quali coincide col secondo membro della (23) ogni volta che in esso vien fissata la matrice $\mathbf{D}^{(A,r)} = H^{-1} \cdot \mathbf{D}^{(A,r)} \cdot H$.

È ovvio che, essendo A e B matrici permutabili, si ha

$$(24) \quad \sqrt[r]{AB} = \sqrt[r]{A} \cdot \sqrt[r]{B} = \sqrt[r]{B} \cdot \sqrt[r]{A}$$

per la validità della quale, giusta il numero precedente, s'intenderà che $\mathbf{D}^{(A,B,r)}$ sia una qualsiasi matrice comune ai due insiemi delle matrici $\mathbf{D}^{(A,r)}$ e $\mathbf{D}^{(B,r)}$ i quali hanno in comune almeno tutte le matrici scalari $(k/r) I$ con $k = 0, 1, \dots, r-1$.

(13) La ricerca di tutte le soluzioni dell'equazione (15), compreso il caso di A singolare, è stata compiuta da F. CECIONI nella Memoria, *Sopra alcune operazioni algebriche sulle matrici* (« Ann. Sc. Norm. Pisa », vol. XI, 1909), cap. III, pp. 84-133.

Matematica. — *Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.*
Nota I di MARIO VOLPATO, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

Altrove, io ho stabilito un teorema sulla derivazione dell'integrale

$$(1) \quad \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx,$$

e la sua assoluta continuità ⁽¹⁾, richiedendo, sostanzialmente, che la funzione $f(x, y)$ fosse misurabile rispetto ad x , continua rispetto ad y e maggiorata, in modulo, al pari dei suoi rapporti incrementali rispetto ad y , da una funzione sommabile della sola x , mentre $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ erano supposte assolutamente continue e monotone. Di fronte alla generalità delle altre ipotesi appare stranamente restrittiva quella della monotonia di $\alpha(y)$ e $\beta(y)$, tanto più che essa non trova alcun riscontro nei teoremi classici relativi al caso continuo. Sorge quindi l'esigenza di svincolare il mio teorema da quell'ipotesi.

Questo scopo verrà raggiunto completamente ⁽²⁾ in un prossimo lavoro come una fra le applicazioni di un risultato generale, stabilito in questo, ed espresso dal seguente

TEOREMA I. — *Le funzioni $\varphi(y)$ ed $f(x, y)$ siano rispettivamente definite nell'intervallo J ($c \leq y \leq d$) e nel rettangolo $R = I \times J$, I essendo l'intervallo: $a \leq x \leq b$. Inoltre:*

I) *la funzione $\varphi(y)$ sia assolutamente continua in J e vi soddisfi la*

$$a \leq \varphi(y) \leq b;$$

II) *la funzione $f(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x , assolutamente continua rispetto ad y per quasi tutti i valori di x in I , e maggiorata, in modulo, da una funzione $M(x)$ sommabile in I ;*

III) *il prodotto: $f[\varphi(y), y] \varphi'(y)$ sia (misurabile e) sommabile in J ;*

IV) *la derivata parziale: $f_y(x, y)$, che esiste quasi ovunque in R ed è ivi misurabile, sia sommabile in R .*

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) M. VOLPATO, *Sulla derivazione sotto il segno di integrale*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XII, pp. 146-150 (1952). In questo lavoro, come nel presente, l'integrazione è sempre intesa nel senso di Lebesgue e, naturalmente, le varie funzioni, prese in considerazione, sono reali di variabile reale.

(2) Dico completamente perché nella (2) è già implicito una prima formula di derivazione sotto il segno.

In queste ipotesi sussiste la formula:

$$(2) \quad \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t, y) dt = \int_c^y f[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\eta)} f'_y(t, \eta) dt,$$

che non è altri che una formula di Green ⁽³⁾.

Se $f(x, y)$ non dipende dalla y , questo mio risultato restituisce il classico teorema di De La Vallée Poussin ⁽⁴⁾ sul cambiamento della variabile di integrazione, mentre se $f(x, y)$ non dipende dalla x , esso restituisce il classico teorema di Lebesgue ⁽⁵⁾ sull'integrazione per parti.

I teoremi di De La Vallée Poussin e di Lebesgue traggono la loro intima ragione dalla validità quasi ovunque in (a, b) della

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x),$$

se $f(x)$ è sommabile in (a, b) . Orbene, il risultato espresso dalla (2) trae la sua intima ragione dal seguente teorema di G. Scorza Dragoni ⁽⁶⁾: se la funzione $f(x, y)$ è misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y nel rettangolo $R(a \leq x \leq b; c \leq y \leq d)$ e vi è maggiorata, in modulo, da una funzione della sola x sommabile in (a, b) , la relazione

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t, y) dt = f(x, y),$$

è certamente valida se si prescinde in (a, b) da una conveniente porzione che ha misura nulla e che non dipende dal parametro y .

(3) Stabilita qui in ipotesi diverse da quelle indicate da F. CAFIERO, in *Un'estensione della formula di Green e sue conseguenze*, « Ricerche di Matematica », vol. 2, pp. 91-103 (1953).

(4) Cfr. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse*, T. I, 3^e éd., p. 283 e *Sur l'intégrale de Lebesgue*, « Trans. of the Am. Mathem. Soc. », vol. 16, pp. 465-468 (1915).

(5) H. LEBESGUE, *Sur les intégrales singulières*, « Ann. de la Faculté de Toulouse », 3^e S., I, p. 46 (1909).

(6) G. SCORZA DRAGONI, *Una applicazione della quasi continuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile*. « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XII, pp. 55-61 (1952). Ricordo che lo Scorza Dragoni, in questo lavoro, ha osservato altresì che il suo teorema sussiste anche per un integrale del tipo

$$\int_a^x f(t, y(t)) dt;$$

nel senso che allora quella porzione di misura nulla dell'intervallo (a, b) si può determinare in guisa che non dipenda dalla funzione continua $y(x)$. Per un'altra dimostrazione del teorema di Scorza Dragoni si veggia: K. HAJASHI, *On the differential equation of Carathéodory's type*, « Mem. of the College of Science », Univ. of Kyoto, s. A., vol. XXVIII, pp. 129-132 (1953).

1. - Prima di iniziare la nostra dimostrazione, osserviamo intanto che la funzione $f(x, y)$, nelle condizioni indicate in II), è misurabile superficialmente, anzi, a norma di un teorema di G. Scorza Dragoni essa è quasi continua in R rispetto ad (x, y) , semi regolarmente rispetto ad y ⁽⁷⁾. Quindi il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = f'_y(x, y),$$

che, per la supposta assoluta continuità rispetto ad y della $f(x, y)$ per quasi tutti gli x di I , esiste finito quasi ovunque su quasi tutte le verticali, è una funzione misurabile superficialmente in R . Quindi è misurabile l'insieme ove $f'_y(x, y)$ manca o è infinita. E poiché le sezioni di questo insieme con quasi tutte le verticali hanno misura nulla, il detto insieme ha misura superficiale nulla. Così si giustifica l'affermazione contenuta in IV).

Ricordiamo poi che l'ipotesi IV) e un noto teorema di Fubini, assicurano che: *se G ed H sono due qualsivogliano porzioni misurabili, rispettivamente di I ed H , esistono i due integrali*

$$\int_G f'_y(t, y) dt \quad , \quad \int_H f'_y(x, \eta) d\eta$$

rispettivamente, per quasi tutti i valori di y in J e quasi tutti i valori di x in I , sono, nei detti intervalli, delle funzioni sommabili e inoltre si ha

$$\int_{G \times H} f'_y(t, \eta) dt d\eta = \int_H d\eta \int_G f'_y(t, \eta) dt = \int_G dt \int_H f'_y(t, \eta) d\eta,$$

proposizione, questa, che applicheremo più volte nel corso della dimostrazione.

2. Ciò premesso, dimostriamo, dapprima, il teorema enunciato nell'ipotesi supplementare che $f(x, y)$ sia limitata in R , che si abbia, cioè, $|f(x, y)| \leq M^*$, con M^* costante opportuna.

Poniamo allora:

$$(5) \quad F(x, y) = \int_{\varphi(c)}^x f(t, y) dt \quad \text{e} \quad \Phi(y) = F[\varphi(y), y] = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t, y) dt,$$

e dimostriamo che: $\Phi(y)$ è assolutamente in J .

(7) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », vol. XVII, pp. 102-106 (1948).

Infatti, comunque siano fissati p, q in J , si ha

$$|\Phi(p) - \Phi(q)| \leq \left| \int_{\varphi(c)}^{\varphi(p)} dt \int_p^q f'_y(t, y) dy \right| + \left| \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(t, q) dt \right| \leq \\ \leq \left| \int_p^q dy \int_{\varphi(c)}^{\varphi(p)} f'_y(t, y) dt \right| + M^* |\varphi(p) - \varphi(q)| \leq \left| \int_p^q dy \int_a^b |f'_y(t, y)| dt \right| + M^* |\varphi(p) - \varphi(q)|,$$

e di qui, dalla sommabilità in J della funzione $\int_a^b |f'_y(t, y)| dt$ e dalla assoluta continuità della $\varphi(y)$, segue l'assoluta continuità in J della $\Phi(y)$. Tale assoluta continuità porge:

$$(6) \quad \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t, y) dt = \int_c^y \Phi'(t) dt.$$

3. Facciamo ora vedere che, per quasi tutti i valori y_0 di J sussiste la relazione

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y_0)} \{f(t, y_0 + h) - f(t, y_0)\} dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y_0)} f'_y(t, y_0) dt.$$

A tale scopo, fissiamo una qualsivoglia y in J e consideriamo il sottointervallo, di I , di estremi $\varphi(c)$, $\varphi(y)$. Ivi la funzione $f'_y(t, \xi)$ è sommabile, rispetto a t , per quasi tutti i valori di ξ in J e pertanto la funzione

$$(8) \quad \psi(\xi, y) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f'_y(t, \xi) dt,$$

per ogni fissato y di J è definita per quasi tutti i valori di ξ pure in J ed è ivi (misurabile, anzi) sommabile, mentre per ogni fissato ξ quasi ovunque in J , essa è definita per ogni y di J ed è continua; inoltre, sempre per quasi tutti i valori di ξ e per ogni y , essa è maggiorata, in modulo, dalla funzione:

$\int_a^b |f'_y(t, \xi)| dt$, della sola variabile ξ , sommabile in J . Allora per

il teorema di Scorza Dragoni sussiste la formula

$$(9) \quad \frac{d}{d\xi} \int_c^\xi \psi(\eta, y) d\eta = \psi(\xi, y),$$

per ogni fissato valore di ξ in una conveniente porzione $J(\xi)$ di J avente la stessa misura di J , e qualunque sia il valore del parametro y pure in J , essendo $J(\xi)$ indipendente da y . Se y_0 appartiene a $J(\xi)$, la (9) porge

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{y_0}^{y_0+h} \psi(\eta, y) d\eta = \psi(y_0, y),$$

per tutti gli y di J , ossia, attesa la (8),

$$(10) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{y_0}^{y_0+h} d\eta \int_{\varphi(\epsilon)}^{\varphi(y)} f'_y(t, \eta) dt = \int_{\varphi(\epsilon)}^{\varphi(y)} f'_y(t, y_0) dt,$$

sempre per tutti gli y di J .

In particolare, la (10) sussiste anche per $y = y_0$. E pertanto si ha

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{y_0}^{y_0+h} d\eta \int_{\varphi(\epsilon)}^{\varphi(y_0)} f'_y(t, \eta) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi(\epsilon)}^{\varphi(y_0)} dt \int_{y_0}^{y_0+h} f'_y(t, \eta) d\eta = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi(\epsilon)}^{\varphi(y_0)} \{f(t, y_0+h) - f(t, y_0)\} dt = \int_{\varphi(\epsilon)}^{\varphi(y_0)} f'_y(t, y_0) dt, \end{aligned}$$

e l'ultima delle uguaglianze scritte non è altri che la (7).

4. Proviamo ora che: se $\sigma(h)$ è una qualsivoglia funzione continua, che in un intorno di $h = 0$ si annulla solo per $h = 0$, la relazione

$$(11) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_x^{x+\sigma(h)} f(t, y+h) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_x^{x+\sigma(h)} f(t, y) dt = f(x, y),$$

è certamente valida, se si prescinde in I da una conveniente porzione E_x che ha misura nulla e che non dipende dal parametro y .

Osserviamo intanto che se x non appartiene a una conveniente porzione di I di misura nulla e indipendente da y , l'ultima uguaglianza che figura in (11) sussiste a norma del teorema di Scorza Dragoni ricordato nell'introduzione. Per acquisire la proposizione enunciata basta allora provare che

$$(12) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_x^{x+\sigma(h)} \{f(t, y+h) - f(t, y)\} dt = 0,$$

se si prescinde in J da una conveniente porzione di misura nulla e indipendente da y .

Ci soccorre in questo la quasi continuità della $f(x, y)$ in R rispetto ad (x, y) , semiregolarmente rispetto ad y stabilita da Scorza Dragoni nel loco citato in (7). Per tale proprietà, fissato ad arbitrio un numero positivo ρ esiste un insieme R^* di R , avente una proiezione $R^*(x)$, sull'asse x , di misura minore di ρ , e tale che la $f(x, y)$ è uniformemente continua, rispetto ad (x, y) , in $R - R^*$. Sia allora $P(x_0, y)$ un qualsivoglia punto della verticale $x = x_0$, con x_0 , punto di $I - R^*(x)$, di densità lineare nulla rispetto all'insieme $R^*(x)$, di guisa che, essendo l'intervallo chiuso $I(x_0, h) = (x_0, x_0 + \sigma(h))$ un sottointervallo di I , (almeno per h abbastanza piccolo in modulo), contenente x_0 , è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{mis}[I(x_0, h) \cap R^*(x)]}{\text{mis } I(x_0, h)} = 0.$$

Di qui e dall'uniforme continuità in $R - R^*$ della $f(x, y)$, segue che fissato un numero positivo ε , esiste in corrispondenza un $\delta > 0$ tale che per ogni $|h| < \delta$ si ha

$$\frac{\text{mis}[I(x_0, h) \cap R^*(x)]}{\text{mis } I(x_0, h)} < \frac{\varepsilon}{4M^*},$$

e inoltre

$$|f(x, y + h) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

se $(x, y + h); (x, y)$ sono punti qualsiasi di $R - R^*$. Per $|h| < \delta$, è quindi

$$\left| \int_{x_0}^{x_0 + \sigma(h)} \{f(t, y + h) - f(t, y)\} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{mis}[I(x_0, h) - I(x_0, h) \cap R^*(x)] +$$

$$+ 2M^* \text{mis}[I(x_0, h) \cap R^*(x)] \leq \varepsilon \text{mis } I(x_0, h) = \varepsilon |\sigma(h)|,$$

ossia

$$\left| \frac{1}{\sigma(h)} \int_{x_0}^{x_0 + \sigma(h)} \{f(t, y + h) - f(t, y)\} dt \right| < \varepsilon,$$

purché sia $|h| < \delta$. La (12) è così dimostrata per ogni punto della verticale $x = x_0$, con x_0 appartenente ad $I - R^*(x)$ e di densità lineare nulla rispetto ad $R^*(x)$. Poiché quasi tutti i punti di $I - R^*(x)$ sono di dispersione per $R^*(x)$, data l'arbitrarietà della misura di $R^*(x)$, la (12) sussiste per tutti i punti di quasi tutte le verticali. Così la proposizione enunciata è dimostrata ⁽⁸⁾.

(8) Per un ragionamento analogo cfr. F. CAFIERO, *Sulle condizioni sufficienti per l'olomorfia di una funzione*, « Ricerche di Matematica », vol. 2, pp. 58-77, p. 65 (1953).

5. Indichiamo ora con

e_y l'insieme dei punti di J , misurabile e di misura uguale a quella di J , nei quali esistono finite: $\Phi'(y)$, $\varphi'(y)$ e sussiste la relazione di limite (7); e'_y la porzione di e_y ove $\varphi'(y) \neq 0$;

E_y l'insieme dei punti y di J per i quali $\varphi(y)$ appartiene ad E_x , (E_x essendo la porzione di I , di misura nulla, descritta nella proposizione del n. 4).

Attesa l'assoluta continuità di $\varphi(y)$ e la misura nulla di E_x , per cose note⁽⁹⁾, in quasi tutto E_y , risulta $\varphi'(y) = 0$, e quindi è di misura nulla l'intersezione: $e'_y \cap E_y$.

Ora proveremo che *nell'insieme: $e'_y - e'_y \cap E_y$, cioè in quasi tutto e'_y , risulta:*

$$(13) \quad \Phi'(y) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f'_y(t, y) dt + f[\varphi(y), y] \varphi'(y).$$

Sia y_0 un punto di $e'_y - e'_y \cap E_y$ e dimostriamo che in y_0 sussiste la (13).

Prima di fare altre considerazioni, sarà utile, però, richiamare le varie proprietà che sono verificate in y_0 . Ecco:

α) esistono finite: $\Phi'(y_0)$, $\varphi'(y_0)$,

β) sussiste la relazione di limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y_0)} \{f(t, y_0 + h) - f(t, y_0)\} dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y_0)} f'_y(t, y_0) dt,$$

γ) vale la disuguaglianza: $\varphi'(y_0) \neq 0$,

δ) $\varphi(y_0)$ non appartiene ad E_x ,

di guisa che, attesa la (11) è

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0) + \sigma(h)} f(t, y_0 + h) dt = f[\varphi(y_0), y_0],$$

per qualsivoglia y di J , anche per $y = y_0$, e quindi

ϵ) nel punto y_0 sussiste anche la relazione:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma(h)} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0) + \sigma(h)} f(t, y_0 + h) dt = f[\varphi(y_0), y_0].$$

Calcolando ora il rapporto incrementale della funzione $\Phi(y)$, relativo al punto y_0 , si ottiene:

$$(14) \quad \frac{\Phi(y_0 + h) - \Phi(y_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y_0)} \{f(t, y_0 + h) - f(t, y_0)\} dt + \frac{1}{h} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0 + h)} f(t, y_0 + h) dt,$$

(9) Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Zanichelli, Bologna (1921), vol. I, p. 176, oppure E. J. MCSHANE, *Integration*, Princeton, p. 213 (1947).

di modo che, ricordata la proprietà espressa in β), tutto si riduce a provare che

$$(15) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} f(t, y_0+h) dt = f[\varphi(y_0), y_0] \varphi'(y_0).$$

Questa relazione nel fatto sussiste, perché, attesa la γ), per h abbastanza piccolo è $\varphi(y_0+h) \neq \varphi(y_0)$, e allora posto $\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0) = \sigma(h)$, si ha

$$\frac{1}{h} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} f(t, y_0+h) dt = \frac{\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0)}{h} \frac{1}{\sigma(h)} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0)+\sigma(h)} f(t, y_0+h) dt.$$

Di qui, ricordate le α) ed ε) segue la (15).

Pertanto la (13) è giustificata per quasi tutti i punti di e'_y .

6. Nei punti y_0 di $e_y - e'_y$, nei quali quindi $\varphi'(y_0) = 0$, si ha

$$\frac{1}{h} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} f(t, y_0+h) dt = \frac{\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0)}{h} \theta(y_0, h),$$

con $|\theta(y_0, h)| \leq M^*$, epperò

$$(16) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} f(t, y_0+h) dt = 0.$$

Di qui, dalla proprietà β) e dalla (14) segue

$$(17) \quad \Phi'(y_0) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y_0)} f'_y(t, y_0) dt,$$

cioè ancora la (13), visto che stavolta $\varphi'(y_0)$ è lo zero. La (13) quindi sussiste quasi ovunque in J , e allora, attesa la (6), si ottiene la formula (2) da dimostrarsi nell'ipotesi supplementare, assunta all'inizio del n. 2, che $f(x, y)$ sia limitata in R .

Prima di liberarci da questa ipotesi, vogliamo esplicitamente osservare che finora non abbiamo mai usufruito dell'ipotesi III) riguardante la (misurabilità e) sommabilità del prodotto: $f[\varphi(y), y] \varphi'(y)$. Di guisa che la limitatezza della $f(x, y)$, assieme alle ipotesi I), II), IV), porge appunto la (misurabilità e) sommabilità del suddetto prodotto, dato che, quasi ovunque in J , sussiste la (13).

Teoria delle funzioni. — *Sulle condizioni di regolarità delle funzioni in un'algebra.* Nota di G. B. RIZZA, presentata (*) dal Socio F. SEVERI.

1. Nelle ricerche concernenti le funzioni regolari nelle algebre ipercomplesse si presenta talora l'opportunità di eseguire nelle algebre in considerazione dei cambiamenti di base (1).

D'altro canto, come è noto, la definizione di funzione regolare a destra (a sinistra) si pone con riferimento ad una base fissata nell'algebra e dalla base scelta dipende in modo essenziale, nel senso che le classi delle funzioni regolari a destra (a sinistra) definite rispetto a basi diverse in generale non coincidono (2).

Di qui l'interesse di una caratterizzazione dei cambiamenti di base che lasciano invariata la classe delle funzioni regolari a destra (a sinistra).

Tale caratterizzazione è ottenuta in questo lavoro per le algebre dotate di modulo mediante una opportuna condizione di permutabilità tra matrici (n. 3); la condizione stessa è poi generalizzata (n. 4) al caso in cui si sappia almeno che l'algebra è priva di nullfici destri (o sinistri).

2. In un'algebra reale A , d'ordine n , siano $[u_k] = [u_1, \dots, u_n]$ un sistema fondamentale di unità e $\gamma_{hk}^r (h, k, r = 1, \dots, n)$ le relative costanti di moltiplicazione (3).

Sia poi $T = \|a_{h'}^h\|$ (h' ed h riferendosi rispettivamente alle righe ed alle colonne) la matrice non degenera ($|T| = \text{Det. } T \neq 0$) associata al cambiamento di base:

$$(1) \quad u_{h'} = a_{h'}^h u_h \quad (h' = 1', \dots, n')^{(4)}$$

e siano:

$$(2) \quad x^{h'} = a_{h'}^{h'} x^h \quad (h' = 1', \dots, n'),$$

con $a_{h'}^{h'}$ elemento reciproco di $a_{h'}^h$ in $|T|$, le corrispondenti formule di trasformazione per le componenti dell'ipercomplesso generico di A :

$$x = x^h u_h = x^{h'} u_{h'}.$$

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) Ved. per esempio il n. 2 del lavoro al n. [3] della bibliografia posta in fine.

(2) La definizione di funzione regolare a destra è data dalla (4) del presente lavoro; la regolarità a sinistra si definisce in modo analogo. Ved. inoltre B. G. RIZZA [2], p. 172 e M. SCE [4], pp. 31-32, ove le funzioni qui dette regolari son chiamate monogene.

(3) Per le nozioni fondamentali di teoria delle algebre e di calcolo delle matrici, che occorrono in questo lavoro, si vedano per esempio i trattati di G. SCORZA [5], e di A. A. ALBERT [1].

(4) Nella (1) e nelle formule successive si intende sempre di sommare rispetto agli indici ripetuti, al variare di questi tra $1, \dots, n$ (ovvero tra $1', \dots, n'$).

Posto inoltre

$$P^{hr} = \alpha_{h'}^h \alpha_{h'}^r \quad ; \quad Q^{h' r'} = \alpha_h^{h'} \alpha_h^{r'}$$

($h, r = 1, \dots, n$; $h', r' = 1, \dots, n'$) e introdotte le matrici:

$$P = \| P^{hr} \| \quad ; \quad Q = \| Q^{h' r'} \parallel$$

si ha subito:

$$(3) \quad P = P_{-1} = T_{-1} T \quad ; \quad Q = Q_{-1} = T_{-1}^{-1} T^{-1}$$

l'indice basso -1 denotando trasposizione.

Indicate poi con \mathcal{R}_d , \mathcal{R}'_d le classi delle funzioni regolari a destra con riferimento alle basi $[u_h]$, $[u_{h'}]$ rispettivamente ⁽⁵⁾, ricordiamo che una funzione $y = y^k u_k = y^{k'} u_{k'}$ della variabile $x = x^h u_h = x^{h'} u_{h'}$ con le y^k funzioni di classe \mathcal{C}^1 delle x^h , appartiene ad \mathcal{R}_d , se e solo se:

$$(4) \quad Dy = \frac{\partial y}{\partial x^h} u_h = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial y^k}{\partial x^h} \gamma_{kh}^t = 0 \quad (t = 1, \dots, n).$$

Analogamente la condizione perché y appartenga ad \mathcal{R}'_d è:

$$(4') \quad D'y = \frac{\partial y}{\partial x^{h'}} u_{h'} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^{h'}} \gamma_{k'h'}^{t'} = 0 \quad (t' = 1', \dots, n')$$

che può scriversi anche:

$$(5) \quad P^{hr} \frac{\partial y}{\partial x^h} u_r = 0 \quad \text{cioè} \quad P^{hr} \frac{\partial y^k}{\partial x^h} \gamma_{kr}^s = 0 \quad (s = 1, \dots, n).$$

Ciò premesso, passiamo al problema che ci interessa (n. 1), che consiste nella determinazione di condizioni necessarie e sufficienti perché le classi \mathcal{R}_d ed \mathcal{R}'_d coincidano.

3. Supponiamo dapprima che l'algebra A sia *dotata di modulo*.

Indicato questo con u , osserviamo che *le funzioni lineari*:

$$(6) \quad y_k^t = x^t u_k - \gamma_{kt}^r x^r u \quad (t, k = 1, \dots, n)$$

sono regolari a destra nella base $[u_k]$ ⁽⁶⁾.

Si può anche notare che ogni funzione lineare regolare a destra è una combinazione lineare delle funzioni y_k^t .

Infatti, la più generale funzione lineare di \mathcal{R}_d è:

$$y = \alpha_t^h x^t u_h$$

con le α_t^h soddisfacenti alla condizione:

$$\alpha_t^h \gamma_{kt}^r = 0 \quad (r = 1, \dots, n),$$

(5) Di qui in avanti ci riferiremo sempre al caso delle funzioni regolari a destra, essendo del tutto analogo l'altro caso.

(6) Il risultato segue subito dall'uguaglianza $u_k u_t = \gamma_{kt}^r u_r$.

e si ha subito:

$$(7) \quad y = \alpha_t^k y_k'.$$

Dalla prima osservazione segue che una condizione *necessaria* perché le classi \mathfrak{R}_d ed \mathfrak{R}_d' coincidano si ottiene imponendo alle funzioni lineari y_k^t di \mathfrak{R}_d di soddisfare alla (5). Precisamente si perviene senza difficoltà alla condizione:

$$(8) \quad P^{tr} \gamma_{kr}^s = P^{hs} \gamma_{kt}^h \quad (k, s, t = 1, \dots, n).$$

Considerata poi la prima rappresentazione dell'algebra A relativa alla base $[u_k]$ ⁽⁷⁾, l'elemento u_k di A ha come corrispondente la matrice $U = \|\gamma_{kt}^s\|$ (s, t indicando rispettivamente righe e colonne), onde la (8) può scriversi:

$$(9) \quad P U_{-1} = U_{-1} P \quad (k = 1, \dots, n)$$

e quindi, data la simmetria di P (formula (3)), risulta:

$$(10) \quad U P = P U \quad (k = 1, \dots, n).$$

Infine, indicata con $X = \|x^k \gamma_{kt}^s\|$ la matrice prima rappresentazione dell'ipercomplesso generico x di A , dalla (10) si ottiene subito la relazione:

$$(11) \quad X P = P X.$$

Notiamo esplicitamente che le condizioni (8), (9), (10), (11), quest'ultima con X generico, sono equivalenti.

La considerazione delle funzioni lineari $y_k^{t'}$ di \mathfrak{R}_d' , definite analogamente alle y_k^t , conduce alla condizione:

$$(11') \quad X' Q = Q X'$$

dove $X' = T_{-1}^{-1} X T_{-1}$ è la prima rappresentazione di x con riferimento alla base $[u_k']$. Si prova senza difficoltà, con calcolo diretto, che la (11') è equivalente alla (11).

Dimostriamo ora che la condizione (11) è altresì *sufficiente* ad assicurare la coincidenza delle due classi \mathfrak{R}_d ed \mathfrak{R}_d' .

Invero, se y è una qualunque funzione di \mathfrak{R}_d , soddisfacente cioè alla (4), a causa della (8), equivalente alla (11), risulta:

$$P^{tr} \frac{\partial y^k}{\partial x^t} \gamma_{kr}^s = P^{hs} \frac{\partial y^k}{\partial x^t} \gamma_{kt}^h = 0 \quad (s = 1, \dots, n).$$

È dunque soddisfatta la (5) e perciò y appartiene anche ad \mathfrak{R}_d' .

In modo perfettamente analogo, supponendo soddisfatta la (11'), equivalente alla (11), si prova che ogni funzione di \mathfrak{R}_d' appartiene anche ad \mathfrak{R}_d . Dunque:

(7) Ved. A. A. ALBERT [1], pp. 217-8.

Condizione necessaria e sufficiente perché in un'algebra dotata di modulo le classi \mathfrak{R}_d ed \mathfrak{R}'_d coincidano è che sussistano le relazioni equivalenti (11), (11')⁽⁸⁾.

4. Più in generale, supponiamo ora l'algebra A priva di nullifici destri, cioè di elementi $v \neq 0$ per i quali risulti $xv = 0$ con x qualunque in A , o, ciò che è equivalente, per i quali riesca nulla la matrice destra $\|\gamma_{jh}^{hs}\|$ ⁽⁹⁾.

Poiché nella ipotesi attuale non è assicurata l'esistenza del modulo e neppure quella di un modulo sinistro (ved. nota⁽⁸⁾), per stabilire una condizione analoga alla (11) non potremo valerci delle funzioni y_k^t del n. 3. Tuttavia, introducendo le *funzioni lineari*:

$$(12) \quad y_{jk}^t = x^t u_j u_k - \gamma_{kt}^r x^r u_j \quad (j, k, t = 1, \dots, n)$$

regolari a destra e ragionando come al n. 3 si perviene subito ad una condizione necessaria per la coincidenza delle classi $\mathfrak{R}_d, \mathfrak{R}'_d$. Si trova precisamente la condizione:

$$(13) \quad P^{tr} \gamma_{kr}^h \gamma_{jh}^s = P^{hr} \gamma_{kt}^h \gamma_{jr}^s \quad (j, k, s, t = 1, \dots, n)$$

analoga alla (8), e, facendo uso della prima rappresentazione dell'algebra A , si perviene in definitiva alla equivalente:

$$(14) \quad Z(XP - PX) = 0$$

analoga alla (11), con X e Z arbitrari.

Ragionando invece sulle funzioni $y_{j'k'}^{t'}$ di \mathfrak{R}'_d , che corrispondono alle y_k^t di \mathfrak{R}_d , si ottiene subito la condizione necessaria:

$$(14') \quad Z'(X'Q - QX') = 0$$

dove $X' = T_{-1}^{-1} X T_{-1}$, $Z' = T_{-1}^{-1} Z T_{-1}$ sono le prime rappresentazioni con riferimento alla base $[u_h]$ degli ipercomplessi arbitrari x, z di A .

Contrariamente a quanto accade per le (11), (11'), le (14), (14') non sono in generale equivalenti, quest'ultima risultando però equivalente alla:

$$(15) \quad Z(XP^{-1} - P^{-1}X) = 0.$$

Dimostriamo ora che le condizioni (14), (15) sono anche sufficienti ad assicurare la coincidenza di $\mathfrak{R}_d, \mathfrak{R}'_d$.

Infatti, se y è una qualunque funzione di \mathfrak{R}_d , soddisfacente cioè alla (4), a causa della (13), equivalente alla (14), risulta:

$$P^{tr} \frac{\partial y^k}{\partial x^t} \gamma_{kr}^h \gamma_{jh}^s = P^{hr} \gamma_{jr}^s \frac{\partial y^k}{\partial x^t} \gamma_{kt}^h = 0 \quad (j, s = 1, \dots, n).$$

(8) Le considerazioni ed i risultati di questo n. si estendono senza difficoltà al caso delle algebre dotate di uno o più moduli sinistri.

(9) Ved. per esempio G. SCORZA [5], p. 295.

Ne segue che gli elementi della matrice destra dell'ipercomplesso $P^{ir} \frac{\partial y^k}{\partial x^h} \gamma_{kr}^h u_h$ sono tutti nulli, e, poiché per ipotesi l'algebra A è priva di nullifici destri, tale ipercomplesso è necessariamente lo zero di A . La y soddisfa quindi alla condizione (5) e pertanto appartiene ad \mathcal{R}_d .

In modo analogo, partendo dalla (14), equivalente alla (15'), si dimostra che ogni funzione di \mathcal{R}'_d appartiene anche ad \mathcal{R}_d .

In conclusione, *condizione necessaria e sufficiente perché in una algebra priva di nullifici destri le classi $\mathcal{R}_d, \mathcal{R}'_d$ coincidano è che sussistano le relazioni (14), (15) ⁽¹⁰⁾.*

5. Terminiamo con alcune osservazioni.

Se l'algebra A è dotata di modulo (di uno o più moduli sinistri) le condizioni (14), (15) si riducono alla (11) del n. 3. Infatti basta porre $Z = U$ dove U è la matrice prima rappresentazione del modulo (di un modulo sinistro) di A , per ottenere rispettivamente la (11) e l'equivalente $XP^{-1} = P^{-1}X$.

Osserviamo poi che la (11) può riguardarsi come una *condizione di permutabilità* nell'algebra M delle matrici quadrate d'ordine n . Le matrici X , che, come è noto, costituiscono una sottoalgebra di M isomorfa ad A , dipendono soltanto dalla struttura di A , mentre la matrice P dipende soltanto dal cambiamento di base.

In particolare, se $P = T_{-1}T$ appartiene al centro di M , cioè se P è una matrice scalare, la (11) e, di conseguenza, le (14), (15) sono soddisfatte. Dunque, *se il quadrato per colonne della matrice T , relativa al cambiamento di base (1) è una matrice scalare, le classi \mathcal{R}_d ed \mathcal{R}'_d coincidono.*

Il confronto diretto delle (4), (5) permette di estendere immediatamente questo ultimo risultato al caso di un'algebra generale ⁽¹¹⁾. Notiamo anche che, mentre le (11), (14), (15) esprimono condizioni concernenti la matrice T e la base $[u_h]$, la condizione sopra enunciata (che è però soltanto sufficiente) riguarda unicamente la matrice T .

Ne deriva una semplice interpretazione geometrica del risultato. Rappresentati gli ipercomplessi $x = x^h u_h = x^{h'} u_{h'}$ di A negli spazi cartesiani ortogonali $S_n(x^h), S'_n(x^{h'})$, la (2) del n. 3 è l'equazione di una affinità nella quale le origini O, O' di S_n, S'_n si corrispondono; in particolare si ottiene una similitudine, se e solo se $P = T_{-1}T$ è una matrice scalare. Quindi, *la nozione di regolarità a destra in un'algebra è invariante rispetto alle similitudini tra S_n ed S'_n che mutano O in O' .*

Osserviamo infine che, come scende facilmente dalle considerazioni del n. 4, *anche nel caso di un'algebra generale le (14), (15) sono condizioni necessarie perché le classi $\mathcal{R}_d, \mathcal{R}'_d$ coincidano.*

(10) Il teorema ottenuto permette di ritrovare facilmente, nel caso delle algebre prive di nullifici destri, alcuni risultati parziali segnalati da M. SCE ([4], nota ⁽⁸⁾, p. 32).

(11) Cfr. per esempio M. SCE [4], nota ⁽⁸⁾, p. 32.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. A. ALBERT, *Modern Higher Algebra* (Chicago Univ. Press, 1937).
 [2] G. B. RIZZA, *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse*, «Comm. Pont. Ac. Sci.», 14, 4 (1950).
 [3] G. B. RIZZA, *Funzioni regolari nelle algebre di Clifford* (in corso di pubblicazione).
 [4] M. SCE, *Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse*, I, «Rend. Lincei», 8, 16, I (1954).
 [5] G. SCORZA, *Corpi Numerici e Algebre* (Principato, Messina, 1921).

Topologia. — *Un indice dei punti uniti.* Nota II di D. G. BOURGIN (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Questa seconda Nota definisce l'indice, stabilisce la sua invarianza (teorema 2) e prova varie altre sue proprietà. Continuiamo la numerazione dei nostri risultati d'accordo con [1].

LEMMA 12. — *Sia G aperto e supponiamo che \dot{G} non contenga alcun punto unito di f . Segue che esiste un intorno \sqcup di \dot{G} e un β tale che se $q_b y \in U$ allora y e f_b sono nei semplici disuniti di b .*

Perché \dot{G} è compatto qualche ricoprimento di X , $v = \{v_i\}$ soddisfa (a) $f v_i \cap v_i = \Phi$ per ogni v_i che incontra G . Restringiamo [4, p. 26] v a $\mu = \{u_i\}$ e perciò (a) implica $f \bar{u}_i \cap \bar{u}_i = \Phi$. Supponiamo che $\beta \supset \rho = \{r_i\} \supset \mu$ dove ρ soddisfi l'ulteriore condizione che nessun elemento di ρ^* incontra entrambi \bar{u}_i e $f \bar{u}_i$ per qualsiasi u_i con punti in \dot{G} . Sia $U \{r_j/r_j \cap \dot{G} \neq \Phi\} = \sqcup$. Supponiamo che $y \in \bar{\sigma}$, un semplice chiuso di b , dove $q_b y \in \sqcup$. Supponiamo che $y \in \bar{\sigma}$, un semplice chiuso di b , dove $q_b y \in \sqcup$. Segue che $q_b y \subset q_b \bar{\sigma} \subset r_1$ e perciò $St r_1 \cap \dot{G} \neq \Phi$. Sia $u_1 \supset St r_1$. Allora $f q_b \bar{\sigma} \supset f q_b y \in b_2$ con un ordine proprio. Anche $f q_b y \in f u_1$. Perché b_2 incontra $f u_1$, $St^2 b_2 \cap u_1 = \Phi$. Anzi $Q_b f q_b y \in St(\bar{b}_2)$ e questa non incontra σ perché, supponiamo che $St(\bar{b}_2)$ contenga il vertice (b_3) di $\bar{\sigma}$. Allora $q_b(b_3) \subset b_3 \subset u$, e perciò $(b_3) \in St^2(b_2)$ o $(b_3) \in St(\bar{b}_2)$, donde un assurdo.

LEMMA 13. — *Supponiamo che G sia aperto e \dot{G} non abbia alcun punto unito di f . Segue che esiste un ricoprimento β tale che per ogni punto $y \in St((q_b^{-1} G)^*, b)$ esso e $f_b y$ sono in semplici chiusi disuniti.*

Scegliamo la notazione del Lemma 12. Osserviamo che $q_b^{-1} \bar{G} \supset \overline{q_b^{-1} G}$ e perciò $q_b^{-1} \dot{G} \supset (q_b^{-1} G)^*$. Conseguentemente $q_b^{-1} \sqcup$ è un intorno di $(q_b^{-1} G)^*$. Inoltre se σ è un semplice di b che incontra $(q_b^{-1} G)^*$ la sua applicazione per q_b incontra \dot{G} ed è contenuta in un elemento di μ che, siccome contiene punti di \dot{G} , è in \sqcup . Questo stabilisce la nostra asserzione per il Lemma 12.

(*) Concessionario di una borsa Fulbright.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

Una partizione $\{G_i | i = 1, \dots, N\}$ (rispetto ad un'applicazione in sé, f) è un aggregato finito di insiemi aperti, con chiusure fra loro disgiunte, i quali coprono l'insieme dei punti uniti. Evidentemente nessun punto unito può essere un punto contornante di un elemento G_i , di una partizione.

LEMMA 14. - Se G_1, G_2 è una partizione per f_b , segue per ogni $\beta_0 < \beta$, $q_b^{-1} G_1, q_b^{-1} G_2$ è una partizione per f_b .

Sia $H_i \subset \bar{H}_i \subset G_i, i=1,2$ con H_1, H_2 una partizione. Sia $H_1' \cap H_2' = H$. Allora la compattezza e un ragionamento che utilizza un restringimento assicura che per un ricoprimento abbastanza fine, α , $St a_i$ e fa_i sono disuniti per ogni a_i che incontra H . Sia $\alpha <^* \delta <^e \beta$. Sia $y \in ST(b_i)$ con $H \supset x = q_b y \in q_b St(b_i) \subset d_i$. Se y è un punto unito, allora $Q_b fx = y$ implica che $Q_b fx \subset St(b_i)$ o $fx \subset b_i$. Perché $q_b(b_i) \in b_i$ segue che b_i incontra d_i e fd_i in contraddizione con il fatto che $b_i \cup d_i \subset St d_i \subset a_i$ è disunito da fa_i . Conseguentemente non c'è un punto unito di f_b sul $q_b^{-1} H$ e, perché $(q_b^{-1} G_1)^* \subset q_b^{-1} G_1 \subset q_b^{-1} H$, non c'è un punto unito sui contorni di $q_b^{-1} G_1$ e $q_b^{-1} G_2$ ed il lemma è dimostrato.

TEOREMA 2. - Sia G un insieme aperto di X non contenente punti uniti di f sul contorno. Per ogni $\omega_0 < \omega$ il valore di $\bigwedge (f_w, q_w^{-1} G)$ è lo stesso.

Supponiamo che $G = G_1$ e G_2 costituiscano una partizione.

Dalla $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \Phi$ e dalla compattezza di X segue che esistono insiemi H_i, C_i, D_i , che soddisfano $H_i \supset \bar{C}_i \supset C_i \supset \bar{D}_i \supset D_i \supset \bar{G}_i \supset G_i, i = 1, 2$, dove H_1, H_2 è una partizione. Sia α_0 come nel teorema 1. Supponiamo che $\alpha_0 < \alpha$ soddisfi la condizione che nessun a_i incontra entrambi H_j' e $C_j, j = 1, 2$ ed inoltre che $St(H_1, \alpha) \cap St(H_2, \alpha) = \Phi$. Nuovi ricoprimenti sono introdotti d'accordo con le relazioni

$$\alpha <^o \beta <^* \eta <^e \pi \quad \begin{matrix} <^* \rho = \{r_i | i = 1, \dots, A\} \\ <^* \nu = \{v_j | j = 0, \dots, B\} \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} <^o \rho \wedge \nu = \mu = \{u_k | u_k = r_i \cap v_j, k = i + Aj\}. \end{matrix} \right.$$

Supponiamo anche che $St(\bar{G}_i, \beta) \subset D_i, St^2(D_i, \beta) \subset C_i$ per $i = 1, 2$, e che, seguendo il lemma 13, (a): $y \in St[(q_b^{-1} G_1)^*, b]$ allora y e $f_b y$ sono in semplici chiusi differenti di b . Sia $\delta > \rho$ il ricoprimento che consiste di tutti gli elementi di ρ che contengono punti di \bar{H}_1 e anche tutti gli insiemi di μ che incontrano H_1' . Assumiamo un ordine tale che $\delta = \{d_i | d_i = r_i, i = 1, \dots, N\} \cup \{d_j | d_j = u_j, j = N + 1, \dots, L\}$. L'effetto della sostituzione di δ invece di ρ è di cambiare il ricoprimento solamente fuori di C_1 .

Siano $M(t)$ e $L(t)$ i nervi dei ricoprimenti di D_1 e C_1 rispettivamente da t dove $t = \rho$ o $t = \delta$. Perché gli elementi di δ che incontrano C_1 sono elementi di ρ possiamo considerare che d e r hanno un complesso comune contenente

$$L(r) = L(d) = L \supset M = M(r) = M(d).$$

Definiamo q_b come segue: Per i semplici di L definiamo una realizzazione parziale identica con q_r . Al vertice (d_i) che non appartiene ad L assegnamo un punto arbitrario in d_i . Questa realizzazione parziale ha maglia π e perciò può essere estesa a una realizzazione colma, q_d , di d con maglia η . Asseriamo

che $q_d^{-1}G_i = O_d$ e $q_r^{-1}G_i = O_r$ sono in M perciò sono gli stessi. Scriveremo spesso O per tutti e due. Invero se $q_d y \in G_i$ segue che y è in $St(d_j)$ per un certo d_j . Perciò $q_d St(d_j)$ è contenuto in un singolo insieme di β . Se un vertice (d_i) di $St(d_j)$ è fuori M segue che $d_i \cap D_i = \Phi$. Perché $q_d(d_i) \subset d_i$, $q_d St(d_j)$ conterrebbe punti fuori D_i e punti in G_i in contraddizione con la nostra condizione che $St(G_i, \beta) \subset D_i$. Se tutti i vertici di $St(d_j)$ sono in M si capisce $y \in M$. Perché $St(D_i, \beta) \subset C_i$ concludiamo $St(O, r) \subset L$. Allora q_r e q_d sono gli stessi sul *simpliciale* $O^* = St(O, r) = St(O, d)$ e $q_d O^* \subset C_i$. Conseguentemente $(b) f_{q_r}$ e f_{q_d} sono gli stessi su O^* .

Definiamo Q_d in un modo consueto così: La compattezza permette un restringimento di δ e ρ ai ricoprimenti $\tau = \{t_i\}$ e $\sigma = \{s_j\}$ rispettivamente [4, p. 26]. Conseguentemente $d_j \supset \bar{l}_j \supset t_j$ e $r_j \supset \bar{s}_j \supset s_j$. Allora per $i = 1, \dots, N$ indichiamo adesso con t_i in τ e s_i in σ gli insieme che prima avevamo indicato con $s_i \cup t_i$. Scriviamo $c_i(x, \bar{s}_i, r'_i) = c_i(x)$, $i = 1, \dots, N$ per la funzione di Urysohn [4, p. 27] di (\bar{s}_i, r'_i) . Analogamente per $i = N+1, \dots, L$, $c_i(x) = c_i(x, t_j, d'_i)$. Allora $Q_l x$ è definita per l'associazione delle sue coordinate baricentriche m_i , dove $l = r$ o $l = d$ e $K = L$ o $K = N$,

$$(a) \quad m_i = c_i(x) \left[\sum_{r=1}^{i=K} c_j(x) \right].$$

Conseguentemente per ogni $x \in C_i$, $Q_r(x) = Q_d(x)$. Questa implica (c) $Q_d^{-1}O^* = Q_r^{-1}O^*$. Infatti supponiamo che $Q_d x = y \in O^*$ con $y \in St(d_i)$. Gli insiemi di δ che possono contenere x sono inclusi in quelli che corrispondono ai vertici in $St^2(d_i) \supset St(d_i)$. Perché q_d applica $(d_i) \in O^*$ in un elemento d_i segue che il nervo del ricoprimento di D_i indotto da δ include O^* . Conseguentemente $x \in St^2(D_i, d) \subset C_i$. Concludiamo dalle (b) e (c) che (d) : se $y \in O^* \cap f_r^{-1}O^*$ allora $f_d y = f_r y$.

La regola (A) o (^1A) indica che l'insieme che può influenzare i valori di $\wedge(f_d, O)$ è quello costituito dai punti di O che vengono in punti di O . Perché $f_d = f_r$ per tale punti segue che $\wedge(f_d, O) = \wedge(f_r, O)$. Diamo adesso un ragionamento più dettagliato per questa eguaglianza. Siano 1d e 2d suddivisioni di d che corrispondono a 1K e 2K con 1d almeno la terza derivata baricentrica di d . Scriviamo $^1O = St(O, ^1d)$ e $^2O = St(^1O, ^1d) \subset O^*$. Si osserva che \wedge dipende sul dominio in 1O che è applicato da F_d in 1O . F_d può essere definita vertice per vertice da $F_d(^2d_j) = (^1d_i)$ se e solamente se $f_d St(^2d_j) \subset St(^1d_i)$ e poi definita ulteriormente estendendo linearmente sopra i semplici. Quindi i semplici nella 2d suddivisione di 1O che vanno seguendo F_d nei semplici di 1O sono determinati dall'applicazione mediante f_d di quella parte di $St(^1O, ^2d)$ che va in $St(^1O, ^1d)$. In altre parole $\wedge(f_d, O)$ dipende, al massimo, sui valori di f_d su $St(^1O, ^2d) \cap f_d^{-1}St(^1O, ^1d) \subset O^* \cap f^{-1}O^*$. Assumiamo che su L le suddivisioni 1d e 2d siano le stesse di quelle per 1r e 2r . Segue dalla (d) che $F_d = F_r$ per tutti i semplici che contribuiscono a \wedge . Inoltre la condizione (a) assicura l'assenza dei punti uniti sul $O^* - O$ per F_d o F_r . Quindi

$$(I) \quad \wedge(f_d, O_d) = \wedge(f_r, O_r).$$

Supponiamo ora di sostituire δ con μ . Perché il cambio entra solamente sulla parte del ricoprimento che incontra \bar{H}_1 non c'è un cambio nel ricoprimento di C_2 . Conseguentemente possiamo stabilire, come sopra, $\wedge(f_d, {}_2O_d) = \wedge(f_u, {}_2O_u)$ dove $q_d^{-1}G_2 = {}_2O_d$ ecc.

Quindi osserviamo che ormai ${}_2O = {}_2O_u = {}_2O_d$ è contenuto nel sotto-complesso comune ad entrambi d e u ed il Teorema 1 implica che

$$\wedge(f_d, O_d) = L(f) \rightarrow \wedge(f_d, {}_2O_d) = L(f) \rightarrow \wedge(f_u, {}_2O_u) = \wedge(f_u, O_u).$$

Dalla (1) segue che $\wedge(f_r, O_r) = \wedge(f_u, O_u)$. Perché il ragionamento non cambia quando si sostituisce r con v abbiamo $\wedge(f_v, O_v) = \wedge(f_u, O_u)$. Insomma $\wedge(f_r, O_r) = \wedge(f_v, O_v)$.

Definiamo $\wedge(f, G)$ solamente quando \bar{G} non ha punti uniti come il valore comune di $\wedge(f_r, O_r)$ per tutti i ρ seguenti un certo ρ_0 .

Osservazione (3). Le proprietà abituali dell'indice per complessi finiti valgono per il nostro indice perché la definizione fa intervenire solamente $\wedge(f_r, O_r)$.

LEMMA 15. - Se G è aperto e $\wedge(f, G) \neq 0$ ci deve essere un punto unito in G .

Supponiamo che il teorema sia falso. Se non vi è un punto unito in G si può stabilire come nella dimostrazione dei lemmi 12 e 13 che per qualche β, y e $f_\beta y$ appartengono ai semplici chiusi e disuniti per $y \in q_\beta^{-1}G$. Quindi $\wedge(f_\beta, q_\beta^{-1}O) = 0$ [3, p. 500] per tutti i $\beta_0 < \beta$. Segue che $\wedge(f, G) = 0$ in contraddizione con la nostra ipotesi.

LEMMA 16. - Se G_1, G_2 è una partizione segue: $\wedge(f, G_1) + \wedge(f, G_2) = L(f)$.

Questo è una conseguenza del fatto che per una ρ abbastanza raffinata, $\wedge(f, G_1) + \wedge(f, G_2) = \wedge(f_r, q_r^{-1}G_1) + \wedge(f_r, q_r^{-1}G_2) = L(f_r) = L(f)$.

LEMMA 17. - Supponiamo che G e E siano insiemi aperti senza punti uniti sui contorni e supponiamo che non vi siano punti uniti sulla loro differenza simmetrica, allora segue che

$$\wedge(f, G) = \wedge(f, E),$$

Usiamo il lemma 16 con le partizioni $G \cup E, H; G, H$ e E, H .

Ricordiamo che per noi un ANR, X , è una ritrazione di un insieme aperto in P , cioè un NR di P . Però se $h^{-1}(X) = X^1 \subset P^1$ è un omeomorfismo di X , dal teorema di Tietze [2] segue l'esistenza di una estensione k di h all'applicazione di P^1 in P . Se r è la ritrazione di \sqcup in X allora $r^1 = h^{-1}r k$ è una ritrazione di $\sqcup^1 = k^{-1}(\sqcup) \subset P^1$ su X^1 . Allora:

LEMMA 18. - Se il ANR, Z , è chiuso nel ANR, Y , e se $f(\bar{G}) \cup f(Z) \subset Z$ allora $\wedge(f, G) = \wedge(f|Z, G \cap Z)$.

Distinguiamo fra gli insiemi e le funzioni su Z rispetto ad Y con un apice, allora ${}^1O = O \cap Z, {}^1f = f|Z, {}^1q_r$ e l'applicazione co-canonica da il nervo 1r

a Z ecc. Sostituiamo G con l'insieme aperto O la cui chiusura è contenuta in G con nessun punto unito su $G - O$. Assumiamo tacitamente che per ogni ricoprimento α o ${}^1\alpha$, $\text{St}(\bar{O}, \alpha) \subset G$, $\text{St}({}^1\bar{O}, {}^1\alpha) \subset {}^1G$ e che $\bigwedge(f, O) = \bigwedge(f_b, q_b^{-1}O)$ e $\bigwedge(f, {}^1O) = \bigwedge(f_b, {}^1q_b^{-1}O)$ per ogni $\alpha < \beta$, ${}^1\alpha < {}^1\beta$. Supponiamo $\rho(Y)$ soddisfi $\{r_i\} = \rho \stackrel{e}{>} \beta$ dove ${}^1\rho \stackrel{e}{>} {}^1\beta$.

Inoltre possiamo supporre che se $r_i \cap r_j \neq \Phi$ e r_i e r_j incontrino Z allora $r_i \cap r_j \cap Z \neq \Phi$ perché possiamo sempre compiere questo dopo un raffinamento opportuno. Segue che 1r è un sottocomplesso di r e possiamo allora scegliere q_r su r coincidente con 1q_r , perché possiamo estendere la definizione di 1q_r se applichiamo i vertici $\{(r_h)\}$ fuori di 1r nei punti degli insiemi $\{r\}$ e poi estendiamo questa applicazione su β .

Inoltre usando il Teorema 2, Eq. (a) si può prendere Q_r eguale a 1Q_r su $Z \rightarrow {}^1r$. Allora $f_r|{}^1r = {}^1f_r$. Osserviamo che $q_r^{-1}O \cap {}^1r$ e ${}^1q_r^{-1}O$ possono essere cambiati. Quindi $\bigwedge(f, O) = \bigwedge(f_r, q_r^{-1}O)$ e $\bigwedge(f, {}^1O) = \bigwedge(f_r|{}^1r, (q_r^{-1}O) \cap {}^1r)$. La proposizione che dobbiamo stabilire è così ridotta al caso della applicazione in sé di un complesso simpliciale finito. Quindi sia F_r l'approssimazione simpliciale da una suddivisione, 1r di r a r . Possiamo esigere che $F_r|{}^1r \subset {}^1r$ e $F_r|{}^1r = {}^1F_r$. Ricordiamo la $[I, A]$ che i soli semplici in r congiunti con un non zero $i_i(n)$ sono in 1r e perciò i termini e la somma nella $[I, A]$ sono gli stessi per $\bigwedge(f_r, O_r)$ e per $\bigwedge(f_r|{}^1r, (q_r^{-1}O) \cap {}^1r)$.

LEMMA 19. — Se $f \simeq g$ e se durante l'omotopia nessun punto unito entra su \dot{G} allora $\bigwedge(f, G) = \bigwedge(g, G)$.

Supponiamo che $h: X \times I \rightarrow X$ definisca l'omotopia. Supponiamo s fissato a s_0 . Identifichiamo f nel Teorema 2 con $h(\cdot, s_0)$. Per un intervallo $I(s_0) = \{s \mid |s - s_0| < \epsilon\}$ abbastanza piccolo la continuità in s e la compattezza di X assicurano che gli stessi insiemi H_i, C_i, D_i sono valevoli con la proprietà assegnata nella dimostrazione del teorema 2. Inoltre ancora per ϵ abbastanza piccola gli stessi raffinamenti $\alpha, \beta, \eta, \pi, \rho, \nu, \mu, \delta$ possono essere usati indipendentemente da s . Conseguentemente $M, L, O, {}^1O, {}_2O$ e O^* sono insensibili alla variazione di s in $I(s_0)$. Allora $\bigwedge[h(\cdot, s), q_r^{-1}G]$ è indipendente da s in $I(s_0)$ perché questo è l'indice calcolato per il complesso finito fisso, r , e per O fissato ed è invariante per omotopia perché nessun punto unito appare sul contorno di O [3, p. 501]. Perché $\bigwedge(h(\cdot, s), G) = \bigwedge(h_r(\cdot, s), q_r^{-1}G)$ per $\rho > \rho_0$ l'osservazione del lemma vale per $I(s_0)$. La compattezza e connessione dell'intervallo chiuso assicura che un numero finito di intervalli $I(s_i \mid i=1, \dots, N)$ sovrappongendosi parzialmente, almeno in coppie, ricoprono l'intervallo $[0, 1]$ e per ciascuno l'indice è costante.

LEMMA 20. — Supponiamo che f non abbia alcun punto unito su \dot{O} , allora per un opportuno β_0 se fx e gx sono nello stesso insieme di β , $\beta_0 < \beta$ per ogni $x \in \bar{O}$ [I, lemma o] allora $\bigwedge(f, O) = \bigwedge(g, O)$.

Scegliamo α tale che $\text{St}^2(a_i, \alpha)$ e fa_i sono disgiunti per $a_i \cap \dot{O} \neq \Phi$.

Scegliamo $\alpha < \beta$. Allora per $x \in \bar{O}$, definiamo $h(x, s)$ di essere il punto con parametro s sul cammino unico [I, lemma o] che unisce fx e gx . Allora $h(x, s) \in a_i \supset b_j \supset gx \cup fx$ e se $x \in a_i$, $a_i \cap \dot{O} \neq \Phi$, allora $a_i \cap a_i = \Phi$ o non

vi sono punti uniti su \dot{O} . Abbiamo $f|_{\bar{O}} \simeq g|_{\bar{O}}$ considerati su \bar{O} a X . Dal teorema di Borsuk-Dowker [4] c'è un'estensione di $g|_{\bar{O}}$ a $g: X \rightarrow X$ con $f \simeq g$. Quindi dal Lemma 19, $\wedge(f, O) = \wedge(g, O)$. Scegliamo G tale che $\bar{O} - G$ non ha punti uniti di g e tale che $G \subset \bar{G} \subset O$. Allora $\wedge(g, G) = \wedge(g, O)$ dal Lemma 17 e analogamente $\wedge(g_r, G) = \wedge(g_r, O)$. Abbiamo $\wedge(g, G) = \wedge(g_r, G_r)$ dove ρ può essere richiesto di soddisfare $St^3(G, \rho) \subset O$. Notiamo che $g_r = g_r$ su $St^2(G_r, r)$ e che la definizione della approssimazione simpliciale di g_r su G_r è determinata completamente dai valori di g_r su $St(G_r, r)$. Segue dalla regola (A) o (A') di [1] che $\wedge(g_r, G_r) = \wedge(g_r, G_r) = \wedge(g, O)$.

Leray ha definito un indice per gli spazi convessoidi [5]. Sembra plausibile che il nostro indice è lo stesso di quello di Leray per gli spazi per cui entrambi sono definiti. Uno spazio è convessoide se esso è compatto, connesso e ammette un ricoprimento chiuso $\sqcup = \{\sqcup_i\}$ che soddisfa

(a) \sqcup è chiuso e semplice, cioè aciclica per i gruppi di omologia di Alexander-Cech;

(b) $\cap_{i=1}^N \sqcup_i \in \sqcup$.

(c) Per ogni intorno Vx di un punto arbitrario x c'è una collezione finita $\{\sqcup_i : i = 1, \dots, N\}$ per cui x è un punto interno di $\sqcup_{i=1}^N \sqcup_i \subset Vx$.

Non so se ogni ANR sia convessoide, ma le categorie non sono equivalenti. Cfr. teorema 4.

TEOREMA 4. - *Gli spazi convessoidi includono spazi che non sono del tipo di un ANR.*

Un sottoinsieme compatto convesso di uno spazio topologico localmente convesso lineare è convessoide. Un caso particolare è la sfera solida unitaria S di uno spazio riflessivo di Banach considerato nella topologia debole. Invece è ben conosciuto [6] che per E uno spazio di Hilbert con base vettoriale di dimensione \aleph , un omeomorfo della sfera S in un opportuno P non è un'applicazione di nessun insieme aperto in P e perciò non è un ANR. Perché la proprietà convessoide è invariante rispetto a omeomorfismi, abbiamo stabilito il teorema.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] D. G. BOURGIN, *Un indice dei Punti Uniti*, I, « Rend. Lincei », vol. XIX, pp. 435-40.
- [2] S. LEFSCHETZ, *Algebraic Topology*, « Amer. Math. Soc. Colloquium Publications », vol. 27 (1942).
- [3] B. O'NEILL, *Essential Sets and Fixed Points*, « Am. Journ. of. Math », (75), pp. 497-509 (1953).
- [4] C. H. DOWKER, *Mapping Theorems for Non-Compact Spaces*, « Am. Journ. of Math. », 69, pp. 200-242 (1947).
- [5] J. LERAY, *Sur la position d'un ensemble ferme de points d'un espace topologique*, « J. Math. Pures Appl. » (9), vol. 24, pp. 201-248 (1945).
- [6] E. MICHAEL, *Some extension Theorems for Continuous Functions*, « Pac. Journ. of Math. » (3), pp. 769-805 (1953).

Elastostatica. — *Effetti flessionali di carichi sui bordi trasversali di volte cilindriche circolari* (*). Nota di MARIA JOSEPHA DE SCHWARZ, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. Si consideri una volta cilindrica circolare di spessore uniforme h , la cui superficie mediana di raggio di curvatura a (costante) sia riferita alle coordinate x ($0 \leq x \leq L$) e ψ ($\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2$). Per volte intendiamo anche tubi e serbatoi, cioè volte chiuse aventi l'asse in posizione orizzontale risp. verticale. Sia g il carico per unità di area dovuto al peso proprio e E il modulo di Young del materiale. Il modulo di Poisson verrà trascurato, come è lecito per il cemento armato.

Nello stato d'equilibrio i momenti (per unità di lunghezza) G_1, G_2, H_{12}, H_{21} , gli sforzi (per unità di lunghezza) $T_1, T_2, S_{12}, S_{21}, Q_1, Q_2$ e gli spostamenti u, v, w ⁽¹⁾ — insieme di grandezze che chiameremo $\underline{\xi}$, intendendo con $\underline{\xi}$ una generica fra tali grandezze — devono soddisfare ad un ben noto sistema di equazioni lineari a derivate parziali. Per la presenza delle componenti X, Y, Z del carico superficiale questo sistema è non omogeneo. Si presenta dunque il problema seguente: aggiungere ad una soluzione $\underline{\xi}^0$ del sistema non omogeneo una soluzione $\underline{\xi}''$ del sistema omogeneo corrispondente tale che

$$(1) \quad \underline{\xi}(x, \psi) = \underline{\xi}^0(x, \psi) + \underline{\xi}''(x, \psi)$$

soddisfi a certe condizioni sui bordi trasversali ($x = 0$ e $x = L$) ⁽²⁾.

Rinunciando — secondo l'uso comune — a considerare gli effetti flessionali dovuti alla distribuzione di carichi superficiali ⁽³⁾ si sceglie per $\underline{\xi}^0$ una « soluzione a membrana », cioè una soluzione di un sistema semplificato che risulta da quello completo, se non vi si tiene conto della rigidità flessionale.

Ne segue anzi tutto

$$(2) \quad G_1^0 = G_2^0 = H_{12}^0 = H_{21}^0 = Q_1^0 = Q_2^0 = 0 \quad S_{12}^0 = S_{21}^0 = S^0.$$

Inoltre, se X, Y, Z si assumono nella forma

$$(3) \quad X = 0, \quad Y = K_1 \sin m\psi, \quad Z = K_2 \cos m\psi + K_3 x + K_4$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Roma.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) Per definizioni più precise e altri dettagli cfr: *Calcolo delle volte cilindriche circolari sottili* (Manuali per applicazioni tecniche del calcolo, 3, Ed. Perella, di prossima pubblicazione).

(2) Ciò che si può esprimere anche così: il carico $\underline{\xi}^0(0, \psi)$ sul bordo $x = 0$, ad esempio, dà luogo a effetti flessionali $\underline{\xi}''(x, \psi)$ da determinarsi in modo che essi compensino il carico sul bordo stesso.

(3) Cfr. K. GIRKMANN, *Flächentragwerke*, 3ª ed. Wien, Springer, 1954, in particolare p. 466.

(m intero, K_1, K_2, K_3, K_4 costanti) si hanno, posto $D = Eh$,

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \left\{ \begin{aligned}
 T_1^0 &= \left\{ -\frac{m}{2a} (K_1 + K_2 m) x (L - x) + \left(-k_2 \frac{m}{a} x + k_2 \right) \right\} \cos m\psi + \bar{k}_2 \\
 T_2^0 &= -a (K_2 \cos m\psi + K_3 x + K_4) \\
 S^0 &= \left[(K_1 + K_2 m) \left(\frac{L}{2} - x \right) + k_1 \right] \sin m\psi + \bar{k}_1 \\
 u^0 &= \left\{ \frac{m}{6aD} (K_1 + K_2 m) \left(x - \frac{L}{2} \right) \left[\left(x - \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{3}{4} L^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{D} \left[-k_1 \frac{m}{2a} x^2 + k_2 \left(x - \frac{L}{2} \right) + k_3 \right] \right\} \cos m\psi + \frac{1}{D} (\bar{k}_2 x + \bar{k}_3) \\
 v^0 &= \left\{ \frac{1}{D} (K_1 + K_2 m) x (L - x) \left[1 + m^2 \frac{\frac{5}{4} L^2 - \left(x - \frac{L}{2} \right)^2}{24 a^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{D} \left[-k_1 \left(\frac{m^2}{6} \frac{x^2}{a^2} - 2 \right) x + k_2 \frac{m}{2} \frac{x}{a} (x - L) + k_3 m \frac{x}{a} + k_4 \right] \right\} \sin m\psi \\
 &\quad + \frac{1}{D} (2 \bar{k}_1 x + \bar{k}_4) \\
 w^0 &= \left\{ -\frac{a^2}{D} K_2 - \frac{m}{D} (K_1 + K_2 m) x (L - x) \left[1 + m^2 \frac{\frac{5}{4} L^2 - \left(x - \frac{L}{2} \right)^2}{24 a^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m}{D} \left[-k_1 \left(\frac{m^2}{6} \frac{x^2}{a^2} - 2 \right) x + k_2 \frac{m}{2} \frac{x}{a} (x - L) + k_3 m \frac{x}{a} + k_4 \right] \right\} \cos m\psi \\
 &\quad - \frac{a^2}{D} (K_3 x + K_4)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

con costanti arbitrarie $k_1, k_2, k_3, k_4, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4$.

Si userà dunque come soluzione \mathfrak{S}^0 l'insieme delle grandezze espresse dalle (2) e (4) aggiungendovi per comodità ancora

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{\partial w^0}{\partial \bar{x}} &= \left\{ \frac{2am}{D} (K_1 + K_2 m) \left(x - \frac{L}{2} \right) \left[1 + m^2 \frac{\frac{3}{4} L^2 - \left(x - \frac{L}{2} \right)^2}{12 a^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m}{D} \left[-a k_1 \left(\frac{m^2}{2} \frac{x^2}{a^2} - 2 \right) + k_2 m \left(x - \frac{L}{2} \right) + k_3 m \right] \right\} \cos m\psi - \frac{a^3}{D} K_3 \quad \left(\bar{x} = \frac{x}{a} \right).
 \end{aligned}$$

2. Siccome le condizioni sui bordi si presentano nella forma

$$(6) \quad \mathfrak{E}^0(0, \psi) + \mathfrak{E}''(0, \psi) = 0, \quad \mathfrak{E}^0(L, \psi) + \mathfrak{E}''(L, \psi) = 0,$$

è chiaro che conviene cercare $\mathfrak{E}''(x, \psi)$ nella forma

$$\mathfrak{E}''(x, \psi) = \mathfrak{E}_m''(x) \cdot \begin{cases} \cos m\psi \\ \sin m\psi, \end{cases}$$

ove, come risulta da ragioni di simmetria, sta $\cos m\psi$ nelle grandezze

$$(7) \quad G_1'', G_2'', T_1'', T_2'', Q_1'', u'', w'', \frac{\partial w''}{\partial \bar{x}}$$

e $\sin m\psi$ nelle grandezze

$$(8) \quad H_{12}'', H_{21}'', S_{12}'', S_{21}'', Q_2'', v''.$$

Essendo w lo spostamento nel senso radiale si trova, percorrendo in un modo opportuno il sistema omogeneo menzionato al n. 1, che tutte le $\mathcal{E}''_m(x)$ si possono esprimere come combinazioni con coefficienti costanti di $w''_m(x)$ e delle sue derivate fino alla settima, mentre per $w''_m(x)$ si trova una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di ottavo ordine.

Soltanto per $m=0$ e per $m=1$ l'ordine delle derivate di $w''_m(x)$ nelle espressioni per le $\mathcal{E}''_m(x)$ si riduce al terzo, mentre l'equazione differenziale per $w''_m(x)$ diventa del quarto ordine. Ci limiteremo a questo caso ⁽⁴⁾, ciò che da un lato permette di scrivere semplici formule esplicite e dall'altro lato basta per trattare gli esempi pratici più importanti.

Si ha allora

$$(9) \quad \mathcal{E}''(x, \psi) = \left[(c_{1m} A_{1m} + c_{2m} A_{2m}) \Phi_m^*(\bar{x}) + (-c_{2m} A_{1m} + c_{1m} A_{2m}) \Psi_m^*(\bar{x}) \right. \\ \left. - (c_{1m} \hat{A}_{1m} + c_{2m} \hat{A}_{2m}) \Phi_m^*\left(\frac{L}{a} - \bar{x}\right) \right. \\ \left. \pm (-c_{2m} \hat{A}_{1m} + c_{1m} \hat{A}_{2m}) \Psi_m^*\left(\frac{L}{a} - \bar{x}\right) \right] \cdot \begin{vmatrix} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{vmatrix} \left(\bar{x} = \frac{x}{a}; m=0, 1 \right)$$

ove fra i segni alternativi si sceglie $+$ o $-$, secondoché \mathcal{E}'' è fra le grandezze $G''_1, G''_2, T''_1, T''_2, Q''_2, v'', w''$ o fra le $H''_{12}, H''_{21}, S''_{12}, S''_{21}, u'', \frac{\partial w''}{\partial x}$.

$\Phi_m^*(\bar{x}), \Psi_m^*(\bar{x})$ sono definite mediante

$$(10) \quad \Phi_m^*(\bar{x}) = e^{-\alpha_m \bar{x}} \cos \beta_m \bar{x}, \quad \Psi_m^*(\bar{x}) = e^{-\alpha_m \bar{x}} \sin \beta_m \bar{x}$$

con

$$(11) \quad \alpha_0 = \beta_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{1 + 12 \frac{a^2}{h^2}}}, \\ \alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{3 + 12 \frac{a^2}{h^2}} + 1}, \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{3 + 12 \frac{a^2}{h^2}} - 1}.$$

I coefficienti c_{1m}, c_{2m} , che ovviamente variano da una grandezza \mathcal{E}'' all'altra, si trovano raccolti nella Tavola che riportiamo più avanti. Essi sono definiti in modo da avere $A_{1m}, \dots, \hat{A}_{2m}$ adimensionali e dipendono, astrazione fatta da un fattore comune messo in evidenza, solo dal rapporto a/h .

3. La semplificazione che avviene nella formulazione di $\mathcal{E}''(x, \psi)$ per $m=0$ e $m=1$ ha però come conseguenza che, se si vuole soddisfare — come è possibile — a complessivamente otto condizioni della forma (6) — quattro per ciascun bordo —, bisogna ricorrere oltre alle costanti $A_{1m}, A_{2m}, \hat{A}_{1m}, \hat{A}_{2m}$ della (9) anche alle costanti $k_1, k_2, k_3, k_4, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4$ contenute nella soluzione a membrana, la quale per questa ragione è stata data in una forma piuttosto generale.

(4) Per $m > 1$ cfr. ad esempio: A. AAS JAKOBSEN, *Ueber das Randstörungsproblem an Kreiszyinderschalen*, Bauing. 20, pp. 394-405 (1939); R. OHLIG, *Räumliche Tragwerke des Stahlbetonbehälterbaues*, Beton- und Stahlbetonbau 48, pp. 233-243 (1953).

TAVOLA.

Coefficienti $c_{1m} = (1\ m) \cdot F$, $c_{2m} = (2\ m) \cdot F$.

\mathcal{E}''	$m = 0$		$m = 1$		F
	(10)	(20)	(11)	(21)	
G_1''	0	$-2\alpha_0^2$	2	$-2\alpha_1\beta_1$	ga^2
G_2''	1	0	0	0	»
$H_{12}'' = H_{21}''$	— (*)	—	α_1	$-\beta_1$	»
T_1''	0	0	2	$-2\alpha_1\beta_1$	ga
T_2''	$1 + 12\frac{a^2}{h^2}$	0	$-1 + 12\frac{a^2}{h^2}$	$4\alpha_1\beta_1$	»
S_{12}''	—	—	$-2\alpha_1\left(\beta_1^2 - \frac{1}{2}\right)$	$-2\beta_1\left(\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\right)$	»
S_{21}''	—	—	$-2\alpha_1(\beta_1^2 - 1)$	$-2\beta_1(\alpha_1^2 + 1)$	»
Q_1''	$2\alpha_0^3$	$2\alpha_0^3$	$2\alpha_1\left(\beta_1^2 - \frac{1}{2}\right)$	$2\beta_1\left(\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\right)$	»
Q_2''	—	—	— 2	$2\alpha_1\beta_1$	»
u''	$-\frac{a}{h}\alpha_0$	$\frac{a}{h}\alpha_0$	$-2\frac{a}{h}\alpha_1$	$2\frac{a}{h}\beta_1$	$\frac{ga}{E}$
v''	—	—	$-\frac{a}{h}$	$4\frac{a}{h}\alpha_1\beta_1$	»
w''	$12\left(\frac{a}{h}\right)^3$	0	$12\left(\frac{a}{h}\right)^3$	0	»
$\frac{\partial w''}{\partial \bar{x}}$	$-12\left(\frac{a}{h}\right)^3\alpha_0$	$-12\left(\frac{a}{h}\right)^3\alpha_0$	$-12\left(\frac{a}{h}\right)^3\alpha_1$	$12\left(\frac{a}{h}\right)^3\beta_1$	»

(*) I coefficienti c_{10}, c_{20} attinenti alle grandezze (8) non vengono riportati, poiché risultano moltiplicati per $\sin m\psi = 0$.

Nei più dei casi si pongono condizioni uguali sui due bordi trasversali. Si ha allora per ragioni di simmetria

$$A_{1m} = \hat{A}_{1m} \quad A_{2m} = \hat{A}_{2m} \quad k_1 = k_3 = \bar{k}_1 = \bar{k}_3 = 0.$$

Inoltre in pratica $\Phi_m^*\left(\frac{L}{a} - \bar{x}\right)$, $\Psi_m^*\left(\frac{L}{a} - \bar{x}\right)$ riescono trascurabili per $\bar{x} = x = 0$ e addirittura per $\bar{x} < L/2a$. Allora la (9) può essere sostituita con

$$(12) \quad \mathcal{E}''(x, \psi) = [(c_{1m} A_{1m} + c_{2m} A_{2m}) \Phi_m^*(\bar{x}) + (-c_{2m} A_{1m} + c_{1m} A_{2m}) \Psi_m^*(\bar{x})] \cdot \begin{cases} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{cases}$$

avendo sul bordo $x = 0$, per le (10),

$$(13) \quad \mathcal{E}''(0, \psi) = (c_{1m} A_{1m} + c_{2m} A_{2m}) \cdot \begin{cases} \cos m\psi \\ \sin m\psi \end{cases}.$$

Le condizioni più comuni sui bordi trasversali sono quelle dell'appoggio

$$(14) \quad G_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

o quelle dell'incastro

$$(15) \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Se si ha nelle (3)

$$(16) \quad K_1 = K_2 = g, \quad K_3 = K_4 = 0, \quad m = 1$$

(caso del peso proprio) segue oltre a $\bar{k}_2 = \bar{k}_4 = 0$ dalle (14)

$$(17) \quad A_{11} = \frac{1}{3 \left(1 + 4 \frac{a^2}{h^2} \right)}, \quad A_{21} = \frac{1}{\alpha_1 \beta_1} \frac{1}{3 \left(1 + 4 \frac{a^2}{h^2} \right)},$$

$$k_2 = 0, \quad k_4 = - \frac{g a^2}{1 + 4 \frac{a^2}{h^2}}$$

e dalle (15)

$$(18) \quad A_{11} = \frac{1}{\Delta} \left(-4 \alpha_1 \frac{L}{a} + 1 + 6 \frac{a^2}{h^2} \right), \quad A_{21} = \frac{1}{\beta_1 \Delta} \left[\alpha_1 \left(1 + 6 \frac{a^2}{h^2} \right) + \frac{L}{a} \left(12 \frac{a^2}{h^2} - 1 \right) \right]$$

$$k_2 = \left(\frac{1}{6} \frac{L^2}{a^2} + \frac{4}{1 + 6 \frac{a^2}{h^2}} \right) g a, \quad k_4 = \left[12 \frac{a^2}{h^2} \frac{1}{\Delta} \left(-4 \alpha_1 \frac{L}{a} + 1 + 6 \frac{a^2}{h^2} \right) - 1 \right] g a^2$$

$$\text{con } \Delta = \left(1 + 6 \frac{a^2}{h^2} \right) 4 \alpha_1^2 (\beta_1^2 + 1).$$

Con le costanti (17) e (18) ed i coefficienti della Tavola di p. 52, tenuto conto delle (1), (2), (4), (9) è possibile calcolare tutte le grandezze $\mathcal{E}(x, \psi)$.

Per le volte aperte, aventi cioè bordi longitudinali $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$ ($-\pi < \psi_1 < \psi_2 < \pi$), si impongono però anche delle condizioni su tali bordi, alle quali la soluzione (1), determinata al modo descritto, in generale non soddisfarà. Bisogna allora sostituire la (1) con

$$\underline{\mathcal{E}}(x, \psi) = \mathcal{E}^0(x, \psi) + \underline{\mathcal{E}}'(x, \psi) + \mathcal{E}''(x, \psi),$$

ove $\underline{\mathcal{E}}'(x, \psi)$ è la soluzione flessionale longitudinale adatta a compensare i carichi sui bordi longitudinali.

Per una vasta categoria di volte⁽⁵⁾ però la $\underline{\mathcal{E}}'(x, \psi)$ si smorza rapidamente a partire dai bordi longitudinali, cosicché per la più grande porzione dei bordi trasversali le condizioni (6) rimarranno soddisfatte. Fortunatamente sono

(5) E precisamente per le volte che si avvicinano al tipo II individuato nel Manuale cit. (1) dietro l'esempio di A. AAS JAKOBSEN op. cit. (4).

proprio tali volte quelle per le quali maggiormente interessa il calcolo della soluzione flessionale trasversale, mentre per le volte di altro tipo l'influenza dei bordi trasversali è piuttosto irrilevante.

Vale la pena osservare che si ottengono valori di A_{11} , A_{21} molto simili a quelli espressi nelle (17) e (18), se poniamo

$$(19) \quad k_2 = k_4 = 0$$

e conserviamo delle condizioni (14) soltanto la prima, seconda e quarta, risp. delle (15) soltanto la terza e la quarta. Troviamo allora nel caso dell'appoggio

$$A_{11} = \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} \quad A_{21} = \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} \frac{1}{\alpha_1 \beta_1}$$

e nel caso dell'incastro

$$A_{11} = \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} \quad A_{21} = \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{L}{a} \left(2 + \frac{1}{12} \frac{L^2}{a^2} \right) + \alpha_1 \right].$$

Si constata che tali valori sono poco discosti da quelli corrispondenti nelle (17) e (18), se h/a è molto piccolo, come avviene praticamente in tutte le volte aperte, e anche L/a è così piccolo da avere

$$(20) \quad \frac{L}{a} \left(2 + \frac{1}{12} \frac{L^2}{a^2} \right) \ll \alpha_1,$$

come avviene per la categoria di volte sumenzionata. Questa osservazione è importante, poiché sovente la soluzione flessionale longitudinale viene calcolata in un primo tempo usando la soluzione a membrana con le costanti (19), cosicché per il calcolo della soluzione flessionale trasversale le costanti k_2 e k_4 non sono più disponibili.

Ponendo approssimativamente (cfr. le (11))

$$\alpha_1 \sim \beta_1 \sim \alpha_0 \sim 1,316 \sqrt{\frac{a}{h}}$$

e tenuto conto della (20) si trovano infine i seguenti valori approssimati

$$A_{11} = \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} \quad A_{21} = 0,04812 \frac{h^3}{a^3}$$

per l'appoggio e

$$A_{11} = A_{21} = \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2}$$

per l'incastro, che permettono, inseriti nella (12), insieme ai coefficienti della Tavola di p. 52 di determinare molto facilmente la soluzione flessionale trasversale nelle volte.

4. Per un tubo pieno di liquido il carico superficiale complessivo ha le componenti ⁽⁶⁾.

$$(21) \quad X = 0 \quad Y = g \sin \psi \quad Z = (g + \gamma_l a) \cos \psi - \gamma_l H,$$

(6) Cfr. op. cit. ⁽³⁾ pp. 456-461.

essendo γ_l il peso specifico del liquido e H l'altezza piezometrica relativa all'asse del tubo. Pensando decomposta la componente Z in tre addendi abbiamo dunque da considerare oltre al caso caratterizzato dalle (16) ancora i casi ove

$$K_1 = 0 \quad , \quad K_2 = \gamma_l a \quad , \quad K_3 = K_4 = 0 \quad , \quad m = 1$$

rispettivamente

$$K_1 = K_2 = K_3 = 0 \quad , \quad K_4 = -\gamma_l H \quad (m = 0).$$

Per i risultati finali attinenti al carico superficiale (21) ci riferiamo alle apposite Tavole del Manuale citato nella nota ⁽¹⁾.

Per un serbatoio pieno di liquido, invece, il carico superficiale si specifica ponendo

$$K_1 = K_2 = 0 \quad , \quad K_3 = \gamma_l \quad , \quad K_4 = -\gamma_l L.$$

Si pongono inoltre $m = k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Le condizioni al bordo $x = 0$ e al bordo $x = L$ saranno però ora generalmente diversi fra di loro; ma dato che $\Phi_0^*(L/a)$, $\Psi_0^*(L/a)$ saranno, nei casi pratici, trascurabili, segue dalle (9) e (10)

$$\mathfrak{E}''(0, \psi) = \begin{cases} \epsilon_{10} A_{10} + \epsilon_{20} A_{20} & \text{per le grandezze (7)} \\ 0 & \text{per le grandezze (8)} \end{cases}$$

$$\mathfrak{E}''(L, \psi) = \begin{cases} \epsilon_{10} \hat{A}_{10} + \epsilon_{20} \hat{A}_{20} & \text{per le grandezze (7)} \\ 0 & \text{per le grandezze (8)}. \end{cases}$$

Se ad esempio si assumono per il bordo $x = 0$ le condizioni dell'incastrò (15) e per $x = L$ le condizioni

$$G_1 = 0 \quad T_1 = 0 \quad S_{12} = 0 \quad Q_1 = 0$$

del bordo libero, seguono, tenuto conto delle (2), (4) e della Tavola a p. 52,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{10} = \hat{A}_{20} = \bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \bar{k}_4 = 0 \quad \bar{k}_3 = -\frac{1}{12} \gamma_l h^2 a \\ A_{10} = -\frac{1}{12} \frac{\gamma_l L}{g} \frac{h^2}{a^2} \quad A_{20} = \frac{1}{12} \frac{\gamma_l L}{g} \frac{h^2}{a^2} \left(\frac{1}{\alpha_0} \frac{a}{L} - 1 \right) \end{aligned}$$

e perciò

$$G_1 = \frac{1}{6} \alpha_0^2 \left[\left(1 - \frac{1}{\alpha_0} \frac{a}{L} \right) \Phi_0^*(\bar{x}) - \Psi_0^*(\bar{x}) \right] \gamma_l L h^2$$

$$T_1 = S_{12} = 0$$

$$T_2 = \gamma_l a^2 \left(\frac{L}{a} - \bar{x} \right) - \gamma_l L a \left(1 + \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} \right) \left[\Phi_0^*(\bar{x}) + \left(1 - \frac{1}{\alpha_0} \frac{a}{L} \right) \Psi_0^*(\bar{x}) \right]$$

$$Q_1 = \frac{1}{6} \gamma_l h^2 \alpha_0^2 \left[\left(1 - 2 \frac{L}{a} \alpha_0 \right) \Phi_0^*(\bar{x}) + \Psi_0^*(\bar{x}) \right]$$

per $0 \leq \bar{x} \leq \frac{L}{a}$.

Cosmogonia. — *Funzioni prive di estremanti in moti di sistemi binari di massa variabile.* Nota di E. L. MARTIN, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. In una Nota recente ⁽¹⁾ ho ricavato la equazione, in coordinate polari r e ϑ , delle traiettorie reali di un punto materiale mobile rispetto ad altro supposto fisso e costituente col primo un sistema di massa variabile, funzione non nota del tempo, indicata con la espressione generica $m = m(t)$, imponendo soltanto la condizione generale:

$$(1) \quad \vartheta(t) - \omega(t) = v = \text{cost.}$$

ove, come di consueto, sulla conica di eccentricità $e = e(t)$ osculatrice nell'istante t alla traiettoria reale, $\omega(t)$ indica l'anomalia periastra della osculatrice stessa e v la cosiddetta anomalia vera del mobile su di essa. Da un sistema costituito da quattro equazioni lineari di cui due differenziali del primo ordine e due in termini finiti, sistema coinvolgente, oltre la costante v , le cinque variabili r , ϑ , ω e m (queste due ultime comparenti anche nel loro prodotto em), tramite eliminazione delle ultime tre e due integrazioni, sono giunto, nel caso generale di v qualunque, escludente i due particolari per cui $\sin v = 0$ (orbita circolare, massa $m = \text{cost.}$, cfr. loc. cit. terzo esempio) e $\cos v = 0$ (spirale iperbolica, $em = e_0 m_0 = \text{cost.}$, cfr. loc. cit. secondo esempio) alla forma:

$$(2) \quad \frac{1}{r} \cos v + e_0 m_0 \sin^2 v b^{\cotg v (\vartheta - \vartheta_0)} = m_0 (e_0 + \cos v)$$

con ovvio significato dei simboli $e_0 m_0 \vartheta_0$ e dove, per distinguerla da e (eccentricità), la lettera b rappresenta la base dei logaritmi naturali.

Alla (2) si può dare altra forma sostituendo alla costante d'integrazione e_0 la r_0 mediante la relazione:

$$(3) \quad \frac{1}{r_0} = m_0 + m_0 e_0 \cos v$$

immediatamente deducibile dalla equazione della conica osculatrice:

$$(4) \quad \frac{1}{r} = m (1 + e \cos v)$$

ove, supposte eguali ad uno la costante attrattiva e quella delle aree, è insita la $mp = 1$. Si ottiene:

$$(5) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \left(\frac{1}{r_0} - m_0 \right) \text{tg}^2 v [1 - b^{\cotg v (\vartheta - \vartheta_0)}]$$

che si può ricavare anche direttamente in altro modo che, per brevità, ometto.

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) Cfr. E. L. MARTIN, *Orbite anapsidali in sistemi binari di massa variabile*, in « Rend. Lincei », vol. XIX (1955), pp. 449-52.

2. Premesso quanto sopra, indaghiamo ora sulle leggi di massa variabile conseguenti alla condizione (1). Della Nota citata farò uso delle formule che qui di seguito riporto, aggiungendo per em ed $1/r$ anche le espressioni in cui compare r_0 in luogo di e_0 :

$$(6) \quad d(em) = -\cos v \, dm$$

$$(7) \quad em = m_0(e_0 + \cos v) - m \cos v = \left[\left(\frac{1}{r_0} - m_0 \right) / \cos v \right] - (m - m_0) \cos v > 0$$

$$(8) \quad \frac{1}{r} = m_0 \cos v (e_0 + \cos v) + m \sin^2 v = \frac{1}{r_0} + (m - m_0) \sin^2 v > 0$$

$$(9) \quad med \, \omega = -\sin v \, dm.$$

Dalla coppia (6) e (9) dell'Armellini ⁽²⁾, si ha tosto la relazione generale già da me altra volta ricavata:

$$(10) \quad d \log(em) = \cotg v \, dm.$$

Per la (1) si ha $d\omega = d\vartheta$ per cui la (9) tenuto conto della prima forma della (7) ed introducendo il dt dà tosto:

$$(11) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{-\sin v}{m_0(e_0 + \cos v) - m \cos v} \frac{dm}{dt}.$$

D'altra parte per la legge delle aree $r^2 \dot{\vartheta} = 1$ e per la (8) si ottiene:

$$(12) \quad \frac{d\vartheta}{dt} = [m_0 \cos v (e_0 + \cos v) + m \sin^2 v]^2.$$

Dalla coppia (11) e (12) si ha quindi:

$$(13) \quad \frac{-\sin v \, dm}{[m_0(e_0 + \cos v) - m \cos v] [m_0 \cos v (e_0 + \cos v) + m \sin^2 v]^2} = dt.$$

La (13) è la equazione differenziale generale delle ricercate leggi di massa $m = m(t)$ quando valga la $v = \text{cost.}$

Altra forma che qui non riporto, con r_0 anziché e_0 , si ottiene facendo uso delle seconde forme della (7) e della (8).

Vediamo ora, anche a scopo di controllo, di saggiare la equazione trovata attraverso esempi.

Naturalmente la (13) cade in difetto per $\sin v = 0$, $\cos v = \pm 1$ (cfr. loc. cit. terzo esempio) allorché, com'è noto e come si può elementarmente ricavare di nuovo, per esempio direttamente dalla (9), l'orbita è circolare e la massa $m = \text{cost.}$

(2) Cfr. G. ARMELLINI, *Sopra le variazioni dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili*, in « Rend. Lincei », 1926, sem. II.

Per $\cos v = 0$, $\sin v = \pm 1$ (cfr. loc. cit. secondo esempio, spirale iperbolica, $em = e_0 m_0 = \text{cost.}$) la (13) diviene $\mp dm/e_0 m_0 m^2 = dt$ la quale integrata e posto $\alpha = (1/m_0) \pm e_0 m_0 t_0$, $\gamma = \mp e_0 m_0$ dà la nota forma $m = [\alpha + \gamma t]^{-1}$ la quale rappresenta il primo caso del Mestschersky⁽³⁾ il quale a sua volta rientra nel secondo caso $m = [\alpha + \beta t + \gamma t^2]^{-1/2}$ dello stesso autore per $\beta = 2\alpha\gamma$.

Per $e + \cos v = 0$ (cfr. loc. cit. primo esempio, spirale logaritmica, $e = e_0 = -\cos v = \text{cost.}$) la (13) diventa $dm/m^3 = \sin^3 v \cos v dt$ la quale integrata e posto $\alpha = (1/m_0^2) + 2 t_0 \sin^3 v \cos v$, $\beta = -2 \sin^3 v \cos v$ ci dà $m = [\alpha + \beta t]^{-1/2}$ che rientra pure nella espressione precedente per $\gamma = 0$.

I tre esempi considerati consentono quindi di esprimere la massa $m = m(t)$ in forma esplicita del tempo t .

3. Consideriamo ora il caso generale di v qualunque, con esclusione dei tre esempi di cui sopra, e per il quale quindi si abbia sempre $\sin v \neq 0$; $\cos v \neq 0$; $e + \cos v \neq 0$. Seguendo notissimi procedimenti, tralasciando i particolari di calcolo, tenendo conto delle disequaglianze (7) ed (8) per la realtà dei logaritmi da introdursi e ponendo infine per brevità:

$$(14) \quad m_0(e_0 + \cos v) = h$$

la integrazione della (13) dà:

$$(15) \quad \frac{\sin v}{h} \left[\frac{\cos v}{h} \log \frac{h - m \cos v}{h \cos v + m \sin^2 v} + \frac{1}{h \cos v + m \sin^2 v} \right]_{m_0}^m = t - t_0.$$

La (15) è la equazione in termini finiti fra m e t nel caso generale di $v = \text{cost.}$

Ripristinando per la h la espressione (14) e introducendo la indicata limitazione per m_0 , o valendosi eventualmente della (3) per sostituire ad e_0 la r_0 , od ancora servendosi di entrambe tali costanti, si possono ottenere per il primo membro della (15) varie, più o meno indicative espressioni, che per brevità qui ometto di riportare. Preme rilevare piuttosto che la (1) definisce interamente la $m = m(t)$ tosto che siano fissate le costanti di integrazione.

4. Sarà utile considerare invece altre relazioni caratteristiche dei moti legati alla (1) $v = \text{cost.}$ per i quali, quando occorra, ricorderemo ancora che vale la $d\omega = d\vartheta$.

Dalla (6) si ha facilmente $m de = -[e + \cos v] dm$ e per la (7) essendo $m(e + \cos v) = m_0(e_0 + \cos v) = \text{cost.}$ si ha $m^2 de = -m_0[e_0 + \cos v] dm$ e quindi la $e = e(m)$:

$$(16) \quad e = e_0 + m_0(e_0 + \cos v) \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m_0} \right].$$

(3) Cfr. « Astronomische Nachrichten », Bd. CLIX n. 3807 (1902): *Über die Integration der Bewegungsgleichungen im Probleme zweier Körper von veränderlicher Masse*, von J. MESTSCHERSKY.

Dalla (10):

$$(17) \quad em = e_0 m_0 b^{\cotg v (\vartheta - \vartheta_0)}.$$

Dalla (7) eliminando m per la (17):

$$(18) \quad \frac{e + \cos v}{e} = \frac{e_0 + \cos v}{e_0} b^{-\cotg v (\vartheta - \vartheta_0)}$$

e quindi volendo $e = e(\vartheta)$.

Dalla (7) ancora, eliminando invece em per la (17), oppure dalla (9) integrata, si ottiene:

$$(19) \quad \frac{m}{m_0} = 1 + e_0 \sec v [1 - b^{\cotg v (\vartheta - \vartheta_0)}].$$

Si può ripetere per la funzione $m(\vartheta)$ ed aggiungere per le altre $em(\vartheta)$ e $e(m)$ e quindi $e(\vartheta)$, che alle condizioni indicate alla fine del numero precedente, la (1) le definisce interamente.

5. Osserviamo che dalla (13), tenuto conto delle disequaglianze (7) ed (8) risulta $\sin v \, dm/dt < 0$ per cui dalla (1) consegue se la $m = m(t)$ è crescente o decrescente, e ricordiamo che è $dr/dm < 0$ come si può ottenere dalla (8). Dalla (9), oppure derivando la (19), si ha $\sin v \, dm/d\vartheta < 0$ da cui si può riavere la disequaglianza precedente usando la relazione che esprime la legge delle aree. Analogamente alla em dalla (17) od alla e dalla (18) ed in generale ad una $f = f(\vartheta)$ si può applicare il notissimo procedimento che porta alla relazione $f = f'(\vartheta)/r^2$.

Soddisfatte le condizioni di realtà già considerate, preme rilevare che, in ogni caso il segno delle derivate ottenibili dipende per ciascuna di esse da quello di una o di altra funzione goniometrica della v , funzione che per la (1) non cambia il segno durante il moto. Si può precisare che per la e il segno dipende anche da quello della costante $(e + \cos v) m = (e_0 + \cos v) m_0$, ma che permanendo questo inalterato durante il moto non viene contraddetto l'asserto dipendendo inoltre esso da v una volta fissate le cosiddette condizioni di partenza. Per le quali ammessi noti opportuni valori ϑ_0, r_0, m_0 relativi ad un certo istante prefissato t_0 , del resto qualunque, la (1) ci dà tosto ω_0 e la (3) e_0 e quindi restano definite, come si è già detto, le espressioni via, via sopra ricavate.

Pertanto, tenuti presenti i casi singolari già esaminati ($e = 0$ $m = \text{cost.}$ $r = \text{cost.}$; $em = \text{cost.}$; $e = -\cos v = \text{cost.}$) ed ammesso quanto sopra, ricordando pure la $\vartheta = r^{-2}$, si può concludere, senza eccezione alcuna che:

Nel problema dei due corpi di massa variabile la condizione

$$\vartheta(t) - \omega(t) = v = \text{cost.}$$

comporta oltre che per ϑ ed ω anche per r , m , em ed e funzioni determinate prive di estremanti.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche spettrofotometriche sull'azione della colchicina su estratti proteici «in vitro»* (*). Nota di FEDERICA TREZZI e LAURA BALIN, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

Le ricerche sinora eseguite — in numero, per la verità, non troppo grande — sul meccanismo col quale la colchicina esercita la sua azione statmocinetica, concordano — genericamente — nel suggerire di valutare questa sostanza come un agente capace di perturbare, in qualche maniera, lo stato delle proteine plasmatiche destinate a costituire — o già costituenti — il fuso acromatico. I pareri sono, peraltro, assai discordanti quando si tratta di precisare come queste perturbazioni si concretino. Noi non intendiamo far qui una rassegna bibliografica completa né particolareggiata e, fra le varie opinioni espresse, ci limitiamo a ricordarne solo qualcuna: quella di chi ritiene [1] che l'azione della colchicina non sia dovuta alle sue proprietà chimiche ma piuttosto a quelle fisiche che sarebbero comparabili a quelle dei narcotici a somiglianza dei quali essa agirebbe disconnettendo, in maniera reversibile, certe funzioni vitali e, più in concreto, quelle che portano alla formazione del fuso; un'altra ipotesi [2] è quella che tende ad attribuire l'effetto della colchicina ad un mutamento ch'essa indurrebbe nelle catene polipeptidiche proteiche che, da una forma fibrosa che avevano, assumerebbero uno stato più o meno corpuscolare. V'ha chi pensa [3] che la colchicina determini la rottura di legami chimici ed una conseguente dissociazione di aggregati micellari; altri [4] ritiene che, pur non impedendo la condensazione per polimerizzazione che porta alla formazione del gele destinato a costituire il fuso acromatico, la colchicina ne ostacoli l'organizzazione bloccando l'instaurarsi di legami secondari con la conseguenza di arrestare la formazione dell'apparato mitotico alla comparsa d'un gele informe i cui elementi non potrebbero condensarsi ed orientarsi in un sistema fibroso. Ricorderemo, infine, come altri studiosi abbiano attribuito l'effetto della colchicina a fenomeni assai più generali, come, per esempio, l'inattivazione dei gruppi —SH delle proteine enzimatiche interessate nei processi biochimici che hanno luogo nel plasma costituente il fuso acromatico [5, 6, 7] o, addirittura, a variazioni di viscosità plasmatica come conseguenza di perturbazioni nello stato chimico-fisico dei colloidi plasmatici [8].

È comunque da rilevare come la colchicina non limiti i suoi effetti, in maniera specifica, ad un'azione di turbamento dell'organizzazione submicroscopica di quella porzione di plasma che partecipa ai processi mitotici, né ad una sconnessione delle successive fasi di cui tali processi risultano costituiti; giacché essa è attiva anche sulle cellule adulte il cui nucleo è allo stato

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

di riposo e nelle quali essa provoca sia dei fenomeni di alterazione plasmatica che si manifestano con un aumento della viscosità del plasma e che portano – o si accompagnano – ad un ingrandimento della cellula [9], sia delle alterazioni di vari processi biochimici e farmacologici [10, 11, 12]. Ed assai significativo è, inoltre, il fatto che, da una parte, la sensibilità alla colchicina non è la stessa in tutti gli organismi (tra quelli vegetali la sensibilità dipende sia dal gruppo sistematico che dal tipo ecologico e, nella stessa pianta, diversamente sensibili sono i tessuti appartenenti ad organi diversi); e che, dall'altra, gli stessi risultati indotti dalla colchicina possono essere ottenuti impiegando sostanze di tipo quanto mai vario. Se ne dovrebbe concludere che l'azione della colchicina non è specifica e che gli effetti ch'essa determina sono legati non tanto alla natura dello stimolo quanto alla natura del plasma ed alla capacità dei suoi costituenti di dare, a diversi stimoli, reazioni che, almeno in determinati momenti del processo e sotto determinati aspetti, sono di tipo assai simile.

Questo, appunto, ci sembra doversi porre in particolare rilievo: che cellule non più giovanili reagiscono all'azione della colchicina (e la stessa cosa è stata dimostrata anche per altre sostanze quali, ad esempio, la xantina e l'acido urico) in maniera tale che determinate manifestazioni del loro modo di reagire sono in tutto comparabili a quelle ben note che conseguono al trattamento con acido indolacetico. Tali manifestazioni sono: un forte aumento della viscosità citoplasmica rilevata col metodo del tempo e della forma di plasmolisi [9, 13, 14]; e inoltre un forte incremento nella crescita cellulare per distensione [9]. Egual rilievo mi pare meriti ancora il fatto che l'acido ascorbico (sommministrato sotto forma ridotta) è capace di opporsi all'azione della colchicina sino a quasi annullarla, sia per quanto riguarda l'aumento della viscosità citoplasmica [14, 15] sia per quanto riguarda l'aumento di volume dei nuclei in riposo, il blocco metafaseico, i fenomeni di poliploidia, l'arrestato sviluppo degli apparati stomatici, od altre conseguenze di carattere anche macroscopico (come la formazione di tumoretti agli apici radicali) [14].

Tali rilievi sembrano indicare come un certo legame possa esistere tra aumento della viscosità citoplasmica ed incrementata crescita cellulare per distensione; inoltre che sia l'acido indolacetico che la colchicina agiscono in modo tale, sulle compagini proteiche plasmatiche, da determinare degli effetti che sono di tipo opposto a quelli determinati dall'acido ascorbico (sommministrato sotto forma ridotta) e che portano a siffatte modificazioni della struttura chimico-fisica delle proteine, che il plasma cellulare assume uno stato di maggior idratazione e di più forte dispersione.

Con ciò noi intendiamo fare una semplice constatazione giacché è evidente che tutto ciò non implica affatto che colchicina ed acido indolacetico agiscano sulla cellula con egual meccanismo. Il porre un paragone tra due sostanze come l'acido indolacetico e la colchicina, che hanno effetti finali così diversi, non costituisce, in realtà, un paradosso; poiché è evidente che la prima sostanza è un ormone i cui effetti la cellula è naturalmente preparata ad equilibrare ed a contenere entro limiti fisiologici, mentre la seconda è un

tossico i cui effetti, in condizioni naturali, la cellula non può essere preparata né ad annullare né a contenere in modo tale che, se dei processi così delicati come quelli mitotici siano in corso, le conseguenze non diventino permanenti. (Ricorderemo, di passaggio, che la sensibilità alla colchicina, come anche all'acido indolacetico, sia assai maggiore nelle porzioni giovanili delle radici che, in confronto delle porzioni giovanili del fusto, sono naturalmente assai più povere di acido ascorbico [15, 16, 17]). Tuttavia, è anche evidente che alterazioni strutturali proteiche suscettibili di portare a delle conseguenze che, per talune manifestazioni concrete, appaiono coincidenti, possono essere ottenute con meccanismi anche assai diversi. Il problema, pertanto, è tale che la sua soluzione non può essere perseguita che con indagini di vario tipo e che lo considerino sotto punti di vista diversi. Con le ricerche di cui diamo relazione in questa Nota noi abbiamo inteso prender, per dir così, contatto col problema prospettandone un aspetto fondamentale dalla cui conoscenza prender le mosse per ulteriori e più particolareggiate indagini. È stato dimostrato che in tanto l'acido indolacetico e l'acido ascorbico (quest'ultimo somministrato sotto forma ridotta) sono capaci di determinare i loro effetti, in quanto sono anche capaci di legarsi alle proteine plasmatiche cosicché essi sono attivi solo se così legati e sono, invece, inattivi, se liberi; inoltre che in tanto acido indolacetico ed acido ascorbico sono capaci di interagire fra loro, in quanto fra di loro competono a livello delle proteine plasmatiche [18]. Si pone quindi il problema se, all'analogia di certi effetti provocati sulle proteine plasmatiche dall'acido indolacetico e dalla colchicina, corrisponda una analogia anche nel meccanismo d'azione delle due sostanze; un'analogia limitata, quanto meno, a questa possibilità: che sia legandosi a proteine plasmatiche che la colchicina diviene efficace; inoltre, che l'azione protettiva che l'acido ascorbico (somministrato sotto forma ridotta) assicura alla pianta nei confronti dei surricordati effetti della colchicina, sia dovuta ad un'azione protettiva che l'acido ascorbico esercita sulle proteine le quali verrebbero preservate dal legame con la colchicina.

Le indagini relative a queste questioni sono state accompagnate da altre intese a stabilire se la diversa sensibilità alla colchicina del fusto e della radice sia esclusivamente dovuta al contenuto naturalmente diverso di acido ascorbico di questi due organi, o non si abbiano anche - nelle loro proteine - delle differenze di struttura tali che ne risenta la possibilità della colchicina di legarsi ad esse.

MATERIALE E TECNICA.

Tutte le nostre esperienze sono state eseguite *in vitro* su estratti proteici ottenuti dalle porzioni apicali di fusti o di radici di piantine di pisello (*Pisum sativum*, v. Alaska) coltivate per 8 giorni in camera termostatica a 25° C. ed al buio.

Il materiale veniva triturato in mortaio con 1 volume di tampone acido citrico 0,05 M e fosfato disodico 0,1 M a pH 7,4; e la poltiglia così ottenuta veniva rapidamente filtrata per garza e centrifugata. Nel supernatante venivano allora precipitate le proteine. A seconda dei casi, la precipitazione veniva frazionata determinando, nell'estratto, concentrazioni suc-

cessivamente maggiori di $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ (30 %, 60 % e 90 % di saturazione); oppure la precipitazione era totale per saturazione del liquido col sale precipitante.

Dopo ogni precipitazione il precipitato veniva raccolto per centrifugazione, ridissolto in piccola quantità di tampone e dializzato per 24 ore contro acqua rinnovata più volte.

Tutte le operazioni furono sempre compiute in camera refrigerata alla temperatura di 3-4° C.

La concentrazione proteica delle diverse soluzioni venne dosata applicando la modificazione quantitativa del metodo del biureto proposta da Robinson e Hogden [19]. Per ogni prova, nelle vaschette d'uno spettrofotometro di Beckman modello DU venivano mescolate appropriate quantità di colchicina e soluzione tampone oppure di colchicina e soluzione proteica in tampone, inoltre di acido ascorbico quando se ne voleva studiare l'effetto. In ogni caso le varie miscele venivano portate a volume di 3 cc. con soluzione tampone.

Le letture al Beckman vennero fatte usando come bianco, a seconda dei casi, o semplice soluzione tampone, oppure soluzione di proteine in tampone. Nelle esperienze con acido ascorbico le letture vennero fatte contro soluzione proteica in tampone contenente anche acido ascorbico nelle stesse proporzioni usate. I valori d'assorbimento in alcuni casi vennero calcolati per mgr. di proteine; sempre si è tenuto conto di eventuali differenze d'assorbimento dovute a piccole differenze di concentrazione oppure alle vaschette stesse.

TABELLA I.

Assorbimento di 5 γ , 10 γ e 15 γ di colchicina in 3 cc. di soluz. tampone acido citrico 0,05 M e fosfato disodico 0,1 M, pH 7,4. Lettura contro tampone.

λ	5 γ	10 γ	15 γ
400	0,008	0,016	0,024
390	0,020	0,040	0,060
380	0,042	0,084	0,125
370	0,062	0,124	0,184
360	0,073	0,146	0,219
350	0,071	0,142	0,213
340	0,063	0,126	0,189
330	0,050	0,102	0,150
320	0,038	0,076	0,114

Come indice dell'interazione tra colchicina e proteine ci pare possano servire le modificazioni della curva d'assorbimento d'una soluzione di colchicina indotte dalla presenza di proteine. È da ricordare che la colchicina presenta il massimo d'assorbimento a λ 360-350; d'altra parte noi abbiamo potuto sperimentalmente stabilire che, tra λ 400 e 320, non solo l'assorbimento delle proteine ma anche quello della colchicina è rigorosamente proporzionale alla concentrazione della soluzione (tab. I e fig. 1); inoltre che l'assorbimento imputabile alla colchicina subisce diminuzioni proporzionali alla quantità di proteine contemporaneamente

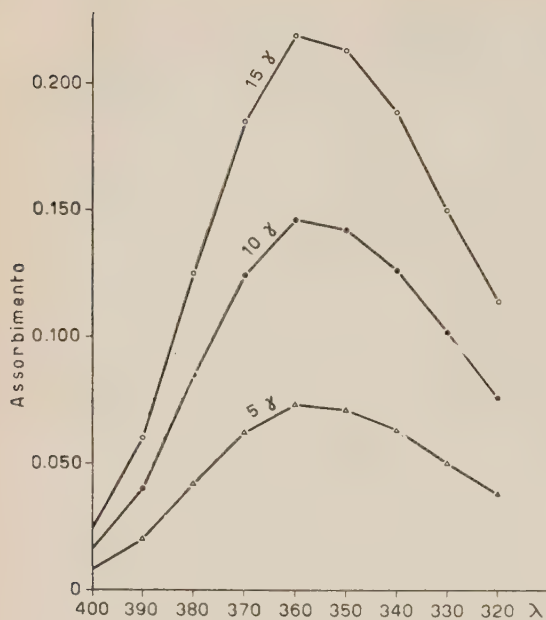


Fig. 1.

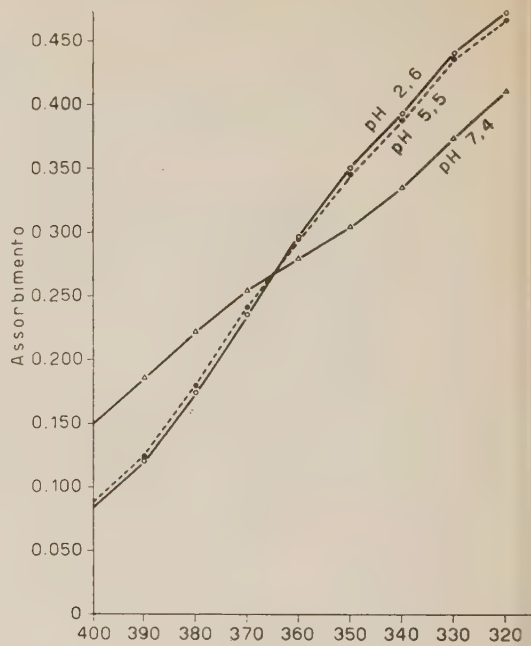


Fig. 3.

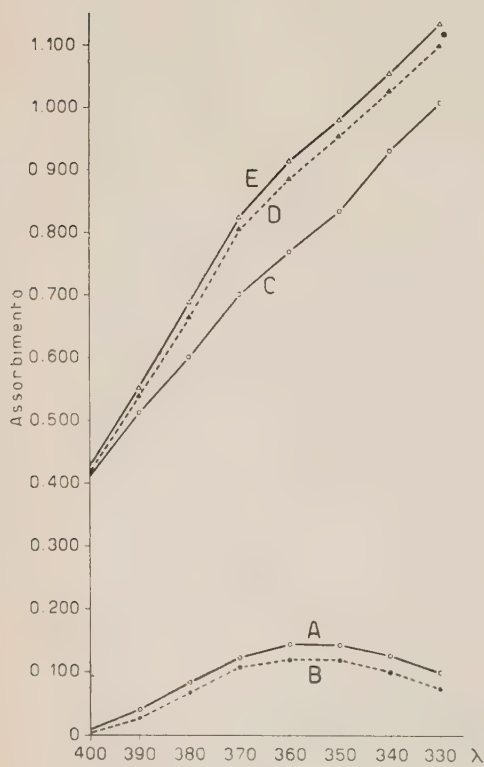


Fig. 4.

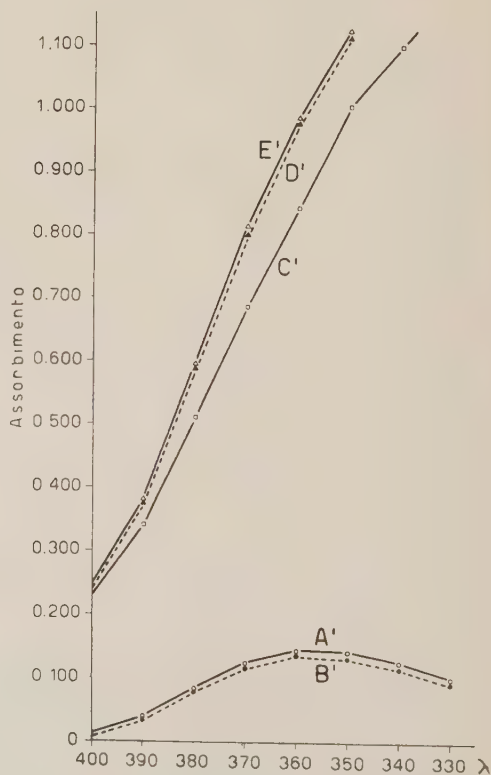


Fig. 5.

presenti (tab. II e fig. 2). È peraltro chiaro che queste variazioni d'assorbimento, che noi abbiamo espresso come diminuzione dei valori d'assorbimento della colchicina, sono dovute non soltanto alle modificazioni delle molecole di colchicina ma anche a quelle delle molecole proteiche con le quali la colchicina interagisce.

ESPERIENZE E RISULTATI.

Il primo punto da chiarire era, evidentemente, quello di stabilire se la presenza di materiale proteico sia effettivamente capace di influire sull'assorbimento d'una soluzione di colchicina modificandone i valori. Le relative esperienze, i cui risultati sono espressi nella tabella II e nel grafico fig. 2, hanno dimostrato la reale sussistenza di un tale effetto; ed hanno anche precisato che i valori dell'assorbimento d'una soluzione di colchicina si attenuano per la contemporanea presenza di proteine; inoltre che i valori dell'attenuazione aumentano al crescere della concentrazione del materiale proteico.

È da precisare che i valori dell'assorbimento delle soluzioni di cui nella tabella II sono stati riletti tre volte (appena fatta la miscela, dopo 1 ora e dopo 2 ore) senza che si sia riscontrata nessuna variazione; ciò che sembra escludere che l'effetto del materiale proteico sull'assorbimento della colchicina sia riconducibile ad azioni enzimatiche sulla molecola della colchicina stessa. È infatti ovvio che, se l'effetto dell'aggiunta degli estratti proteici fosse di questo tipo, le differenze inizialmente riscontrate quando si usarono quantità diverse di materiali proteici avrebbero dovuto attenuarsi successivamente sino a completa scomparsa.

Una seconda serie di esperienze ha avuto lo scopo di precisare l'effetto del pH sul fenomeno messo in evidenza nell'esperienza sopra descritta. È abbastanza facile prevedere che, già sulle stesse proteine, variazioni del pH determinino, assieme ad altre modificazioni chimico-fisiche, modificazioni anche dei valori dell'assorbimento. Tale fatto, comunque, noi abbiamo messo in evidenza misurando l'assorbimento di soluzioni proteiche in tampone a tre distinti valori del pH; tenendo conto che l'estratto proteico totale da noi usato si intorbida se portato tra pH 4 e 4,5, i valori di pH da noi usati per queste determinazioni sono stati scelti in modo che uno fosse abbastanza vicino al pH ora detto (ma, evidentemente, non così vicino che la soluzione cominciasse a intorbidarsi), e gli altri due ne fossero assai discosti in opposta direzione. I risultati, come appare dalla tabella III e dal grafico fig. 3, indicano che le differenze sono sensibili, praticamente, solo se si raffrontano i valori ottenuti a pH più di 7 con quelli ottenuti a pH sotto al 7. Posto ciò noi abbiamo studiato come la presenza di proteine modifichi l'assorbimento d'una soluzione di colchicina ai due pH meno discosti, in più e in meno, dalla neutralità: pH 7,4 e pH 5,5. I risultati sono espressi nelle tabelle IV e V e nelle figure 4 e 5. Dev'essere chiarito che, nelle due figure, le curve A e A' esprimono l'assorbimento della colchicina in soluzione di tampone all'uno o all'altro pH, in confronto della rispettiva soluzione tampone; le curve B e B' indicano l'assorbimento della colchicina in soluzione proteica ai due pH, in confronto dell'assorbimento della soluzione proteica ai rispettivi pH; le curve C e C' esprimono l'assorbimento delle proteine in soluzione tampone all'uno o all'altro pH in confronto dell'assorbimento delle due rispettive soluzioni tampone; infine, le due curve D e D' indicano l'assorbimento della colchicina in soluzione proteica nei due tamponi, in confronto della propria soluzione tampone.

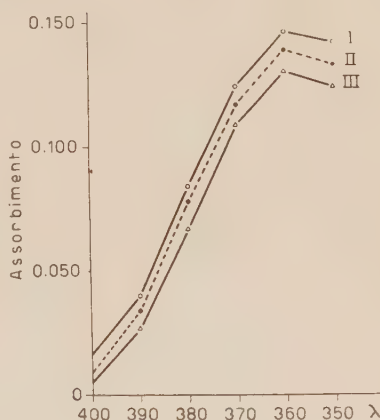


Fig. 2.

TABELLA II.

Modificazione dello spettro d'assorbimento d'una soluz. di colchicina per effetto della presenza di materiale proteico (proteine non frazionate).

I, assorbimento di 10 γ di colchicina in 3 cc. di soluz. tampone, letto contro soluz. tampone. II, assorbimento di 10 γ di colchicina in 3 cc. di soluzione di 2 mgr. di proteine in tampone pH 7,4, letto contro la stessa soluz. proteica in tampone. III, assorbimento di 10 γ di colchicina in 3 cc. di soluz. di 4 mgr. di proteine in tampone pH 7,4, letto contro la stessa soluz. proteica in tampone.

λ	I	II	III
400	0,016	0,009	0,005
390	0,040	0,034	0,027
380	0,084	0,078	0,068
370	0,124	0,117	0,109
360	0,146	0,139	0,130
350	0,142	0,133	0,124

L'effetto della contemporanea presenza, nel tampone, della colchicina e delle proteine risulta evidente dal confronto tra le curve A e B o, rispettivamente, A' e B'; confronto che non fa che confermare le conclusioni che vengono suggerite dal grafico fig. 2. In maniera praticamente identica lo stesso effetto vien dimostrato dal confronto della curva D (o, rispettivamente, D') con la curva E (rispettivamente E') che è quella che teoricamente si dovrebbe ottenere qualora colchicina e proteine non dessero alcuna interazione e, nella soluzione mista, i loro assorbimenti si sommassero (le curve E ed E' sono, cioè, le somme delle curve A e C delle curve A' e C'). È anche da rilevare che tanto più la curva d'assorbimento della colchicina tende a discostarsi dalla curva d'assorbimento delle proteine, proprio alle lunghezze d'onda dove più intenso è l'assorbimento di quest'ultime. In ogni caso, il confronto fra i due grafici fig. 4 e fig. 5 indica che le modificazioni della curva d'assorbimento della colchicina, per effetto della contemporanea presenza di materiali proteici, è assai più distinto in ambiente leggermente alcalino (pH 7,4) che in ambiente francamente acido (pH 5,5).

Le esperienze sin qui descritte sono state fatte con le proteine totali ottenute saturandone l'estratto con solfato ammonico; nella tabella VI, per contro, sono riportati i dati che indicano come si modifichi il valore dell'assorbimento della colchicina - a due lunghezze d'onda nella zona dov'esso è massimo - per effetto della contemporanea presenza delle frazioni proteiche ottenute portando il primitivo estratto a percentuale successivamente maggiore di saturazione di solfato ammonico. Le differenze tendono ad aumentare con la solubilità delle proteine, ciò che sembra indicare che l'interazione con la colchicina non avviene egualmente per tutte le proteine plasmatiche e che quelle che reagiscono con una certa preferenza sono le proteine a molecola più piccola.

TABELLA III.

Effetto del pH sull'assorbimento d'una soluz. di 1 mgr. di materiale proteico (proteine non frazionate) in 3 cc. di soluz. tampone. Lettura contro tampone.

λ	pH 7,4	pH 5,5	pH 2,6
400	0,150	0,087	0,085
390	0,185	0,124	0,122
380	0,221	0,179	0,177
370	0,253	0,240	0,239
360	0,278	0,294	0,295
350	0,302	0,343	0,347
340	0,332	0,385	0,387
330	0,370	0,432	0,435
320	0,406	0,461	0,450

TABELLA IV.

Effetto delle proteine (2,8 mgr. di materiale proteico non frazionato) sull'assorbimento d'una soluz. di 10 γ di colchicina in tampone pH 7,4. Volume finale 3 cc.

A, colchicina (lettura contro tampone).

B, colchicina + proteine (lettura contro soluz. proteica in tampone).

C, proteine in tampone (lettura contro tampone).

D, colchicina + proteine (lettura contro tampone).

E, somma teorica A + C.

λ	A	B	C	D	E
400	0,016	0,007	0,410	0,417	0,426
390	0,040	0,028	0,513	0,540	0,553
380	0,084	0,066	0,600	0,665	0,684
370	0,124	0,108	0,698	0,805	0,822
360	0,146	0,120	0,769	0,885	0,915
350	0,142	0,120	0,836	0,955	0,978
340	0,126	0,100	0,928	1,025	1,054
330	0,102	0,075	1,045	1,120	1,147

TABELLA V.

Effetto delle proteine (2,8 mgr. di materiale proteico non frazionato) sull'assorbimento d'una soluz. di 10 γ di colchicina in tampone pH 5,5. Volume finale 3 cc.

A', colchicina (lettura contro tampone).

B', colchicina + proteine (lettura contro soluz. proteica in tampone).

C', proteine in tampone (lettura contro tampone).

D', colchicina + proteine (lettura contro tampone).

E', somma teorica A' + C'.

λ	A'	B'	C'	D'	E'
400	0,016	0,010	0,230	0,240	0,246
390	0,040	0,037	0,340	0,375	0,380
380	0,084	0,080	0,510	0,590	0,594
370	0,124	0,115	0,685	0,800	0,809
360	0,146	0,136	0,840	0,975	0,986
350	0,142	0,132	1,000	1,130	1,142
340	0,126	0,119	1,114	1,230	1,240
330	0,102	0,095	1,270	1,365	1,372

TABELLA VI.

Effetto di tre distinte frazioni di proteine (10 mgr. di materiale proteico precipitato a tre successivi livelli di saturazione con solfato ammonico) sull'assorbimento d'una soluzione di colchicina (10 γ) in tampone pH 7,4. Volume finale 3 cc.

Le letture sono state fatte contro tampone per la soluzione di colchicina, contro le corrispondenti soluzioni proteiche in tampone negli altri casi.

Materiale	λ 360	λ 350
Colch. in tampone	0,146	0,142
Colch. + proteine precipitate tra 0 e 30 % di satur.	0,124 (diff. — 0,022)	0,122 (diff. — 0,020)
Colch. + proteine precipitate tra 30 e 60 % di satur.	0,070 (diff. — 0,076)	0,068 (diff. — 0,074)
Colch. + proteine precipitate tra 60 e 100 % di satur.	0,042 (diff. — 0,104)	0,043 (diff. — 0,099)

Il quarto gruppo d'esperienze di cui riferiamo ha servito ad indagare se alla maggiore sensibilità alla colchicina dimostrata, in generale, dagli apici radicali in confronto degli apici caulinari della stessa pianta corrisponda, anche in estratti *in vitro*, un diverso effetto delle proteine di diversa origine sui valori d'assorbimento d'una soluzione proteica. A tale scopo sono stati separatamente preparati gli estratti proteici delle porzioni apicali delle radici e del fusto delle stesse piante; da tali estratti, e mediante diversa concentrazione di solfato ammonico, sono state separate due porzioni proteiche (le proteine totali, precipitate a saturazione, e le proteine che precipitavano tra 60 e 100 % di saturazione); valutato l'effetto di queste due coppie di preparati proteici sull'assorbimento d'una soluzione di colchicina si è trovato (tabella VII) che, di fatto, entrambe le frazioni di proteine radicali influenzano l'assorbimento della colchicina più di entrambe le corrispondenti frazioni di proteine caulinari. Se ne dovrebbe concludere che la diversa sensibilità dei due organi è dovuta non soltanto al contenuto normalmente diverso in acido ascorbico (fattore che, in ogni caso, conserva una sua importanza dal momento che l'arricchimento della radice con acido ascorbico ne attenua la sensibilità); ma che si hanno anche delle differenze di composizione proteica che rendono le proteine radicali più atte ad interagire con la colchicina.

TABELLA VII.

Effetto di proteine estratte da porzioni apicali di fusto o di radice (10 mgr. di materiale proteico totale precipitato per saturazione con solfato ammonico, oppure di frazione proteica precipitata tra 60 e 100 % di saturazione) sull'assorbimento d'una soluz. di colchicina (10 γ) in tampone pH 7,4. Volume finale 3 cc.

Letture fatte contro tampone per la soluzione di colchicina,
contro le corrispondenti soluz. proteiche in tampone negli altri casi.

Materiale	λ 360	λ 350
Colch. in tampone	0,146	0,144
Colch. + proteine caulinari precip. a saturazione	0,065 (diff. — 0,081)	0,063 (diff. — 0,081)
Colch. + proteine radicali precip. a saturazione	0,037 (diff. — 0,109)	0,036 (diff. — 0,108)
Colch. + proteine caulinari precip. tra 60 e 100 % di saturazione . .	0,026 (diff. — 0,120)	0,025 (diff. — 0,119)
Colch. + proteine radicali precip. tra 60 e 100 % di saturazione . . .	0,014 (diff. — 0,132)	0,013 (diff. — 0,131)

Un ultimo gruppo di esperienze, infine, è stato dedicato a verificare se sussista anche *in vitro* l'azione di protezione dell'acido ascorbico contro la colchicina già in precedenza reperita *in vivo*. I risultati, compendianti nella tabella VIII, sono stati nettamente positivi. Essi indicano che nullo è l'effetto dell'acido ascorbico (AA) (alle concentrazioni usate) sull'assorbimento sia d'una soluzione di colchicina che d'una soluzione di proteine; ma che l'effetto delle proteine sull'assorbimento della colchicina viene progressivamente attenuato, sino a scomparsa quasi totale, quando alla miscela di colchicina e proteine si aggiunga anche AA in dosi progressivamente maggiori.

Ultimo rilievo è quello che si riferisce al fatto che il materiale proteico precipitato frazionatamente è tanto più ricco d'ascorbico-ossidasi quanto più solubile è la frazione cui esso appartiene. Ciò prospetta come estremamente probabile la possibilità che molto dell'AA somministrato agli estratti, in quest'ultimo gruppo d'esperienze, sia stato rapidamente ossidato ad acido deidro-ascorbico (cosa, del resto, della quale si ebbero indubbi e concreti indizi nel corso dell'esperienza); e che quello che interagisce con la colchicina sia appunto l'ascorbico ossidato; il che coinciderebbe con l'opinione già espressa [20] che sia il deidroascorbico il vero responsabile di tante inibizioni in precedenza attribuite, genericamente, all'acido ascorbico la cui somministrazione veniva sperimentalmente fatta nella sua forma ridotta.

TABELLA VIII.

Effetto di quantità diverse di AA sull'assorbimento di soluz. di colchicina (10 γ), di proteine (3 mgr.) o di colchicina + proteine. Volumi finali 3 cc. in tampone pH 7,4.

Il materiale proteico è stato ottenuto da porzioni apicali di fusto e separato per precipitazione tra 60 e 100 % di saturazione con solfato ammonico.

Materiale	λ 360	λ 350
Colchicina (lettura contro tampone)	0,145	0,142
Colch. + 150 γ AA (lett. contro tampone + AA) . . .	0,145	0,142
Proteine	0,000	0,000
Proteine + 50 γ, o 150 γ o 300 γ di AA (lett. contro tampone + proteine)	0,000	0,000
Colch. + proteine (lett. contro tampone + proteine) .	0,127	0,125
Colch. + proteine + 50 γ AA (lett. contro tampone + proteine + AA)	0,130	0,129
Colch. + proteine + 150 γ AA (lett. contro tampone + proteine + AA).	0,136	0,135
Colch. + proteine + 300 γ AA (lett. contro tampone + proteine + AA)	0,142	0,140

CONCLUSIONI. — Le indagini eseguite con metodo spettrofotometrico su estratti proteici *in vitro* avevano lo scopo di affrontare lo studio del meccanismo d'azione della colchicina. Esse hanno dimostrato che la colchicina interagisce con le proteine plasmatiche dell'estratto; tale interazione è più evidente in mezzo tamponato a pH leggermente alcalino e, quando le proteine siano state separate per precipitazione frazionata, essa è tanto più netta quanto più elevata sia la percentuale di saturazione del solfato ammonico che ha servito per la precipitazione. Sembra, in altre parole, che le proteine

con le quali la colchicina interagisce siano quelle a molecola più piccola e maggiormente solubili. L'esame fatto sulle due frazioni più solubili di materiale proteico estratto da porzioni apicali separatamente di radici e di fusti ha dimostrato che, in entrambe le frazioni, le proteine radicali interagiscono con la colchicina in misura nettamente superiore a quella delle proteine caulinari, dato di notevole interesse se messo in rapporto con la maggior sensibilità alla colchicina che, *in vivo*, le radici denotano in confronto dei fusti. Al fine di controllare precedenti reperti che indicavano, per l'acido ascorbico, una capacità di protezione contro la colchicina, l'interazione *in vitro* tra proteine e colchicina è stata studiata anche in presenza d'acido ascorbico; si è constatato che gli effetti della colchicina sulle proteine rilevabili per via spettrofotometrica si attenuano, fino a quasi scomparire, quando si usino dosi progressivamente maggiori d'acido ascorbico che, adoperato nella sua forma ridotta, è peraltro probabile si trasformi subito in acido deidroascorbico ed agisca come tale.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] LEVAN A. e G. ÖSTERGREN, « Hereditas », vol. 29, p. 381 (1943).
- [2] ÖSTERGREN G., « Hereditas », vol. 30, p. 429 (1944).
- [3] SIMMS N. J. e M. SANDERS, « Arch. Pathol. », vol. 33, p. 619 (1942).
- [4] MAZIA D., « Symposia Soc. exp. Biol. », vol. 9, p. 335 (1955).
- [5] GAL E., « Bull. Soc. Chim. Biol. », vol. 20, p. 1188 (1938).
- [6] BOYLAND E., « Biochem. J. », vol. 34, p. 280 (1940).
- [7] KEESER E., « Arch. Exp. Path. », vol. 197, p. 187 (1941).
- [8] TONZIG S., *I muco-proteidi e la vita della cellula vegetale* (1942).
- [9] TONZIG S. e C. TRECCANI-POMA, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 53, p. 601 (1947).
- [10] SANTAVY F., « C. R. Soc. Biol. », vol. 126, p. 629 e p. 633 (1937).
- [11] JACOBSON C., « C. R. Soc. Biol. », vol. 93, p. 1178 (1925).
- [12] LOICQ R., « Arch. Int. Med. Exper. », vol. 12, p. 371 (1937).
- [13] TONZIG S. e F. TREZZI, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 515 (1950).
- [14] TONZIG S., F. TREZZI e A. CREMASCHI, « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 58, p. 493 (1951).
- [15] TONZIG S., « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », vol. 26, p. 369 (1950).
- [16] TONZIG S., « N. Giorn. Bot. Ital. », n. s., vol. 57, p. 468 (1950).
- [17] TONZIG S., « Proc. 7th Intern. Bot. Congr. 1950 », p. 755.
- [18] TONZIG S. e F. TREZZI, « Rendic. Acc. Naz. Lincei » Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 17, p. 324 (1954).
- [19] ROBINSON H. W. e C. G. HODGEN, « J. Biol. Chem. », vol. 135, p. 707 (1940).
- [20] TONZIG S. e E. MARRÈ, « Rendic. Ist. Lomb. Sc. Lett. ». Vol. 89, p. 243 (1955).

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti.* — I. *Sul limite di resistenza all'inattivazione termica dei sistemi fotosintetico e respiratorio di alghe di acque termali* (*).
Nota di ERASMO MARRÈ e ORIETTA SERVETTAZ, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

È singolare prerogativa di ogni forma vivente la capacità di disporre dei propri strumenti chimico e chimico-fisici in modo tale da poter reagire a caratteristiche ambientali apparentemente sfavorevoli alla sopravvivenza e allo sviluppo dell'organismo o della specie, attenuandone le conseguenze e talora piegandole a proprio vantaggio. Questa capacità, sempre basata su meccanismi delicatissimi, complessi e in larga misura nascosti alla nostra conoscenza, raggiunge talvolta limiti veramente estremi. Così appaiono, nel regno vegetale, il caso di alghe viventi nelle acque madri delle saline, in presenza di eccezionali concentrazioni osmotiche; quello delle alghe delle nevi, che prosperano alla temperatura del ghiaccio fondente; e infine quello delle alghe adattate alla vita nelle acque termali, a temperature che si spingono oltre i 50 e fino agli 85 gradi centigradi [1, 2, 3, 4].

Lo studio delle condizioni peculiari per ciascuno di questi tre casi estremi di adattamento all'ambiente, studio da diverso tempo avviato in questo laboratorio, offre aspetti del più vario interesse, che si estendono dal campo dell'ecologia a quello della biologia comparata e a quello della fisiologia considerata a livello molecolare.

In particolare il caso degli organismi termoresistenti si differenzia nettamente dagli altri due sopra citati. Mentre il normale funzionamento dei meccanismi biologici a temperature vicino allo zero, o in condizioni osmotiche particolarmente impegnative, appare, in prima analisi, suscettibile di essere ricondotto a un fenomeno di adattamento essenzialmente quantitativo (nel senso di una intensificazione di funzioni o meccanismi comuni alla generalità degli organismi), per contro la resistenza e il normale sviluppo, a temperature superiori ai 50 gradi C., sembrano presupporre modifiche interne di carattere squisitamente qualitativo, a carico di una componente essenziale: la natura stessa delle strutture macromolecolari. Infatti la maggior parte delle macromolecole di importanza biologica subiscono, per temperature superiori ai 50 gradi C., rapidi e irreversibili fenomeni di denaturazione.

Il fenomeno di termoresistenza quindi, oltre ad aspetti comuni a quello della frigo- e della osmo-resistenza, ne presenta altri che le sono del tutto caratteristici. Accanto al problema della organizzazione fisiologico-strutturale (nel senso di spostati rapporti, rispetto alla generalità delle altre specie,

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

tra le diverse attività funzionali) gli organismi termoresistenti ne presentano un altro, forse ancor più complesso e interessante: quello dei particolari accorgimenti per cui le macromolecole del loro plasma, (in particolare quelle proteiche) si rivelano capaci di mantenere una piena funzionalità, strutturale come dinamica (catalitica, ad esempio, nel caso delle proteine enzimatiche) in condizioni che, dal punto di vista chimico-fisico, appaiono estremamente difficili (si consideri, ad esempio, la labilità dei ponti di idrogeno a temperature elevate).

Il ciclo di ricerche aperto da questa Nota ha come fine principale la precisazione del meccanismo per cui le macromolecole proteiche di organismi ambientati ad alte temperature sopravvivono, funzionalmente intatte, sfuggendo alla denaturazione termica. Il nostro problema essenziale può quindi definirsi come quello della termoresistenza studiata a livello molecolare.

Nella presente Nota ci limitiamo peraltro a riferire alcuni risultati ottenuti su organismi vivi, raccolti a titolo potremmo dire preliminare, per una più precisa impostazione delle ricerche successive, da eseguirsi su sistemi isolati o *in vitro*, in condizioni tali, cioè, da permettere l'isolamento delle singole componenti del fenomeno.

In particolare in questa serie di esperienze ci siamo proposti di definire:

a) il rapporto tra temperatura di ambientamento e il « margine » tra questa temperatura e quella massima compatibile con la sopravvivenza delle specie in esame;

b) se il limite superiore di temperatura compatibile con la vita di queste forme sia imposto dall'insorgere di fenomeni reversibili di disorganizzazione funzionale, o da fenomeni irreversibili del tipo di quelli conseguenti alla denaturazione proteica;

c) se la sensibilità, di fronte all'inattivazione termica, vari in modo sensibile per apparati funzionali diversi quali quello fotosintetico e quello respiratorio.

MATERIALI E METODI.

a) *Materiale.* — Il materiale per questa ricerca è stato fornito essenzialmente da Cianofeece prelevate dalle acque termali di Abano (Padova), ambientate per diversi mesi (8-14) in apposite vasche aeree e termoregolate a temperature varianti tra i 45 e i 65 gradi C.

La soluzione nutritizia impiegata è stata quella suggerita da Skoog et al. [5] arricchita con aggiunta di brodo di terra, preparato secondo Bacci [6], in proporzione di 1/5 del liquido contenuto in ogni vasca.

La popolazione delle vasche a temperatura diversa si presentava, al momento dell'esperienza, fondamentale quella che risulta dal seguente prospetto:

Vasche a 60-65 gradi C. Forma di gran lunga dominante: *Aphanocapsa thermalis* Brügg.

Vasche a 50-55 gradi C. Forma dominante: *Aphanocapsa thermalis*; inoltre presente *Phormidium laminosum* Gom.

Vasche a 45 gradi C. Forme dominanti: *Aphanocapsa thermalis* e *Phormidium laminosum*.

b) *Determinazione dell'attività fotosintetica e respiratoria.* - Questa è stata eseguita misurando l'evoluzione e rispettivamente il consumo di ossigeno, in tampone al bicarbonato di Na e K secondo Pratt [5] portato con NaOH a pH 8,9 in un apparecchio di Warburg costruito dalla ditta Braun di Melsungen, appositamente per ricerche sulla fotosintesi, munito di bagno con capacità di escursione termica dalla temperatura ambiente a 80 gradi C.

Nelle esperienze 0,5 cc. di una densa emulsione di alghe, prelevate dalle vasche termoregolate di cultura, venivano immessi nelle vaschette di Warburg contenenti 2,5 cc. di tampone. Dopo un breve periodo di ambientamento si iniziavano le letture delle variazioni manometriche, in presenza o assenza di luce. Le letture venivano eseguite a intervalli di 5 minuti, in numero di almeno sei (3 sotto illuminazione e 3 all'oscurità) per ogni temperatura presa in considerazione. Per passare alla temperatura successiva, la temperatura del bagno veniva fatta variare lentamente (circa 30 primi per intervalli di 10°C) a manometri aperti, quindi le letture venivano riprese dopo nuovo ambientamento di 10-15 minuti primi. Per la determinazione della fotosintesi venivano considerate utili le letture successive alla prima dopo l'inizio dell'illuminazione; per quella della respirazione, dato un largo effetto di fotosintesi residua, solo quelle successive a un periodo di oscurità superiore ai 10 primi. Tutti i punti riportati nei grafici rappresentano le medie dei dati ottenuti su tre vaschette.

ESPERIENZE E RISULTATI.

a) *Costanza dei livelli respiratorio e fotosintetico nelle condizioni di esperienza.* I dati della fig. 1 illustrano come, nelle nostre condizioni di esperienza, fotosintesi e respirazione di alghe mantenute e agitate in presenza

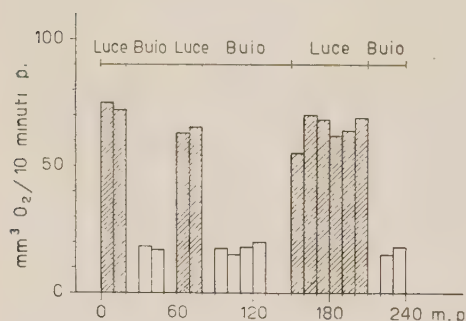


Fig. 1. - Costanza nel tempo della produzione di O_2 , alla luce, e consumo di O_2 , alla oscurità, da parte di alghe termali provenienti da vasca a 50 gradi C, sospese in tampone di bicarbonato da Na e K, pH 8, 9, e agitate al ritmo di 90 oscillazioni al minuto.

di tampone carbonato/bicarbonato, a temperatura uguale a quella di provenienza, si mantengono soddisfacentemente costanti per parecchie ore. Risultato questo che ci rassicurava quindi circa la validità delle nostre condizioni sperimentali ai fini delle ricerche sul rapporto tra temperatura e attività respiratoria e fotosintetica.

b) *Curva dell'attività respiratoria e fotosintetica in funzione della temperatura.* Le curve della fig. 2 mostrano l'andamento della respirazione e della fotosintesi, in funzione della temperatura, per alghe provenienti da una vasca termoregolata a 55°C. Si osserva come la curva della fotosintesi salga

rapidamente, fino a raggiungere un massimo a temperatura di poco inferiore a quella di origine (della vasca di cultura) per quindi progressivamente abbassarsi, per precipitare in corrispondenza di una temperatura di 10 gradi superiore a quella di origine. Alquanto diverso, per contro, risulta l'andamento della curva respiratoria, il cui massimo appare notevolmente spostato verso le alte temperature, e che successivamente si abbassa ma con andamento più lento e graduale.

I risultati di questa esperienza suggeriscono ovviamente una diversa sensibilità dei due processi al fenomeno di inattivazione termica: fatto meglio illustrato dalle esperienze sotto riferite.

c) *Inattivazione irreversibile dei sistemi fotosintetico e respiratorio e margine di resistenza a temperature superiori a quella d'origine.* Il modo più semplice, seppure non strettamente rigoroso, di studiare la reversibilità o meno dell'inattivazione termica, e insieme l'entità del margine tra temperatura a cui le nostre alghe erano da tempo ambientate e quella massima compatibile con la loro funzionalità, ci è parso quello di confrontare l'attività dei due processi fotosintetico e respiratorio, a una data temperatura, misurate sia prima che dopo l'esposizione, per certo intervallo di tempo (un'ora), a temperature più elevate. Nel caso di inattivazione reversibile le due misure avrebbero dovuto coincidere; nel caso opposto la seconda avrebbe dovuto rimanere nettamente inferiore alla prima.

I dati della fig. 3 sembrano ben evidenti al proposito. Essi mostrano infatti: a) come l'inflessione finale della curva di respirazione e fotosintesi sia dovuta a fenomeni irreversibili; b) come tale irreversibilità sia più completa per la fotosintesi che per la respirazione; c) come il margine tra temperatura di

ambientamento e temperatura massima tollerabile vada progressivamente restringendosi, fino quasi a sparire, per le alghe precedentemente ambientate a temperature più elevate, anche se il limite assoluto di tolleranza, è, per queste, spostato nettamente più in alto.

I risultati di queste esperienze risultano pienamente concordi con quelli di altre nelle quali il margine di tolleranza di alghe ambientate a temperature di 45° e 65°, portate per periodi di 20 primi a temperature superiori a quelle d'origine di 5, 10, 15, 20°C, quindi riportate alla temperatura d'origine, è stato determinato in base alla capacità delle alghe così trattate di ridurre il cloruro di trifeniltetrazolio, un reattivo per l'attività dei sistemi deidrogenasici *in vivo* [6].

In questo caso il margine di tolleranza è risultato di 10°–15° per le alghe ambientate a 45°, e di meno di 5° per quelle ambientate a 65°C.

I dati sopra riportati indicano dunque:

a) Una maggiore sensibilità del meccanismo fotosintetico rispetto ai meccanismi respiratori all'inattivazione termica, dovuta forse alla particolare sensibilità di componenti lipoproteici, comunemente considerati caratteristici di questa funzione.

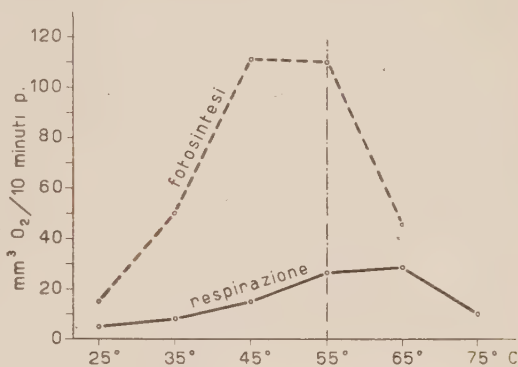


Fig. 2. - Andamento della fotosintesi (reale) e della respirazione, in funzione della temperatura del bagno, da parte di sospensioni di alghe ambientate a 55°C.

b) Una progressiva diminuzione, fino a pratica scomparsa, del margine tra temperatura d'origine e temperatura letale, per le forme ambientate a temperature progressivamente più elevate.

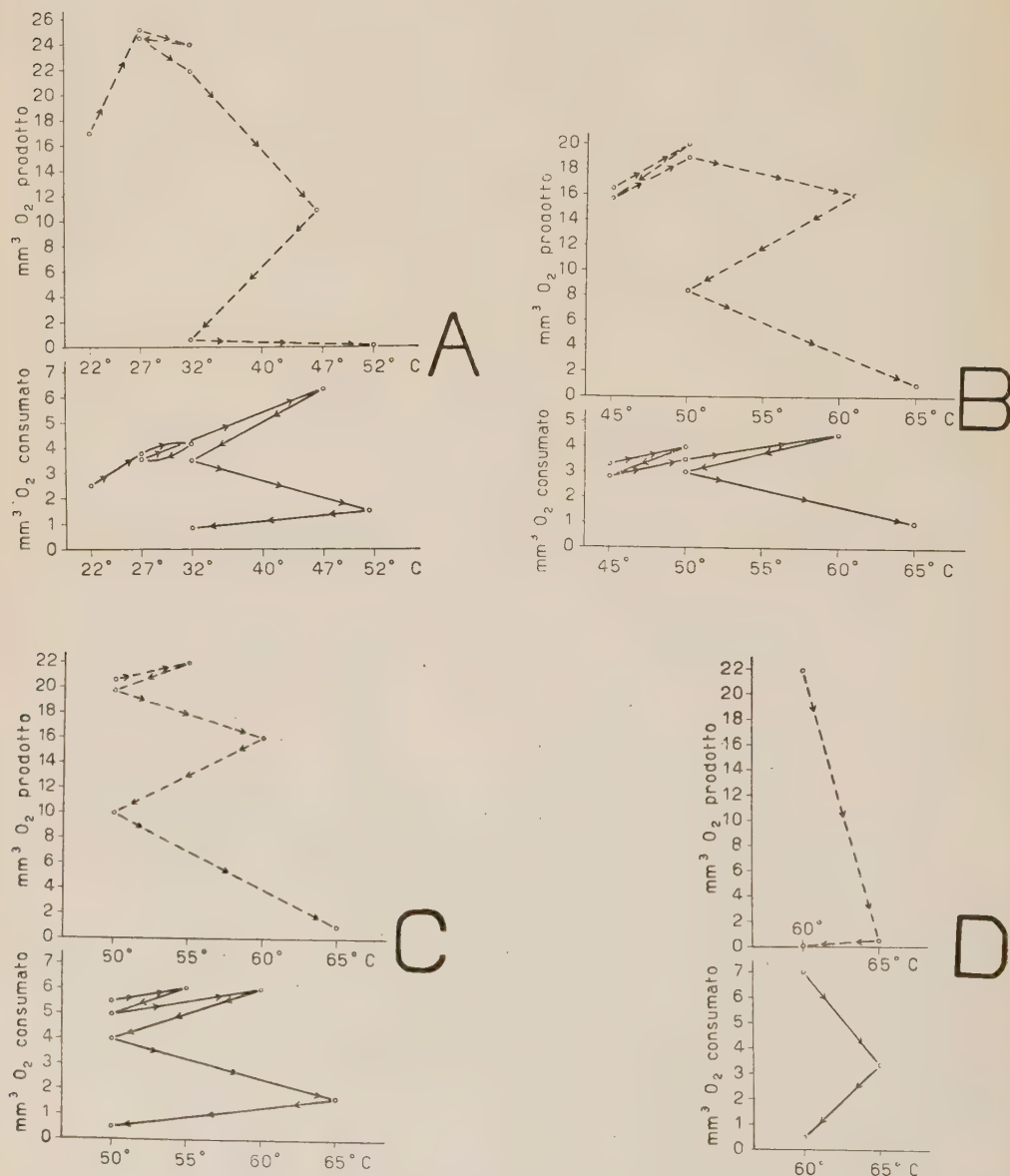


Fig. 3. - Andamento in funzione della temperatura della fotosintesi reale (linea tratteggiata, in alto) e della respirazione (linea continua, in basso) da parte di sospensioni di cianofitiche provenienti da culture ambientate a temperature di: 22 C (A); di 45 C (B); di 50 C (C) e di 60 C (D). Le alghe ambientate a 22 C provenivano da una cultura pura di *Anabaena cylindrica* Lemm. Le curve sono state ottenute variando, come esposto nel testo, la temperatura del bagno dell'apparecchio di Warburg. Le frecce indicano l'ordine, nel tempo, di esposizione delle alghe dei diversi gruppi alle diverse temperature.

c) L'irreversibilità, particolarmente evidente per le forme ambientate a temperature più alte, dei fenomeni di inattivazione termica a carico della fotosintesi e della respirazione.

Nel loro complesso quindi tali dati sono in accordo con l'ipotesi che il limite superiore di ambientamento alle temperature elevate in queste forme termoresistenti, sia legato alle capacità di resistenza di strutture molecolari del plasma, e in particolare, di quelle che condizionano la fotosintesi; e che quindi il diverso livello di questo limite, per le forme ambientate a temperature diverse, sia determinato dalla comparsa, nelle forme termoresistenti «spinte», di particolarità strutturali tali da allontanare quanto possibile la comparsa dei fenomeni di denaturazione.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] W. A. SETCHEL, « Science », 17, 934 (1903).
- [2] J. J. COPELAND, « Ann. N. Y. Acad. Sc. », 36, 1 (1936).
- [3] R. B. HARVEY, « Science », 60, 481 (1924).
- [4] V. VOUK, *Grundriss zu inner Balneobiologie der Thermen* Birkhauser, Basilea (1950).
- [6] G. BACCI, « Boll. Zoologia », 17, 50 (1950).
- [7] R. PRATT, « Am. Journ. Bot. », 30, 626 (1943).
- [8] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « N. Giorn. Bot. It. », n. s., 61, 21 (1954).

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — XVI. *Aumento dell'acido deidroascorbico ed inibizione della crescita in parti isolate di piante superiori trattate con acido ascorbico* (*). Nota di ERASMO MARRÈ e GIANNINO LAUDI, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

L'ipotesi che un aumento nel tenore in acido deidroascorbico possa essere un fattore importante nell'inibizione della crescita da trattamento con acido ascorbico [1, 2] è stata suggerita da diverse osservazioni, compiute nel corso di precedenti ricerche.

In primo luogo è stato rilevato [3] come il trattamento esterno con acido ascorbico (AA) di parti isolate (segmenti di internodi, radici) di piante superiori determini, entro i tessuti, l'aumento di ambedue le forme, ossidata e ridotta, dell'acido ascorbico; e, d'altro lato, come anche la somministrazione esterna di acido deidroascorbico (DHA) innalzi la concentrazione interna di entrambe le forme. Ne consegue che l'equilibrio AA/DHA nel tessuto non appare tanto in funzione dello stato di ossidoriduzione del

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 dicembre 1955.

composto nel mezzo esterno, quanto dell'attività di meccanismi metabolici interni interessati nell'interconversione delle sue due forme ossidata e ridotta.

Questi risultati aprivano il problema della parte spettante, nell'inibizione della crescita, a ciascuna delle due forme la cui concentrazione aumenta nei tessuti in seguito al trattamento con AA. Diversi argomenti ci orientavano verso l'idea che la capacità di inibire la crescita fosse propria del DHA. Così la considerazione che la concentrazione dell'AA aumenta, presumibilmente in parallelo e in conseguenza della diminuzione del DHA, in tessuti stimolati alla crescita dal trattamento con auxina [4]: effetto che appare collegato con l'azione inibente dell'auxina stessa sull'ossidazione dell'AA [5, 6, 7] in preparati mitocondriali come anche in sistemi enzimatici parzialmente purificati. D'altro lato il DHA inibisce efficacemente, *in vitro*, la riduzione del cloruro di trifeniltetrazolio ad opera di diverse deidrogenasi [8, 9], mentre l'acido ascorbico sembra, sui medesimi, sistemi, del tutto inattivo; ora è noto come i più svariati inibitori dell'attività di sistemi enzimatici respiratori inibiscano, spesso a concentrazioni estremamente ridotte, la crescita [10, 11, 12].

Ci è sembrato possibile che un aiuto alla soluzione del problema del diverso significato degli acidi AA e DHA per quanto riguarda l'inibizione della crescita potesse cercarsi studiando comparativamente, in segmenti di coleptili e di internodi, le variazioni del tenore delle due forme, da un lato, e della crescita, dall'altro, in funzione del trattamento, per aggiunta al mezzo esterno, con concentrazioni crescenti in AA. I risultati ottenuti, riferiti nella presenta Nota, sono favorevoli all'idea che all'acido deidroascorbico spetti la parte principale nell'inibizione della crescita in seguito a trattamento con acido ascorbico.

MATERIALI E METODI.

Crescita e aumento dell'AA e del DHA sono stati da noi studiati sia in segmenti ottenuti dalla parte distale del terzo internodio di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum* v. Alaska), al settimo giorno di età, sia in sezioni di coleptili d'avena (*Avena sativa* v. Victory), decapitati e defolciati, prelevati da coleptili di lunghezza tra 2,5 e 3,5 cm. In entrambi i casi il materiale proveniva da piantine coltivate in stanza oscura termoregolata a 25 gradi C. Le sezioni e i segmenti, della lunghezza di 10 mm, venivano, dopo il prelievo, accuratamente lavati e mantenuti per circa due ore in ampia capsula contenente acqua distillata; quindi portati, a gruppi di 20-40, entro beakers contenenti 60 cc di una soluzione di KH_2PO_4 0,05 M oltre, per i controlli, AA a diverse concentrazioni (portato con NaOH a pH 5,6). I beakers venivano agitati meccanicamente, al ritmo di 60 oscillazioni al minuto, per due ore. Al termine dell'esperienza i segmenti, o le sezioni, rapidamente lavati e asciugati, venivano utilizzati in parte per la misura della crescita (come allungamento, per le sezioni di coleptile d'avena, come aumento in peso, per i segmenti di fusto di pisello), in parte per la determinazione secondo Roe e Kuether [13] del tenore in AA e DHA, dopo tritramento in mortaio in presenza di acido metafosforico 4 % e tiourea.

Per tutto il periodo successivo al prelevamento i segmenti e le sezioni venivano mantenuti a 20 gradi C, e, salvo brevi intervalli di esposizione alla luce, all'oscurità.

ESPERIENZE E RISULTATI.

Il grafico della fig. 1 e i dati della Tabella I mostrano parallelamente le variazioni a carico del DHA, dell'AA, e della crescita in segmenti di coleottili decapitati e defolati d'avena, trattati per due ore con concentrazioni crescenti in AA. Si osserva come, per le concentrazioni esterne in AA più basse, l'aumento interno su base percentuale sia nettamente maggiore per il DHA che per l'AA; e come, per queste concentrazioni, sia comparativamente più intenso l'effetto di inibizione sulla crescita. Malgrado che difficoltà tecniche legate alla natura del materiale e l'andamento grossolanamente analogo delle curve del DHA e dell'AA rendano difficile una sicura interpretazione di questi dati, pure essi appaiono piuttosto favorevoli che contrari all'ipotesi di un'azione inibente del DHA.

Ben più evidenti sembrano le conclusioni suggerite dall'esame delle curve della fig. 2 (segmenti di internodio di pisello). In questo caso di fronte ad un evidente, progressivo aumento del DHA, per concentrazioni ridotte dell'AA nel mezzo, il livello in AA entro i tessuti permane pressoché invariato; e, proprio in questa zona, si assiste ad una drammatica caduta della crescita rispetto i controlli. Particolarmente interessante, d'altro lato, risulta pure l'esame dell'ultima parte delle curve, regione in cui l'AA endotissulare, lungi dall'aumentare, mostra una ben evidente tendenza alla diminuzione, malgrado l'aumento della dose in AA esternamente somministrata, mentre il livello in DHA aumenta sempre più rapidamente e, fatto singolarmente significativo, anche l'inibizione della crescita continua ad aumentare.

Il comportamento delle tre curve in questa esperienza sembra escludere una partecipazione dell'AA, in quanto tale, al fenomeno di inibizione, mentre, d'altra parte, mette in rilievo un'evidente correlazione tra inibizione della crescita e aumento dell'acido deidroascorbico. Il che non è per altro da intendersi come una dimostrazione rigorosa che proprio il DHA debba essere l'inibitore diretto cercato, essendovi sempre la possibilità che

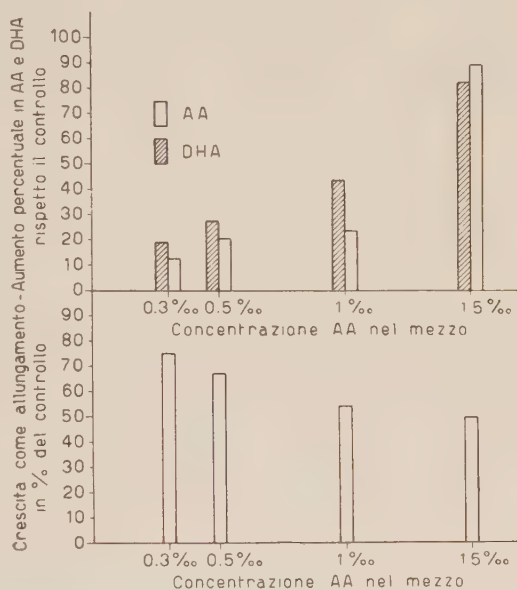


Fig. 1. — Variazioni del tenore in AA e DHA, e della crescita per allungamento, in sezioni decapitate e defoliate di coleottili di avena tenute per 2 ore in soluzioni contenenti AA a concentrazioni crescenti.

questo possa identificarsi in un qualche altro prodotto di trasformazione dell'AA. Possibilità che appare comunque, al momento attuale, remota: tra i composti noti della demolizione, spontanea o biologica, dell'AA, il

dichetogulonico, derivato dal DHA per rottura dell'anello lattonico, sembra infatti, alle basse concentrazioni in cui è presente in questi tessuti, privo di azione biologica di rilievo (vedi la fig. 3, e anche [9]).

L'apparentemente paradossale diminuzione del tenore in AA in seguito all'aumento della concentrazione esternamente somministrata dello stesso composto è fatto degno di rilievo, e suscettibile di fornire uno spunto per l'ulteriore comprensione del fenomeno. Un'ipotesi sostenibile in base a diversi tra i fatti già appurati sembra quella secondo cui la diminuzione del tenore in AA nei tessuti (e, anche precedentemente a questa, il singolarmente ridotto aumento per concentrazioni minori in AA nel mezzo) di fronte al sempre cospicuo incremento del DHA, sarebbe da attribuire all'azione inibente dello stesso DHA sull'attività di sistemi re-

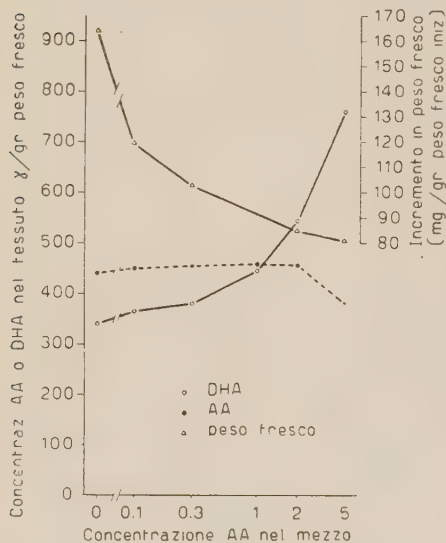


Fig. 2. - Variazioni del tenore in AA e DHA, e della crescita per assorbimento d'acqua, in segmenti di terzo internodio di piantine eziolate di pisello tenuti per 2 ore in soluzioni contenenti AA a concentrazioni crescenti.

spiratori, quali quelli deidrogenasici [9]. Infatti l'equilibrio dinamico tra AA e DHA, in continua trasformazione l'uno nell'altro, è da ritenersi regolato da una parte dall'attività di enzimi ossidanti l'AA a DHA, quali l'ascorbico ossidasi (a localizzazione probabilmente soprattutto superficiale [14, 15] e



Fig. 3. - Variazioni del tenore in AA, DHA, e DKG (acido dichetogulonico) in segmenti di internodi di pisello tenuti per 2 ore in soluzioni contenenti AA a concentrazioni crescenti.

quindi possibilmente agente sull'AA al momento stesso del suo ingresso nella cellula), e i citocromi [16, 17]; e, dall'altra, da sistemi riducenti il DHA ad AA mediante idrogeno staccato da substrati respiratori [18, 19]. È quindi ragionevole il pensare che un'inibizione esercitata dal DHA a livello di enzimi respiratori, abbassando il tenore in idrogeno (elettroni) disponibile nella cellula, debba ripercuotersi sul sistema dell'ascorbico spostando l'equilibrio a tutto favore della forma ossidata. La condizione che ne risulterebbe sarebbe quindi *grosso modo* simile a quella prospettata nello schema della fig. 4. L'ascorbico penetrando nella cellula verrebbe rapidamente ossidato, a livello forse dello stesso ectoplasma, a DHA; e questo verrebbe in parte nuovamente ridotto dall'idrogeno proveniente dai substrati respiratori. E poiché la disponibilità in idrogeno (a differenza

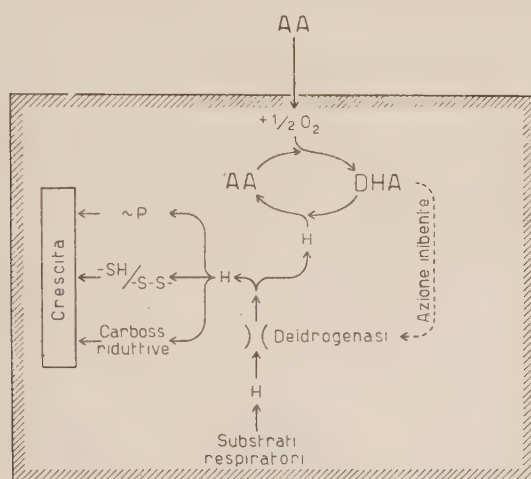


Fig. 4. — Interpretazione schematica del meccanismo di inibizione della crescita in seguito a somministrazione esterna di acido ascorbico (AA).

di quella in ossigeno) trova un limite nell'attività dei sistemi deidrogenasici e di quelli connessi (glutazione- e ascorbico-riduttasi, ad esempio), un aumento oltre un certo limite del tenore in AA nel mezzo, e quindi di quello penetrante nel tessuto, determinerebbe necessariamente un aumento della concentrazione interna in DHA. E, d'altra parte, l'azione inibente del DHA sulle deidrogenasi indurrebbe a sua volta una diminuzione dell'idrogeno disponibile sia per il metabolismo cellulare in genere (sintesi di legami energetici, sintesi riduttive [20], mantenimento nello stato ridotto di gruppi sulfidrilici) con conseguente inibizione della crescita, sia per la riduzione del DHA stesso ad AA, con conseguente spostamento dell'equilibrio AA/DHA a favore della forma ossidata.

CONCLUSIONI. — I risultati sopra riferiti indicano che, nel caso del trattamento con AA di parti isolate di piante superiori, l'inibizione della crescita si accompagna ad un aumento, nel tessuto, essenzialmente della forma ossidata o DHA. Essi confermano quindi l'ipotesi che questo composto sia

dotato di un'azione inibente in qualche modo diretta. Azione il cui meccanismo potrebbe farsi risalire tanto ad una sua azione inibente su enzimi, respiratori, direttamente interessati ai fenomeni di accrescimento, sia alla possibilità che l'aumento del tenore in DHA accelerando il corso della reazione $[2H] + DHA \rightarrow AA$ determini un impoverimento, nella cellula, della disponibilità di idrogeno ad elevato (negativo) potenziale di ossidoriduzione.

TABELLA I.

Crescita e variazioni nel tenore in acido ascorbico ed acido deidroascorbico in coleottili decapitati e defolciati d'avena.

Trattamento	γ AA/30 sezioni	Incr. %	γ DHA/30 sezioni	Incr. %	Crescita in % contr.
Controllo	62	—	18	—	100
AA 0,3 ‰	70	13	21,5	19,1	75
AA 0,5 ‰	75	21	23	27,7	67
AA 1 ‰	77	24	26	44,4	54
AA 1,5 ‰	118	90	33	83	50

BIBLIOGRAFIA.

- [1] TONZIG S. e TREZZI F., «N. Giorn. Bot. Ital.», n. s., 57, 535 (1950).
- [2] TONZIG S. e TREZZI F., «N. Giorn. Bot. Ital.», n. s., 57, 549 (1950).
- [3] LAUDI G., «N. Giorn. Bot. Ital.», in corso di stampa.
- [4] MARRÈ E., «Rend. Acc. Lincei», Cl. Sc. Fis., ser. VIII, 16, 758 (1954).
- [5] ARRIGONI O. e MARRÈ E., «Rend. Acc. Lincei», Cl. Sc. Fis., ser. VIII, 17, 390 (1954).
- [6] MARRÈ E. e ARRIGONI O., «Rend. Acc. Lincei», Cl. Sc. Fis., ser. VIII, 18, 539 (1955).
- [7] MARRÈ E. e ARRIGONI O., «Rend. Acc. Lincei» in corso di stampa.
- [8] TONZIG S., TREZZI F., LAUDI G. e MARRÈ E., «Mem. Acc. Lincei», ser., VIII, vol. IV, 109 (1955).
- [9] MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O., «Rend. Acc. Lincei», Cl. Sc. Fis., in corso di stampa.
- [10] COMMONER B. e THIMANN K. V., «Journ. Gen. Phys.», 24, 278 (1941).
- [11] THIMANN K. V. e BONNER W. D., «Proc Nat. Acad. of Sc.», 35, 272 (1949).
- [12] BONNER J., «Amer. Journ. Bot.», 36, 429 (1949).
- [13] ROE J. H. e KUETHER C. A., «Journ. Biol. Chem.», 147, 99 (1943).
- [14] NEWCOMB H., «Proc. Soc. Exptl. Biol. Med.», 76 (1951).
- [15] HONDA S. I., «Plant Physiol.», 30, 174 (1955).
- [16] MERRY J. e GODDARD D. R., «Proc. Rochester Acad. Sc.», 8, 28 (1941).
- [17] FRIEDKIN A. e LEHNINGER A. L., «Journ. Biol. Chem.», 178, 611 (1949).
- [18] MARRÈ E. e LAUDI G., «Rend. Acc. Lincei», Cl. Sc. Fis., ser. VIII, 16, 649 (1954).
- [19] LAUDI G., «Rend. Acc. Lincei», in corso di stampa.
- [20] VISHNIAC W. e OCHOA S., *Phosphorus metabolism*, Mc. Elroy and Glass, J. Hopkins Press, Baltimora (1952).

Fisiologia vegetale. — *Osservazioni sulla distensione cellulare determinata dall'estere etilico dell'acido indolacetico* (*) Nota di TULLIO DOLCHER e PAOLA MARIANI, presentata (**) dal Corrisp. C. CAPPELLETTI.

La presenza dell'estere etilico dell'acido indolacetico come ormone naturale di crescita è ormai accertata: Redeman, Wittwer & Sell (1951) identificarono in questo composto l'ormone di crescita contenuto nei semi immaturi di mais, che già in precedenza era noto come agente partenocarpico; Teubner (1953) lo riconobbe in estratti di semi di melo; Nitsch e Nitsch (1955) ritengono sia presente negli acini di uva e nel latte di cocco.

L'attività di questo composto sulla distensione cellulare era stata già studiata da Koegl e Kostermans (1935) sulla curvatura dei coleoptili di avena, assieme a quella di diversi altri derivati sintetici dell'indolo. Questi Autori avevano trovato che l'attività auxinica dell'estere era, in questo test, notevolmente minore di quella dell'acido indolacetico.

Data l'importanza che questo estere ha assunto recentemente accanto ad altri derivati a carattere neutro dell'acido indolacetico per la relativa frequenza con cui vengono ritrovati in natura, si è ritenuto opportuno riesaminare l'attività di questo composto sulla distensione cellulare.

METODO. — L'attività dell'acido indolacetico e del suo estere etilico sulla distensione cellulare è stata studiata mediante il test Avena (var. Victory), misurando l'allungamento di segmenti di coleoptili della lunghezza iniziale di 10 mm, dopo trattamenti a 26°, al buio. Si seguì essenzialmente la tecnica indicata da Bentley e Housley (1954), facendo germinare però i semi su carta da filtro e disponendoli poi in appositi germinatoi forati con l'embrione in posizione eretta e la parte radicale immersa in acqua distillata; si utilizzarono le plantule quando i coleoptili avevano raggiunto i 2,5-3 cm, avendo da queste ottenuto risposte più omogenee che non da plantule più corte. Alcune prove sono state fatte con 0,6 cc, altre con 1 cc di soluzione per coleoptile; le soluzioni auxiniche contenevano saccarosio al 3 %, MnSO_4 allo 0,01 % e KH_2PO_4 allo 0,136 % (= 0,01 Molare). Per ottenere maggiore precisione nelle misure, in alcune esperienze i segmenti vennero infilati su aghi di vetro, dopo asportazione della fogliolina, in modo da evitarne l'incurvamento.

È stata esaminata l'attività dei due composti anche sul test Pisello (var. Alaska) (tecnica secondo Christiansen e Thimann, 1950), misurando l'allungamento e l'aumento in peso di segmenti di 10 mm, tolti dal terzo internodio in fase di distensione, e trattati con 1 cc di soluzione per segmento.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico di Padova, diretto dal Prof. C. Cappelletti.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

RISULTATI. - L'attività presentata dall'acido indolacetico (IA) e dal suo estere etilico (EtIA) sulla distensione dei coleptili di avena è indicata dalle curve riportate nella fig. 1, che rappresentano le medie dei valori ottenuti in più prove. Sono state sperimentate soluzioni dalla concentrazione di 250 mg/litro a quella di 1 γ /litro, pari a concentrazioni molari rispettivamente di poco superiori al 10^{-3} e circa $5 \cdot 10^{-9}$ (1).

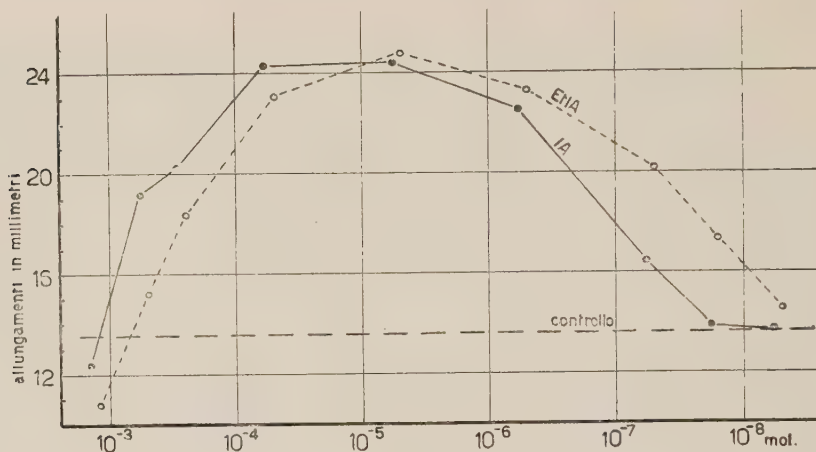


Fig. 1. - Lunghezze raggiunte dai coleptili di avena (segmenti di 10 mm) dopo trattamenti con IA e con EtIA per 21 ore a 26° (concentrazioni espresse in scala logaritmica).

Dall'esame del diagramma risulta che le due curve hanno un andamento molto simile, raggiungono più o meno lo stesso valore massimo e differiscono essenzialmente solo per la posizione rispetto alla scala delle concentrazioni; più precisamente, quella dell'estere si trova spostata verso diluizioni maggiori. Si può constatare infatti che l'effetto provocato da una qualsiasi concentrazione di IA viene prodotto da una concentrazione dell'estere sensibilmente inferiore. A titolo indicativo si può notare che l'attività di soluzioni di EtIA tra 10^{-3} e 10^{-4} Mol. è pari a quella di soluzioni di IA a concentrazione circa doppia, mentre per le soluzioni tra 10^{-7} e 10^{-8} Mol. l'attività è pari a quella di soluzioni di IA a concentrazione circa quadrupla. Anche il limite di attività risulta per l'estere notevolmente più basso: a concentrazioni molto diluite (intorno ai 10^{-8} Mol.) alle quali l'IA è ormai inefficace, l'estere produce ancora una sensibile distensione. Quanto alla posizione del massimo delle due curve,

(1) Per semplificare le esperienze, i trattamenti con i due composti sono stati fatti con concentrazioni equivalenti in peso, non molari. Le curve di attività sono state però costruite riportando i dati su una scala di concentrazioni molari, in modo da poter confrontare l'andamento delle curve in condizioni di equimolarità. Per le esperienze relative alla tabella I e quelle alla fig. 2 e tabella II, i dati sono stati riportati per concentrazioni in peso; si può osservare comunque che, dato il maggior peso molecolare dell'EtIA (p. mol. EtIA = 203; p. mol. IA = 175), le differenze di attività tra i due composti risulterebbero, in condizioni di equimolarità, nello stesso senso e ancor più accentuate.

in esperienze fatte in precedenza sotto condizioni diverse (0,6 cc di soluzione per coleoptile) si è ottenuto il massimo di distensione per l'IA ad una concentrazione di circa 1 mg/litro ($= 5,71 \cdot 10^{-6}$ Mol.) e per l'EtIA a circa 0,2 mg/litro ($= 0,98 \cdot 10^{-6}$ Mol.) (vedi tabella I).

TABELLA I.

Lunghezze raggiunte dai coleoptili di avena (segmenti di 10 mm) dopo trattamenti con IA e con EtIA per 21 ore a 26° (0,6 cc di soluzione per coleoptile).

	IA	EtIA
10 mg/litro	20,05	18,40
5 mg/l	20,37	19,50
2 mg/l	22,32	21,00
1 mg/l	24,20	22,80
0,4 mg/l	23,75	23,15
0,2 mg/l	23,40	23,60
0,08 mg/l	21,10	21,63
0,04 mg/l	20,70	21,70

Si può concludere dunque che *i due composti sono capaci di determinare il medesimo grado massimo di distensione* (ritenendo troppo piccole per essere significative le differenze osservate); la concentrazione però alla quale questo massimo viene raggiunto è per l'EtIA notevolmente inferiore a quella a cui lo raggiunge l'IA. *L'EtIA, dunque, in quanto agisce rispetto all'IA a concentrazioni più basse può essere definito più attivo dell'IA stesso.*

Allo scopo di avere qualche elemento per l'interpretazione delle cause delle differenze di attività dei due composti è stato esaminato il ritmo di allungamento dei coleoptili durante il trattamento. Si riportano i diagrammi di una delle due serie di esperienze eseguite a tal fine (fig. 2). Nell'altra serie le misure vennero prese ad intervalli di tempo complementari; le relative curve confermano i dati di quelle qui riportate. Si è così constatato che l'attività dell'estere risulta superiore a quella dell'IA fin dalle prime ore, sia alle dosi più forti che a quelle più deboli (alle concentrazioni più forti, 100 e 50 mg/litro, la maggiore attività dell'estere ovviamente si manifesta con una distensione minore, trattandosi di concentrazioni superiori a quella corrispondente al massimo di distensione; alle concentrazioni più basse, invece, alla maggiore attività corrisponde una maggiore distensione).

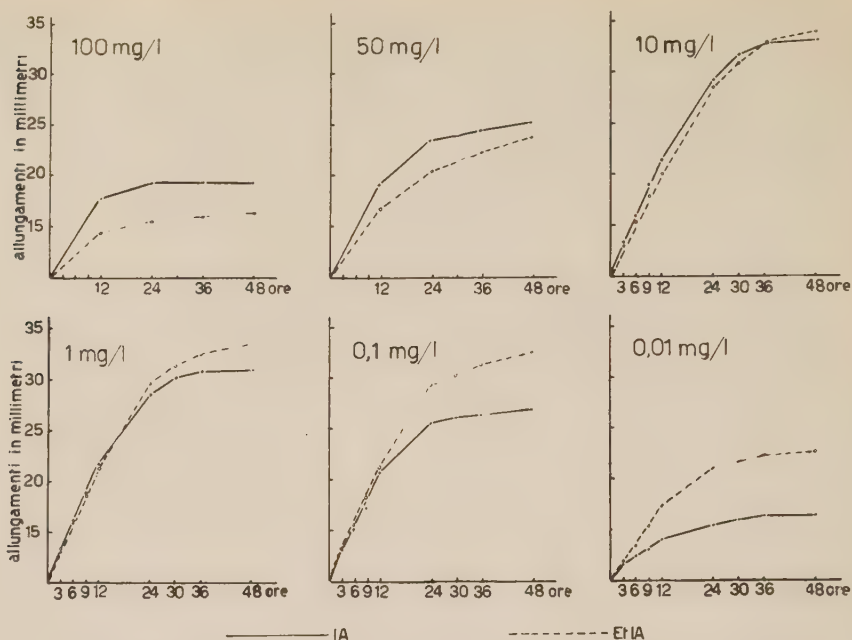


Fig. 2 - Allungamenti dei coleptili di avena (segmenti di 10 mm) durante le prime 48 ore di trattamento con IA e con EtIA a 6 differenti concentrazioni.

TABELLA II.

Allungamenti in mm di segmenti di coleptili (lunghezza iniziale 10 mm) in successivi periodi di trattamento con IA e con EtIA a varie concentrazioni.

		0-12 ore	12-24 ore	24-36 ore	36-48 ore	lunghezza raggiunta in 24 ore
100 mg/l	IA	8,00	1,40	0	0	19,40
	EtIA	4,37	1,19	0,41	0,31	16,28
50 mg/l	IA	9,02	4,54	0,88	0,71	25,15
	EtIA	6,82	3,73	1,75	1,48	23,78
10 mg/l	IA	11,27	7,91	3,55	0,31	33,04
	EtIA	10,16	8,43	4,13	1,21	33,93
1 mg/l	IA	11,78	6,83	2,25	0,14	31,00
	EtIA	11,48	8,12	2,95	0,95	33,50
0,1 mg/l	IA	10,81	4,90	0,74	0,53	26,98
	EtIA	11,40	7,98	2,11	1,10	32,59
0,01 mg/l	IA	4,34	1,18	0,93	0	16,45
	EtIA	7,32	3,86	1,20	0,37	22,75
controllo . . .		3,31	1,68	1,26	0,31	16,56

I ritmi di accrescimento sono differenti per i due composti: a tutte le concentrazioni la distensione provocata dall'IA tende ad esaurirsi prima di quella dovuta all'estere; si può affermare cioè che l'azione dell'estere è più prolungata nel tempo. Infatti, dalla tabella degli allungamenti (tabella II) risulta che nella seconda giornata del trattamento l'estere provoca distensioni maggiori a tutte le concentrazioni; significativo è anzi il fatto che la disten-

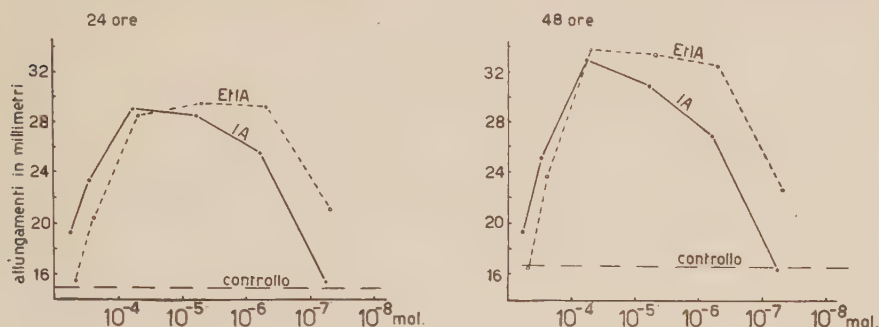


Fig. 3. - Lunghezze raggiunte dai coleptili di avena (segmenti di 10 mm) dopo trattamenti con IA e con EtIA per 24 e per 48 ore a 26° (concentrazioni espresse in scala logaritmica).

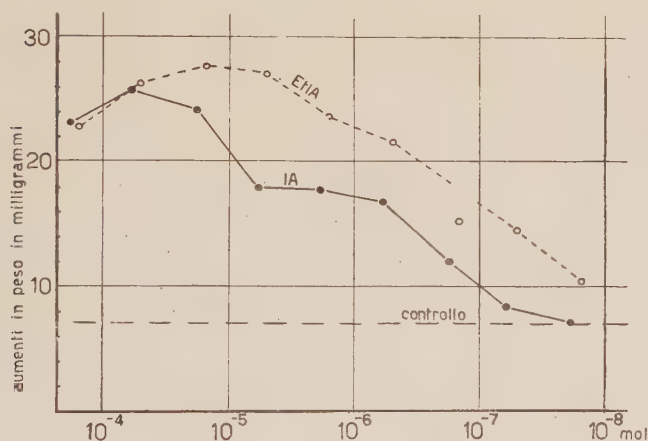


Fig. 4. - Aumento medio in peso di segmenti di 10 mm di fusto di pisello dopo trattamenti con IA e con EtIA per 21 ore a 26° (concentrazioni espresse in scala logaritmica).

sione è più forte anche a quelle concentrazioni alle quali, nelle prime 24 ore, l'estere provoca una distensione minore (100, 50, 10 mg/l). La prolungata azione dell'estere determina cioè nella seconda giornata una diminuzione della differenza tra le lunghezze prodotte dai due composti, che giunge, per le soluzioni a 10 mg/litro, fino ad una inversione delle due curve.

Questa diversa durata del periodo di efficienza dei due composti fa sì che le loro curve di attività calcolate dopo 48 ore siano notevolmente diverse da quelle calcolate dopo 24 ore (diagrammi della fig. 3).

La discordanza tra i reperti di Koegl e Kostermans (1935), secondo i quali l'attività dell'EtIA è soltanto circa $1/8$ di quella dell'IA, e quelli qui trovati, può ritenersi dovuta ai test usati: già altri autori (Bentley e Bickle 1952) hanno messo in evidenza analoghe differenze di comportamento dei test « allungamento » e « curvatura », sottolineando la maggior rispondenza del test allungamento per la misura dell'attività auxinica di distensione cellulare.

L'attività dell'estere si è dimostrata anche sul test Pisello nettamente superiore a quella dell'indolacetico, pur essendosi riscontrato in questo test una minore sensibilità e una variabilità notevole. Nel diagramma della figura 4 si riportano le curve relative ai due composti ottenute in una delle esperienze eseguite; l'attività è espressa dall'aumento in peso dei segmenti, che si è dimostrato nelle varie prove più significativo di quello in lunghezza.

La notevole attività dell'estere e la corrispondenza della sua curva di attività con quella dell'acido indolacetico inducono a ritenere molto probabile che il suo meccanismo d'azione sia essenzialmente quello dell'indolacetico.

Ricerche preliminari di cromatografia hanno indicato infatti che nei tessuti trattati con soluzioni di EtIA si ha formazione di IA già dopo poche ore. È verosimile perciò che l'attività dell'estere sia dovuta tutta o in parte all'IA che si libera. Questo meccanismo corrisponderebbe a quanto già è stato osservato per altre auxine neutre (indolacetonitrile, Stowe e Thimann 1954; indolacetaldeide, Bentley e Housley 1952), la cui attività sarebbe legata appunto alla capacità di trasformarsi in acido indolacetico, e si accorderebbe con le attuali concezioni riguardo al meccanismo auxinico, per il quale sarebbe necessaria la presenza di un gruppo carbossilico.

L'estere è risultato, però, più attivo dell'IA. Questo fatto potrebbe dipendere dalla maggiore permeabilità di tale composto nei tessuti, dovuta alla sua maggiore lipofilia, essendo il gruppo polare COOH annullato dall'etile (il comportamento nettamente lipofilo dell'estere risulta del resto evidente dalla sua separazione cromatografica dall'IA mediante acqua e mediante esano al 95 %, Nitsch e Nitsch 1955). Essendo più permeabile, l'estere entrerebbe in quantità maggiore nella cellula, e avrebbe perciò un'azione più forte.

È risultato inoltre che l'estere ha una azione più prolungata nel tempo. Verosimilmente questa caratteristica non può essere spiegata con la sua maggiore permeabilità. Se l'attività dell'estere è dovuta essenzialmente alla liberazione di IA, la maggiore durata della sua efficacia potrebbe essere dovuta invece ad una azione protettiva determinata dalla presenza del gruppo etilico di fronte all'ossidazione enzimatica del carbossile. Nei trattamenti con IA libero il carbossile verrebbe rapidamente distrutto dall'IA-ossidasi; nei trattamenti con l'estere la quantità di IA attaccabile dall'enzima sarebbe molto minore, in quanto la scissione dell'estere avverrebbe con relativa lentezza, assicurando così una riserva auxinica per un tempo relativamente lungo.

Esperienze preliminari condotte allo scopo di provare l'attività auxinica che resta nelle soluzioni di IA e di EtIA dopo la permanenza dei coleptili di avena per 24 ore sembrano avvalorare questa ipotesi: soluzioni di EtIA anche molto diluite (1-0,1 e 0,01 mg/litro) conservano gran parte della loro attività, mentre le soluzioni di IA a concentrazione corrispondente la perdono del tutto o quasi.

Ulteriori ricerche sono in corso su questo argomento.

BIBLIOGRAFIA.

- BENTLEY J. A. e BICKLE A. S., « Journ. of Exper. Bot. », 3, 406-423 (1952).
 BENTLEY J. A. e HOUSLEY S., « Journ. of Exper. Bot. », 3, 393-405 (1952).
 BENTLEY J. A. e HOUSLEY S., « Physiol. Plant. », 7, 405-419 (1954).
 CHRISTIANSEN G. S. e THIMANN K. V., « Arch. Biochem. » 26, 230-247 (1950).
 GORDON S. A., « Ann. Rev. of Plant Physiol. » 5, 341-378 (1954).
 KOEGL F. e KOSTERMANS D. G., « Hoppe-Seyler's Z. Physiol. Chem. », 235, 201-216 (1935).
 NITSCH J. P. e NITSCH C., « Beitr. z. Biol. d. Pflanzen », 31, 387-408 (1955).
 REDEMANN C. T., WITTWER S. H., SELL H. M., « Arch. Biochem. and Biophys. », 32, 80-84 (1951).
 STOWE B. B. e THIMANN K. V., « Arch. Biochem. and Biophys. », 51, 499-516 (1954).
 TEUBNER F. G., « Science », 118, 418 (1953).
 THIMANN K. V. e LEOPOLD A. C., « The Hormones », 3 (Ac Press Inc., New York, N. Y.) (1955).

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sulla fisiologia delle piante virosate.* — I. *Contenuto in acido ascorbico nelle foglie di «Spinacia oleracea» affette da mosaico del cetriolo*^(*). Nota di F. M. GEROLA e GIANNINO LAUDI, presentata^(**) dal Socio S. TONZIG.

Una delle conseguenze più appariscenti delle infezioni virosiche nelle piante; specialmente nel caso di infezioni particolarmente severe, è data dalla crescita stentata (nanismo) degli individui virosati. In un precedente lavoro dedicato allo studio del meccanismo col quale tale fatto si concreta in piante di *Spinacia oleracea* affette da mosaico (mosaico del cetriolo), la cosa era stata posta in relazione [1] alla particolare fisionomia glucidica delle foglie (caratterizzate da un accumulo di amido e di zuccheri nella lamina), che avrebbe potuto ostacolare l'afflusso di sostanze energetiche ai meristemi, per una semplice azione competitiva tra «centri ad elevato metabolismo».

Rimaneva tuttavia da chiarire il motivo per il quale nelle piante virosate di *Spinacia* anche le foglie, nonostante la loro ricchezza in glucidi, avessero una crescita molto inferiore a quella dei controlli non infetti, e venissero

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

molto più precocemente abscisse, specialmente quando le condizioni ambientali risultavano sfavorevoli. A tale proposito ed in dipendenza delle strette relazioni esistenti tra crescita cellulare ed auxina, particolarmente importanti ci sembrarono le ricerche di Tonzig et al. [2-3-4-5-6-7], ricerche che dimostrano come l'acido ascorbico espliciti un'azione antagonista a quella dell'auxina, modificando ad esempio, in modo opposto a quello determinato da quest'ultima, la viscosità del plasma, il ricambio idrico, la proliferazione e la distensione cellulare, la respirazione, ecc. Questo antagonismo acido ascorbico-auxina è però reso più complesso dal fatto che (Tonzig et al. [8]; Marré et al. [9-10]) era parso evidente il differente effetto esercitato su di alcuni sistemi enzimatici dall'acido ascorbico ridotto (AA) e dall'acido deidroascorbico (DHA), differente effetto che, interessando in modo diretto la respirazione, dovrebbe esplicitarsi, di conseguenza ed in modo parallelo, anche sull'accrescimento.

Queste considerazioni ci suggerirono di indagare se nelle foglie di piante virosate di *Spinacia*, l'alterato biochimismo e gli alterati processi di crescita s'accompagnassero ad un alterato contenuto in acido ascorbico e ad un anormale rapporto tra la forma ossidata e quella ridotta di tale acido.

MATERIALE E METODO. - Foglie di *Spinacia oleracea*, tratte da piante crescenti in piena terra, sono state sottoposte alla determinazione dell'acido ascorbico e deidroascorbico. Sono state esaminate foglie a tre diversi gradi di sviluppo (foglie giovani, a distensione non ancora ultimata ed adulte) di piante di controllo apparentemente sane e bene sviluppate, e di piante manifestamente affette da mosaico del cetriolo, aventi una crescita notevolmente inferiore a quella dei controlli sani.

Per il dosaggio degli acidi ascorbico e deidroascorbico è stato usato il metodo di Roe e Kuether, (modificato per i tessuti vegetali da Roe e Oesterling [11]).

Una determinata quantità di foglie, private del picciolo, era tritata rapidamente in mortaio con sabbia di quarzo in presenza di acido metafosforico al 5 %, con aggiunta di tiourea al 3 % (per eliminare la possibilità del passaggio dell'acido ascorbico dalla forma ridotta a quella ossidata durante le fasi di dosaggio). Ad una aliquota (corrispondente circa a quantitativi di acido ascorbico pari a 100 mg per gr peso fresco) dell'estratto centrifugato e filtrato, posta in provette e portata a volume, si aggiungeva quindi 1 cc di 2,4 - dinitrofenilidrazina (al 2 % in acido solforico 9 N). Per il dosaggio dell'AA si procedeva alla preventiva sua ossidazione con aggiunta di acqua di bromo (0,15 cc di una soluzione all'1 %) e, dopo un minuto, con l'aggiunta di 0,15 cc di anilina (al 3 % in acido solforico 9 N). Alle provette, dopo permanenza di 3 ore in termostato a 37° C si aggiungevano 5 cc di acido solforico 85 %, allo scopo di sciogliere l'osazone formatosi nel corso della reazione. Dopo raffreddamento, si sottoponevano ad analisi colorimetrica le varie soluzioni (alla lunghezza d'onda di 540 $m\mu$) ed i valori ottenuti si confrontavano con una scala standard.

ESPERIENZE E RISULTATI. - Le quantità di AA e di DHA contenute nelle foglie a vario grado di sviluppo di piante di *Spinacia* sane e virosate sono riportate nella tabella I, che è stata dedotta da determinazioni in doppio eseguite su foglie di piante crescenti in piena terra.

I dati riferiti nella tabella I dimostrano quanto segue:

a) il contenuto in AA + DHA varia in funzione dell'età della foglia; sia nei controlli, sia nelle piante virosate i valori più alti si riscontrano nelle foglie

a distensione non ancora ultimata. Queste variazioni di acido ascorbico nelle foglie di differente età sono dovute soprattutto (specialmente nei controlli sani) a differenze di contenuto della forma ridotta (AA). Le differenze del contenuto in AA tra piante sane e virosate sono tuttavia troppo modeste (raggiungono infatti un massimo del 10%) per potersi ritenere in qualche modo significative;

b) tra foglie sane e foglie provenienti da piante mosaicate esiste invece una differenza accentuata per quanto riguarda il contenuto in DHA (e, di conseguenza, anche il rapporto AA/DHA). Nelle piante sane infatti non si nota che un aumento trascurabile del contenuto in DHA, nel passaggio da foglie allo stato giovanile (mg. 37/gr peso fresco), a foglie che hanno ultimata la distensione (mg 42/gr peso fresco). All'opposto, nelle foglie a mano a mano più adulte delle piante virosate vi sono quantitativi sempre maggiori di DHA, tanto che nelle foglie più vecchie il DHA è in quantitativi quasi tre volte superiori a quelli presenti nelle foglie giovani.

TABELLA I.

Contenuto in γ /gr peso fresco di acido ascorbico ridotto (AA) ed ossidato (DHA) in foglie giovani, a medio sviluppo ed adulte di piante di « Spinacia oleracea », sane ed affette da mosaico del cetriolo.

Tipi di foglie	Stato delle piante	AA	DHA	AA + DHA	AA/DHA
Giovani	Sane	533	37	590	15
	Virosate	586	59	645	9,9
Medie	Sane	729	41	770	17,7
	Virosate	665	80	745	8,3
Adulte	Sane	613	42	655	14,5
	Virosate	495	100	595	4,9

Il fatto di maggior rilievo, tuttavia, è che in tutte le foglie virosate è sempre maggiore che non nelle foglie sane il contenuto in DHA. Le differenze esistenti non sono però costanti dall'inizio alla fine dello sviluppo delle foglie, ma vanno progressivamente aumentando a mano a mano che le foglie diventano più adulte. Così nelle foglie giovani mosaicate il DHA è in quantitativi circa una volta e mezzo (159%) superiori a quelli delle foglie sane; in stadi successivi, invece, si rilevano differenze molto maggiori (195%), che aumentano ancora nelle foglie più vecchie (238%).

Evidentemente, queste così notevoli diversità di contenuto di DHA tra foglie a vario grado di sviluppo e tra piante sane e mosaicate, sono causa di variazioni anche del rapporto AA/DHA, rapporto che appare nelle piante mosaicate molto inferiore a quello degli individui sani.

Inoltre, mentre nelle foglie a mano a mano più adulte degli individui sani questo rapporto non subisce che modificazioni limitate (le quali consistono soprattutto in un suo lieve aumento nelle foglie in piena fase distensiva, ancora in via di sviluppo), nelle foglie virosate, si nota una progressiva ed accentuata diminuzione di questo rapporto, nel passaggio dalle foglie più giovani a quelle adulte.

DISCUSSIONE. - Numerose determinazioni eseguite da vari autori hanno sempre posto in rilievo come le quantità di DHA nei tessuti più diversi siano così basse rispetto a quelle della forma ridotta di tale acido, da far apparire eccezionale il contenuto in DHA che abbiamo riscontrato nelle foglie di *Spinacia* affette da mosaico del cetriolo. Tale elevato quantitativo di DHA appare tanto più significativo, in quanto è noto che l'equilibrio, nei tessuti, tra forma ossidata e ridotta dell'acido ascorbico non è semplicemente espressione delle caratteristiche ossido-riduttive dell'ambiente intracellulare, ma è piuttosto il risultato delle caratteristiche di funzionalità di determinati sistemi enzimatici che presiedono ai trasferimenti metabolici di idrogeno oppure di ossigeno. Ne viene che l'eccezionale contenuto in DHA delle foglie delle piante virosate va attribuito o ad una elevata attività degli enzimi interessati all'ossidazione dell'AA, oppure, all'opposto, ad una inefficienza di sistemi capaci di ridurre il DHA mediante l'idrogeno proveniente da substrati respiratori, tipo: substrato \rightarrow TPN \rightarrow glutatione \rightarrow acido ascorbico \rightarrow ossigeno [12].

È noto come la trasformazione dell'AA in DHA possa avvenire per azione di vari enzimi ossidanti, quali l'ascorbico-ossidasi, le perossidasi [13], le polifenolossidasi [14-15-16-17-18] e di citocromi [19-20]. È noto pure, d'altro lato, come alcuni di questi enzimi siano stati accertati da tempo in proporzioni altamente attive in numerose piante affette da virus (vedi bibliografia riferita in [21-22-23-24]). In proposito, anzi, si può ricordare che di frequente nelle piante e nei tessuti virosati è stata osservata una ricchezza del tutto particolare di enzimi ossidanti, ciò che aveva spinto persino ad affermare che proprio in questa abnorme attività enzimatica fosse da riconoscere la stessa natura del virus [25-26].

In ogni modo, ed oltre a questa generale ricchezza di enzimi ossidanti, è assai probabile che altri fattori ancora collaborino nel determinare, nelle foglie virosate, l'eccezionale quantità di DHA. Così la presenza del virus, perciò stesso che determina una palese diminuzione di clorofilla nelle foglie mosaicate, potrebbe spostare indirettamente il normale rapporto tra AA e DHA delle foglie: è infatti propria dei cloroplasti funzionanti la capacità di ridurre il DHA [27-28]. Poiché, d'altra parte, è stato dimostrato che il DHA inibisce l'attività di varie deidrogenasi, se per altri motivi la quantità

di DHA diviene anche lievemente abnorme, la diminuita disponibilità di idrogeno ne rende più difficile il ritorno allo stato ridotto, con la conseguenza che la situazione va progressivamente aggravandosi, quasi come per un fenomeno autocatalitico, col risultato di un sempre maggior allontanamento dai valori normali del rapporto AA/DHA.

Tanto più il risultato è interessante in quanto gli elevati quantitativi di DHA nelle piante mosaicate di *Spinacia* non solo testimoniano le alterazioni metaboliche che sono la loro causa; ma, per conto proprio, determinano ulteriori alterazioni e, in definitiva, possono chiarire le ragioni del limitato sviluppo raggiunto dalle foglie degli individui mosaicati. Le ricerche di Tonzig et al. [2-..9] e di Marrè et al. [10-29..32] hanno infatti dimostrato che l'acido ascorbico esercita un'azione antiauxinica sia sulla crescita, sia su alcuni sistemi enzimatici respiratori, e che è proprio alla sua forma ossidata che va attribuito questo effetto inibente.

Alla luce di queste considerazioni risulta tanto più degno di rilievo il progressivo aumento di DHA (e la costante diminuzione del rapporto AA/DHA) che abbiamo rilevati nelle foglie di *Spinacia* affette da mosaico del cetriolo, nel passaggio da foglie molto giovani (che sono in piena fase distensiva, anche se ridotta rispetto a quella delle analoghe foglie dei controlli), a quelle più adulte, nelle quali è inibita ogni ulteriore crescita, ciò che fa sì che le loro dimensioni rimangano sempre molto inferiori a quelle delle foglie adulte delle piante sane.

Alcuni recenti risultati di Marrè et al. [33] sembrano inoltre indicare che l'azione del DHA sulla respirazione possa in buona parte essere ricondotta ad una inibizione delle reazioni enzimatiche che portano alla trasformazione ossidativa del glucosio-6-P a pentosio-P. Tale fatto, oltre a rivestire un valore del tutto particolare per i suoi riflessi sul metabolismo fotosintetico [34] della pianta, va posto in particolare rilievo anche in relazione all'importanza del metabolismo dei pentosio-P per la sintesi degli acidi nucleici e quindi per quella di nuove virusproteine, delle quali il ribosio rappresenta sovente uno dei costituenti essenziali.

Appare così la possibilità che una delle modifiche più importanti determinata in modo diretto dalla presenza del virus nelle piante di *Spinacia* (affette da mosaico del cetriolo) riguardi proprio il tenore delle foglie in acido ascorbico nella sua forma ossidata (e, di conseguenza, il rapporto AA/DHA), nel senso che un aumento (sia assoluto che relativo) di DHA potrebbe avere riflessi di primaria importanza sia sulla crescita delle cellule, sia sulla sintesi stessa di nuove virusproteine.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] GEROLA F. M. e VACCARI E., « Rendic. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », cl. Sc., 88, 582, (1955).
- [2] TONZIG S. e TREZZI F., « N. Giorn. Bot. it. », n. s., 57, 515 (1950).
- [3] TONZIG S. e TREZZI F., « Rendic. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. fis., mat. e nat. [VIII], 16, 434 (1954).

- [4] TONZIG S. e TREZZI F., «N. Giorn. Bot. it.», n. s., 57, 535 (1950).
- [5] TONZIG S. e TREZZI F., «N. Giorn. Bot. it.», n. s., 57, 549 (1950).
- [6] TONZIG S. e TREZZI F., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., [VIII], 17, 324, (1954).
- [7] TONZIG S. e TREZZI F., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., [VIII], 16, 695 (1954).
- [8] TONZIG S. TREZZI F., LAUDI G. e MARRÈ E., «Mem. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., [VIII], 4, 109 (1955).
- [9] MARRÈ E. e LAUDI G., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., in corso di stampa.
- [10] MARRÈ E. e LAUDI G., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., in corso di stampa.
- [11] ROE J. H. a. OESTERLING M. J., «Journ. Biol. Chem.», 152, 511 (1944).
- [12] MARRÈ E. e LAUDI G., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., [VIII], 16, 649 (1954).
- [13] HUSZAK ST., «Z. physiol. Chem.», 247, 239 (1937).
- [14] JOHNSON S. W. a. ZILVA S. S., «Biochem. J.», 31, 438 (1937).
- [15] KEILIN D. a. MANN T., «Proc. Roy. Soc.», 125, 187 (1938).
- [16] KUBOWITZ F., «Biochem. Z.», 299, 32 (1938).
- [17] SREERANGACHAR H. B., «Biochem. J.», 37, 653, 656, 661, 667 (1943).
- [18] JAMES W. O., ROBERTS E. A. H., BEEVERS H. a. DE KOCK P. C., «Biochem. J.», 43, 626 (1948).
- [19] STOTZ E., HARRER C. J., SCHULTZ M. D. a. KING C. G., «J. Biol. Chem.», 122, 407 (1938).
- [20] KEILIN D. a. HARTREE E. F., «Proc. Roy. Soc.», 125, 171 (1938).
- [21] LYLI WYND F., «The Bot. Review», 9, 397 (1943).
- [22] BAWDEN F. C., *Plant Viruses and Virus Diseases*, Waltham, Mass, U.S.A. (1943).
- [23] COOK M. T., *Viruses and Virus Diseases of Plants*, Burgess Pub. Comp., Minneapolis (1947).
- [24] SMITH K. M., *Recent Advances in the Study of Plant Viruses*, Churchill, London (1951).
- [25] WOODS M. W., «Centralbl. Bakt.», 5, 745 (1899).
- [26] WOODS M. W., «Science», 11, 17 (1900).
- [27] LUGER H., «Protoplasma», 44, 212 (1954).
- [28] MARRÈ E. e LAUDI G., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat. [VIII], 18, 402 (1955).
- [29] MARRÈ E., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., [VIII], 16, 758 (1954).
- [30] ARRIGONI O. e MARRE E., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., [VIII], 17, 390 (1955).
- [31] MARRÈ E. e ARRIGONI O., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis., mat. e nat., [VIII], 18, 539 (1955).
- [32] MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis. mat. e nat., [VIII], in corso di stampa.
- [33] MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O., «Rendic. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sc. fis. mat. e nat., [VIII], in corso di stampa.
- [34] CALVIN M., *The photosynthetic carbon cycle*, Relazione al Congresso Biochimico di Bruxelles, 111 (1955).

Fisiologia. — *Effetti della stimolazione del «lobus anterior» del cervelletto sull'attività elettrica della corteccia cerebrale* (*). Nota di PAOLO CREPAX, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Ho indagato, nel Cane e nel Gatto, le modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale provocate con la stimolazione elettrica del *lobus anterior* del cervelletto; i fenomeni che in tali condizioni si osservano, ho raffrontato con quelli provocati dall'attivazione del sistema reticolare ascendente.

La preparazione dell'animale consisteva nell'apertura di una breccia nelle parti ossee sovrastanti al cervelletto e nell'avvitamento alla teca cranica di elettrodi metallici, la cui punta giungeva in contatto della dura madre: veniva eseguita in anestesia locale associata a narcosi eterica leggera nel Cane e in semplice anestesia locale nel Gatto, nel quale la preparazione stessa veniva fatta dopo aver sezionato in narcosi eterica profonda il midollo spinale a livello C 1 [preparato «encefalo isolato» secondo Bremer⁽¹⁾; cfr. anche Bremer e Terzuolo⁽²⁾].

Per la stimolazione superficiale del cervelletto ho usato due fili di argento clorurato, del diametro di 0,1 mm circa, le cui estremità distavano 2-3 mm. L'attivazione del sistema reticolare ascendente [Moruzzi e Magoun⁽³⁾] era ottenuta, nel Gatto, stimolando direttamente la formazione reticolare mesencefalica con elettrodi concentrici, guidati mediante l'apparecchio stereotassico; oppure mi valevo di un procedimento indiretto, stimolando il capo centrale di nervi recisi (N. vago, nel Gatto; N. ischiatico, nel Cane) mediante eccitatori dipolari in Ag-AgCl (distanza interelettrodica 6 mm).

Gli stimoli elettrici, rappresentati da impulsi rettangolari monofasici, erano forniti da uno stimolatore Grass S-4, che consente il controllo indipendente della durata, del voltaggio e della cadenza degli impulsi stessi. L'artefatto di stimolazione veniva ridotto mediante il dispositivo *stimulus isolation unit*, che correda lo stimolatore stesso; inoltre, al fine di accertare la possibile interferenza di fenomeni di blocco degli amplificatori dell'apparecchio registratore, l'erogazione della tensione anodica agli stadi finali dell'elettroencefalografo è stata in alcuni casi interrotta durante la stimolazione.

Mediante un elettroencefalografo Grass mod. III D a 8 penne scriventi, i potenziali elettrici corticali venivano registrati con derivazione dipolare da punti simmetrici dei lobi frontali, parietali e occipitali, secondo schemi che si riportano nelle singole illustrazioni.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) F. BREMER, «C. r. Soc. Biol.», CXXII, 460 (1936).

(2) F. BREMER et C. TERZUOLO, «Arch. internat. Physiol.», LXII, 157 (1954).

(3) G. MORUZZI a. H. W. MAGOUN, «EEG clin. Neurophysiol.», I, 455 (1949).

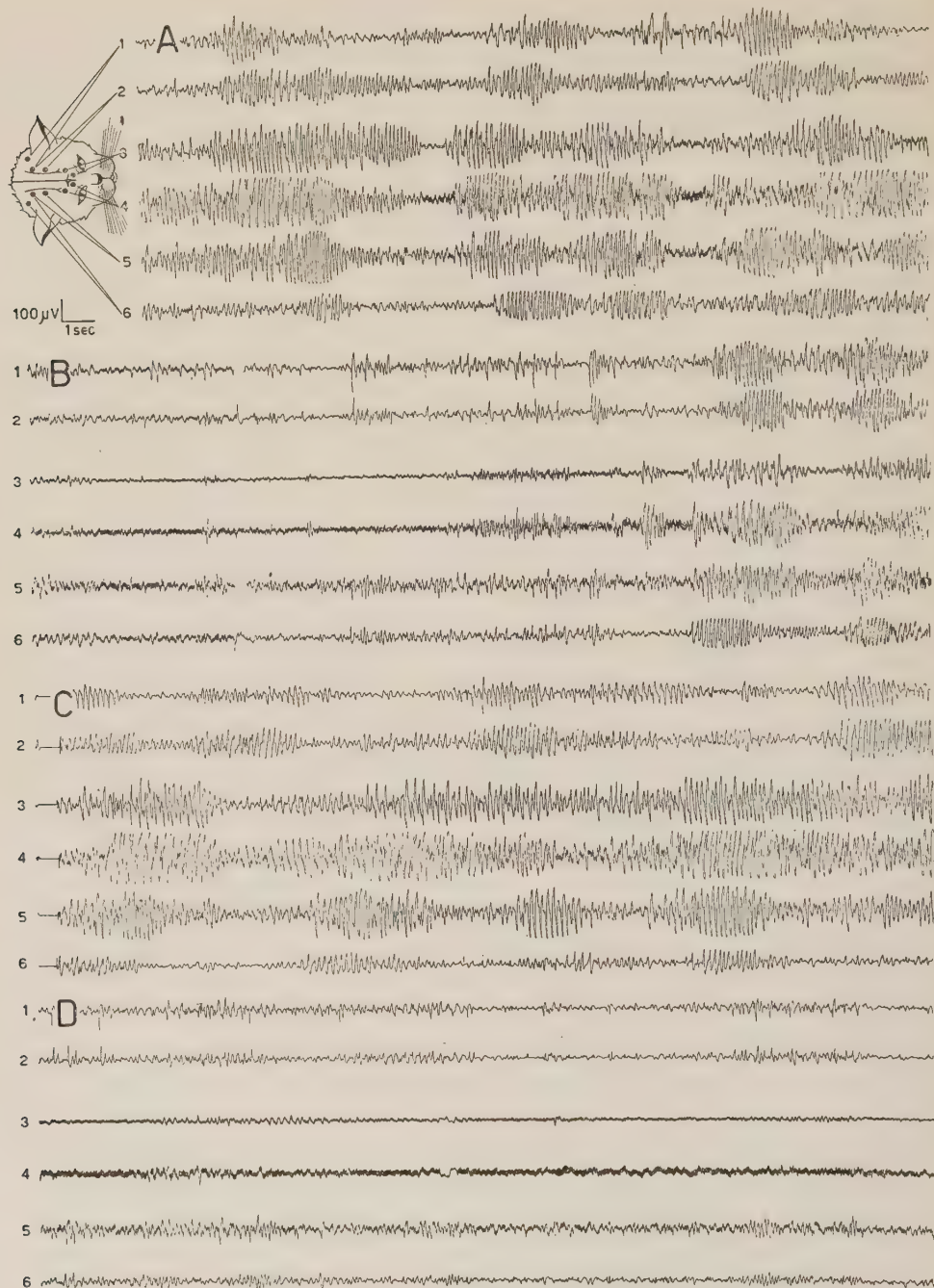


Fig. 1. - Modificazioni dell'attività elettrica cerebrale del Gatto «encefalo isolato» per effetto di stimolazioni, di diverso voltaggio e durata, di un punto mediano della lamella del lobulo V adiacente alla *fissura intraculminata prima*.

A: avanti la stimolazione. B: registrazione iniziata subito dopo la fine di una stimolazione di 3 V (300 Hz; 1 msec), durata 8 sec. C: 5 min dopo B e immediatamente avanti D. D: registrazione iniziata subito dopo la fine di una stimolazione di 6 V (300 Hz; 1 msec), durata 11 sec.

La stimolazione elettrica superficiale (300 Hz; 1 msec; 3-6 V; 5-15 sec) delle tre o quattro lamelle del *culmen* comprese tra la *fissura intraculminata prima* e la *fissura prima*⁽⁴⁾, provoca sia nel Cane sia nel Gatto una riduzione dell'ampiezza delle onde elettriche cerebrali, riduzione che d'ordinario è evidente in tutte le aree corticali esplorate (figg. 1 B, D e 2 D). È frequente che

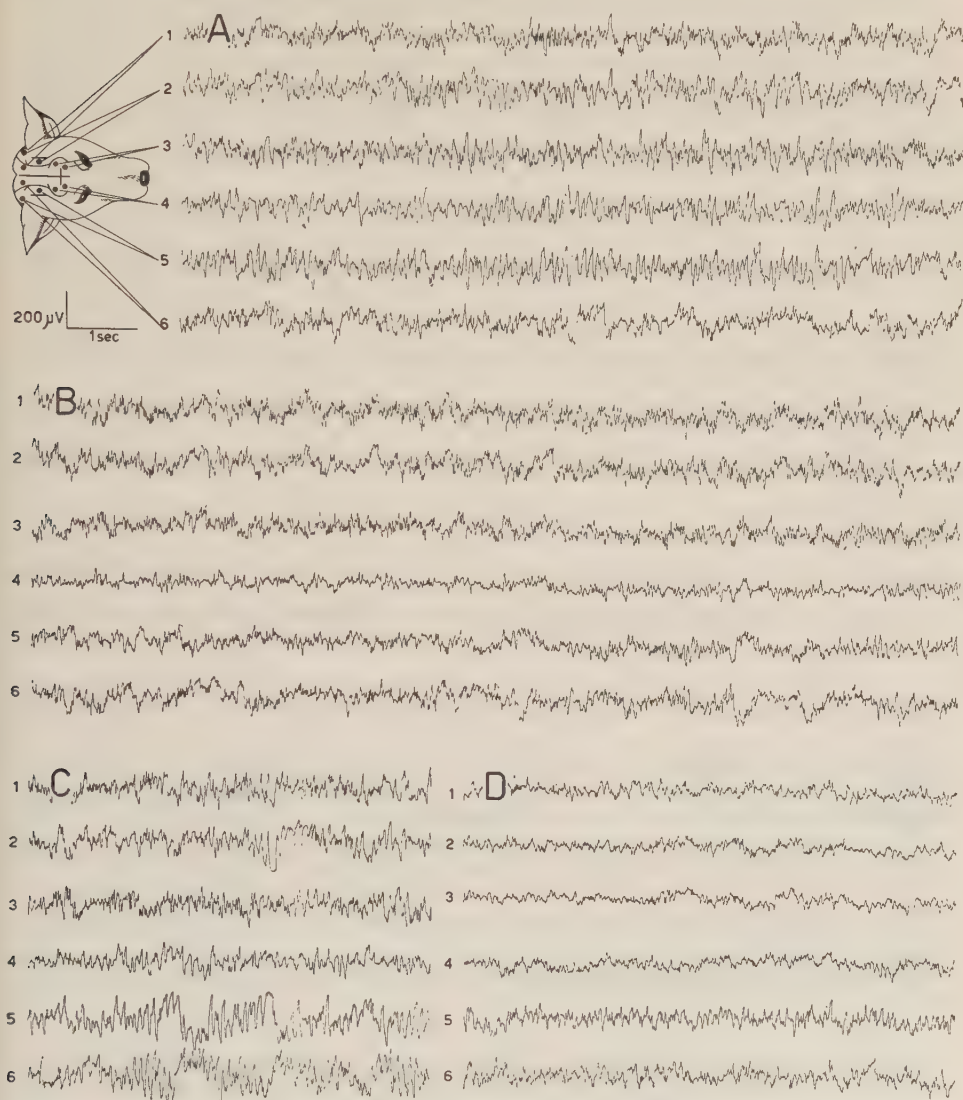


Fig. 2. — Modificazioni dell'attività elettrica cerebrale del Cane per effetto di stimolazioni, di diverso voltaggio e durata, di un punto mediano della lamella del *culmen* adiacente alla *fissura prima*.

A: 2 h dopo la fine della narcosi eterica e immediatamente avanti B. B: registrazione iniziata subito dopo la fine di una stimolazione di 2 V (300 Hz; 1 msec), durata 3 sec. C: 4 min dopo B e immediatamente avanti D. D: registrazione iniziata subito dopo la fine di una stimolazione di 4 V (300 Hz; 1 msec), durata 8 sec.

(4) Tali solchi delimitano il lobulo V, nel Gatto, secondo la suddivisione di LARSELL, [« J. comp. Neurol. », IC, 135 (1953)].

le modificazioni di ampiezza siano più nette nella corteccia motrice in confronto delle altre sedi di derivazione, mentre è raro che esse risultino circoscritte in quella sola zona (fig. 2 B). Nel qual caso si rileva che col crescere del voltaggio e della durata della stimolazione cerebellare, le modificazioni

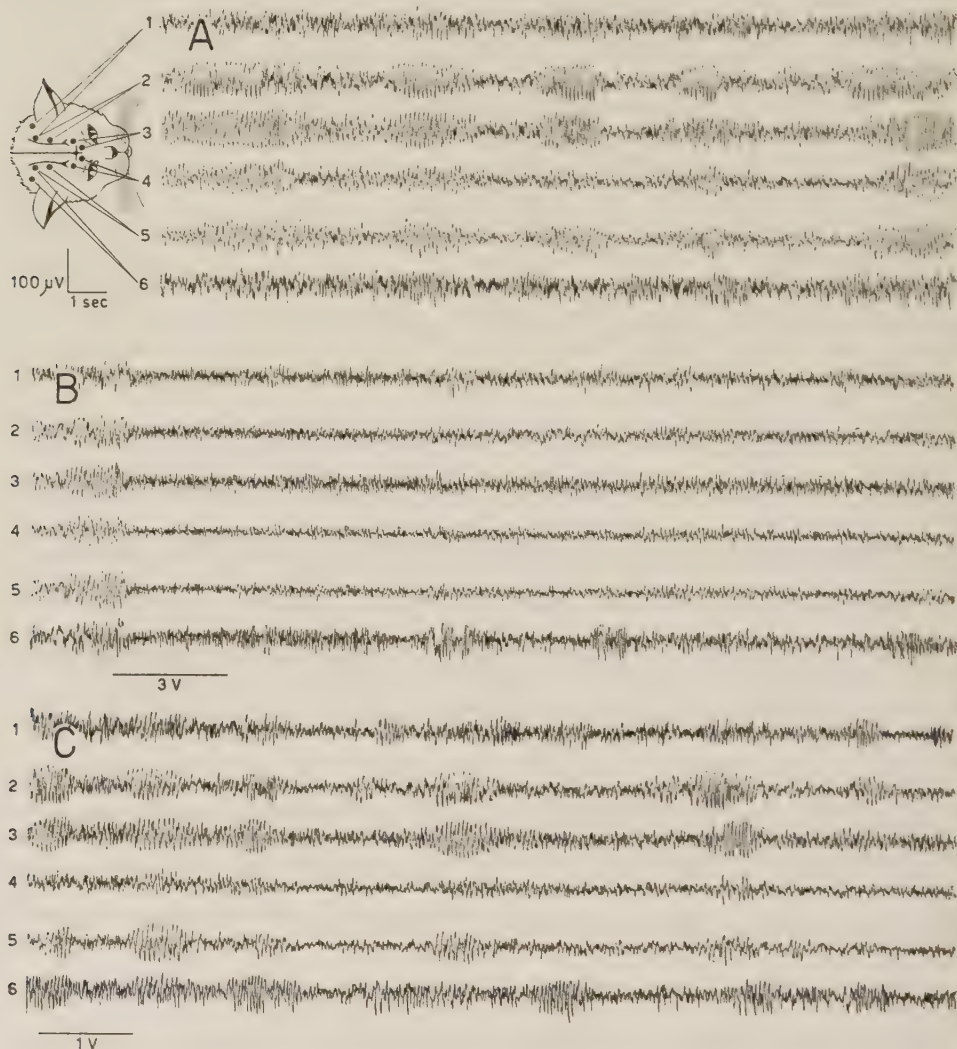


Fig. 3. - Modificazioni dell'attività elettrica cerebrale del Gatto «encefalo isolato» per effetto di stimolazioni, di diverso voltaggio e durata, di un medesimo punto della sostanza reticolare mesencefalica.

A: avanti la stimolazione. B: effetti di una stimolazione di 3 V (300 Hz; 1 msec), fatta nel tempo corrispondente alla linea tracciata sotto la parte iniziale del grafico. C: effetti di una stimolazione di 1 V (300 Hz; 1 msec) fatta 5 min dopo B, quando il grafico aveva ripreso i caratteri osservabili in A; la linea tracciata sotto la parte iniziale del grafico indica la durata della stimolazione.

del tracciato elettrico si estendono costantemente a tutte le aree corticali esplorate (fig. 2 D); il fenomeno poi si mantiene generalizzato, pur variando i parametri della stimolazione.

Gli effetti si manifestano nel corso della stimolazione e durano per 3-18 sec dopo il suo cessare. Poiché le variazioni di ampiezza dei potenziali cerebrali osservabili durante la stimolazione possono dipendere da fenomeni di saturazione degli amplificatori dell'apparecchio di registrazione, mi sono attenuto al criterio di considerare solo le modificazioni elettroencefalografiche che si notano dopo la fine della stimolazione stessa.

Ho così accertato come tali modificazioni manchino: quando più stimolazioni vengano effettuate a intervalli ravvicinati (1-2 min); quando si proceda all'applicazione di una soluzione di cocaina al 5% sulla zona del *culmen* dianzi delimitata; quando le condizioni locali o generali del preparato diventino scadenti; e infine, quando si somministri cloralosio in dosi assai piccole, come 5-15 mg/kg per via intravenosa. Per effetto del farmaco somministrato in tali dosi, il voltaggio minimo sufficiente per provocare il risveglio della corteccia non varia notabilmente nel caso della stimolazione del N. ischiatico e della sostanza reticolare mesencefalica, mentre aumenta del 50% circa per il N. vago. Solo la particolare suscettività all'azione depressiva del cloralosio e la breve durata contraddistinguono, in sostanza, gli effetti elettroencefalografici provocati con la stimolazione del *lobus anterior* dalla reazione di risveglio destata dalla stimolazione del N. ischiatico, del N. vago e della formazione reticolare mesencefalica: quanto all'aspetto, i due fenomeni non presentano generalmente caratteri distintivi netti. Anche gli effetti dell'attivazione del sistema reticolare ascendente sono di regola particolarmente evidenti a livello della zona motrice; e in certi casi possono manifestarsi unicamente nel tracciato derivato da detta zona, non diversamente da quelli prodotti dalla stimolazione del *culmen*, quando l'attivazione del sistema stesso sia parcellare (con l'impiego di stimoli di debole voltaggio e applicati in punti circoscritti della sostanza reticolare: fig. 3 C).

Stimoli della stessa frequenza applicati sulle lamelle che nella parte laterale del *lobus anterior* continuano il *culmen*, ovvero sulla parte vermiana e quella emisferica delle prime due lamelle del *lobulus simplex* adiacenti alla *fissura prima*, non destano alcuna modificazione persistente dell'attività elettroencefalografica, quando siano di voltaggio pari o poco superiore (25%) a quello degli impulsi dimostratisi efficaci nella stimolazione del *culmen*: anche con stimoli di voltaggio pari al doppio di questi, i risultati non mutano per ciò che si riferisce agli effetti della stimolazione delle zone laterali (sia del *lobus anterior*, sia del *lobulus simplex*) testé indicate, mentre mi è occorso di osservare nel Cane una riduzione generalizzata dell'ampiezza dei potenziali elettrici cerebrali per effetto della stimolazione della parte vermiana delle due lamelle del *lobulus simplex*.

La stimolazione superficiale, con impulsi di bassa cadenza (10-30 Hz; 1 msec; 5-15 sec), delle tre o quattro lamelle aborali del *culmen* e di quelle che le continuano lateralmente [circa ai particolari effetti destati dalla stimolazione di bassa cadenza del *lobus anterior*, cfr. Moruzzi⁽⁵⁾], non provoca

(5) G. MORUZZI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXIV, 397, 753 e 755 (1948).

modificazioni elettroencefalografiche manifeste, anche quando venga effettuata con stimoli di voltaggio superiore a quello apparso efficace nella stimolazione delle lamelle del *culmen* con l'uso di impulsi di cadenza elevata.

Alcuni risultati sperimentali, resi noti di recente, hanno attinenza con le osservazioni ora riferite. Henneman, Cooke e Snider ⁽⁶⁾ hanno osservato nel Gatto come la stimolazione superficiale del *lobus anterior*, con impulsi elettrici isolati di breve durata (0,5-1 msec), provochi la comparsa di potenziali riflessi esclusivamente nell'area motrice contralaterale rispetto all'emilobo stimolato; la latenza delle risposte cerebrali è di 3-5 msec e l'estensione della zona corticale di proiezione risulta diminuita per effetto del cloralosio o di altri narcotici. Circa alla via seguita dagli impulsi trasmessi dal *lobus anterior* alla corteccia motrice, gli Autori non si pronunciano: va rilevato come la tecnica da loro impiegata appaia meglio adatta alla delimitazione di sistemi odologici oligosinaptici; per di più, considerata la brevità della latenza delle risposte cerebrali e i confini assai ben definiti della zona corticale in cui le risposte stesse sono manifeste, poteva sembrare non verosimile che le fibre colleganti *lobus anterior* e corteccia facciano parte del sistema reticolare ascendente.

Cooke e Snider ⁽⁷⁾ hanno poi osservato nel Gatto curarizzato, per effetto della stimolazione del *lobus anterior* (30 V, 12 Hz, 0,5 msec per 14 sec), la comparsa di un'attività pulsatoria rapida (30-40/sec) nei giri pericruciato ed ectosilviano, in assenza di analoghe modificazioni dell'attività dei nuclei talamici di proiezione (*N. ventrolateralis*). Gli Autori rilevano le somiglianze che presentano tali fenomeni, del resto analoghi a quelli osservati per la stimolazione di altre parti del cervelletto, con quelli provocati con la stimolazione delle regioni anteriori della sostanza reticolare e pensano che gli effetti delle stimolazioni cerebellari si esplichino mediante connessioni cerebello-reticolari.

In esperimenti eseguiti nel Gatto « encefalo isolato », Mollica, Moruzzi e Naquet ⁽⁸⁾ trovano che la polarizzazione positiva (1-1,5 mA) della superficie della parte vermiana del *lobus anterior* provoca una reazione di arresto tipica, la quale può durare alcuni secondi o anche parecchi minuti dopo la fine del passaggio della corrente. In questo secondo caso, si rileva come la reazione di arresto persista anche dopo che è ridivenuta normale l'attività delle unità bulbo-reticolari, il cui ritmo pulsatorio era stato alterato per la polarizzazione cerebellare [cfr. anche M. Scheibel, A. Scheibel, Mollica e Moruzzi ⁽⁹⁾]. Le modificazioni elettroencefalografiche descritte vengono sopprese mediante il cloralosio, somministrato in dosi estremamente piccole. A riprova della specificità degli effetti osservati con la stimolazione della zona corticale indicata, gli Autori riferiscono che la stimolazione della parte emisferica

(6) E. HENNEMAN, P. M. COOKE a. R. S. SNIDER, « Res. Publ. Ass. Res. nerv. ment. Dis. », XXX, 317 (1952).

(7) P. M. COOKE a. R. S. SNIDER, « EEG clin. Neurophysiol. », V, 563 (1953).

(8) A. MOLLICA, G. MORUZZI et R. NAQUET, « EEG clin. Neurophysiol. », V, 571 (1953).

(9) M. SCHEIBEL, A. SCHEIBEL, A. MOLLICA a. G. MORUZZI, « J. Neurophysiol. », XVIII, 309 (1955).

del *lobus anterior* e quella del *crus I* sono inefficaci, anche impiegando correnti d'intensità molto più elevata.

In conclusione, credo che i fenomeni osservati, analogamente a quelli descritti da Cooke e Snider⁽⁷⁾ e da Mollica, Moruzzi e Naquet⁽⁸⁾, possano interpretarsi come attuati mediante le proiezioni ascendenti del sistema reticolare. Né può riguardarsi come un argomento sostanzialmente in contrasto con tale interpretazione il fatto, rilevato anche da Mollica, Moruzzi e Naquet⁽⁸⁾, che gli effetti elettroencefalografici provocati con la stimolazione del *lobus anterior* sono soppressi dal cloralosio in dosi inefficaci a modificare la soglia della reazione di risveglio destata con la stimolazione del N. ischiatico ovvero della formazione reticolare mesencefalica⁽¹⁰⁾. Quanto alle risposte cerebrali *point-to-point* osservate da Henneman, Cooke e Snider⁽⁶⁾, conviene considerare la possibilità di un'azione circoscritta del sistema reticolare sulla corteccia cerebrale (cfr. la fig. 3) e del cervelletto sulla formazione reticolare⁽⁹⁾.

Fisiologia. — *Modificazioni dell'attività elettrica del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto per effetto della sostanza P*^(*). Nota di PAOLO CREPAX e FRANCESCO INFANTELLINA, presentata^(**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Alla sostanza P, individuata da v. Euler e Gaddum⁽¹⁾, è stata attribuita una partecipazione alla trasmissione degli impulsi nel sistema nervoso centrale. Tale attribuzione è per altro motivata esclusivamente dalla presenza presso che ubiquitaria della sostanza P nelle diverse parti del nevrasso [Pernow⁽²⁾, Kopera e Lazarini⁽³⁾, Lembeck⁽⁴⁾, Zetler e Schlosser⁽⁵⁾, Gaddum,

(10) La particolare suscettività all'azione depressiva del cloralosio che presentano le risposte generalizzate destate nella corteccia cerebrale dalla stimolazione del *lobus anterior*, può dipendere dagli effetti esercitati dal farmaco sulla corteccia cerebellare ovvero sugli elementi della via di trasmissione degli impulsi. Da quanto si rileva nei risultati esposti, l'azione del farmaco sembra mostrare le conseguenze del maggiore o minore numero di unità reticolari che si trovano controllate dalle singole afferenze: si può pensare, per esempio, che l'azione depressiva manifestata dal cloralosio sugli effetti elettroencefalografici della stimolazione del N. vago sia ricollegabile col fatto che le proiezioni delle fibre afferenti di questo nervo sulla formazione reticolare sono così scarse da spiegare come l'esplorazione microelettrodica della medesima non abbia finora permesso di ritrovare unità che mostrino gli effetti di impulsi vagali⁽⁹⁾. È vero che le proiezioni del *lobus anterior* si estendono a un numero di unità reticolari complessivamente cospicuo⁽⁹⁾, ma la stimolazione di una parte estremamente ristretta della corteccia cerebellare non può che attivare un'esigua porzione delle fibre cerebello-reticolari.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) U. S. von EULER a. J. H. GADDUM, « J. Physiol. », LXXII, 74 (1931).

(2) B. PERNOW, « Acta physiol. scand. », XXIX, suppl. 105 (1953).

(3) H. KOPERA u. W. LAZARINI, « Arch. exp. Path. Pharmac. », CCXIX, 214 (1953).

(4) F. LEMBECK, « Arch. exp. Path. Pharmac. », CCXIX, 197 (1953).

(5) G. ZETLER u. L. SCHLOSSER, « Pflüger's Arch. », CCLIX, 303 (1954).

Amin e Crawford ⁽⁶⁾]; d'altra parte, secondo Feldberg ⁽⁷⁾, « no central effects of this substance are known ». Un contributo a questo problema costituiscono le presenti indagini, che hanno per oggetto gli effetti della sostanza P sul lembo isolato della corteccia cerebrale di Gatto [Burns ⁽⁸⁾].

Il preparato di « slab » corticale veniva allestito secondo il procedimento descritto da Burns ⁽⁸⁾ e da Burns e Grafstein ⁽⁹⁾. La derivazione dei potenziali elettrici corticali era monopolare: come elettrodo critico veniva usata una micropipetta riempita con soluzione di NaCl al 0,9 %; l'elettrodo indifferente, una piccola sfera di Ag-AgCl, veniva posto su una zona di corteccia necrotizzata a 1 cm circa da quello critico. La coppia di elettrodi di derivazione era collegata, mediante un ripetitore catodico, con un preamplificatore differenziale ad accoppiamento diretto [Tönnies ⁽¹⁰⁾]; l'oscillografo usato era il mod. 322 Allen Du Mont. Per la stimolazione del preparato ci siamo serviti di uno stimolatore Grass mod. S-4 e di elettrodi costituiti da fili di platino, le cui estremità smusse distavano tra loro mm 0,5. Lo stimolo elettrico isolato era costituito da onde rettangolari della durata di 0,5 msec: si faceva variare la tensione a fine di accertare il valore soglia. Per la stimolazione iterativa abbiamo impiegato impulsi rettangolari di durata costante (0,5 msec), che per 5 sec si succedevano alla cadenza di 100 al secondo; i valori della tensione corrispondevano al 150-200 % circa dei valori di soglia determinati, nel preparato in esame, per lo stimolo singolo. Altri dettagli concernenti il procedimento sperimentale, sono indicati in una Memoria precedente [Infantellina ⁽¹¹⁾].

Gli esperimenti sono stati eseguiti con sostanza P altamente purificata (80 unità v. Euler per mg), cortesemente messa a nostra disposizione dal prof. U. S. v. Euler e dal dott. B. Pernow. La sostanza, disciolta al momento dell'uso in soluzione di NaCl al 0,9 %, è stata applicata localmente sulla corteccia, secondo il procedimento di Baglioni e Magnini ⁽¹²⁾, ovvero introdotta nella A. carotide comune contralaterale rispetto all'emisfero utilizzato per allestire il lembo corticale. Il trattamento locale, con una soluzione contenente 100 unità v. Euler/ml (pH 6,8), durava 6-8 min ed era effettuata nel tratto di corteccia interposto tra l'elettrodo di stimolazione e quello di derivazione e tutt'intorno a quest'ultimo. Il volume della soluzione di sostanza P che veniva iniettato per via intracarotidea, era sempre 1 ml, qualunque fosse la quantità di sostanza da iniettare (da 20 a 100 unità v. Euler per animale; il peso medio dei Gatti impiegati era di 2 kg).

In alcuni esperimenti abbiamo effettuato l'applicazione di sostanza P dopo trattamento locale del lembo con eserina (soluzione di salicilato di ese-

(6) J. H. GADDUM, A. H. AMIN a. T. B. B. CRAWFORD, « J. Physiol. », CXXVI, 96 (1954).

(7) W. S. FELDBERG, « Pharmacol. Rev. », VI, 85 (1954).

(8) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXI, 50 (1950).

(9) B. D. BURNS a. B. GRAFSTEIN, « J. Physiol. », CXVIII, 412 (1952).

(10) J. F. TÖNNIES, « Rev. sci. Instrum. », IX, 95 (1938).

(11) F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XXXIX, 209 (1955).

(12) S. BAGLIONI e M. MAGNINI, « Arch. Fisiol. », VI, 240 (1909).

rina all'1%, applicata per 6 min), che modifica gli effetti che sul lembo esercitano alcune sostanze, con la stricnina [Infantellina⁽¹³⁾] e la morfina [Crepax e Infantellina⁽¹⁴⁾].

I risultati ottenuti sono i seguenti. 1° Com'è noto [Burns^(8, 15), Infantellina⁽¹¹⁾], il lembo completamente isolato di corteccia può non manifestare affatto un'attività elettrica ovvero essere sede di oscillazioni di potenziale, che insorgono in modo apparentemente spontaneo e di continuo si rinnovano. Il trattamento locale con sostanza P provoca talora la comparsa di attività elettrica in preparati che in precedenza ne erano risultati privi ovvero intensifica l'attività medesima, per quanto concerne sia la frequenza delle onde e dei complessi d'onda spontanei, sia l'ampiezza degli accidenti che li costituiscono.

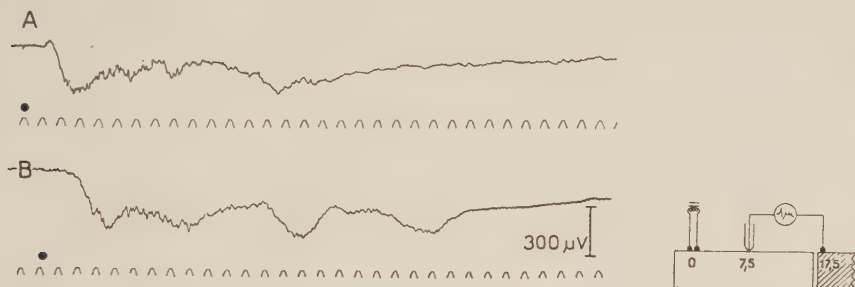


Fig. 1. — Effetti della sostanza P sulla risposta del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto a stimoli elettrici singoli di voltaggio liminale.

La stimolazione elettrica è indicata da un cerchio pieno. La deflessione del tracciato verso l'alto corrisponde a una variazione negativa del potenziale. Lo schema disegnato a destra in basso indica la posizione degli elettrodi di stimolazione e di derivazione, e inoltre i valori in millimetri delle rispettive distanze; la parte tratteggiata corrisponde alla zona di corteccia elettrocoagulata. Tempo = 10 Hz.

Tra A e B il lembo è stato trattato per 5 min con una soluzione di sostanza P contenente 100 unità v. Euler per ml. A, avanti il trattamento. B, 11 min dopo l'inizio del trattamento: il voltaggio liminale è del 13% inferiore di quello determinato in A.

2° La risposta del lembo a uno stimolo elettrico di sufficiente voltaggio (figg. 1 A e 2 A) è normalmente costituita da una deflessione superficiale-positiva lenta, intercisa da oscillazioni asincrone della frequenza di 65 Hz; essa è d'ordinario preceduta, quando la distanza tra il punto stimolato e quello di derivazione non sia maggiore di 5-10 mm, da un'onda rapida superficiale-negativa. L'applicazione locale di sostanza P riduce il valore dei voltaggi liminali (fig. 1 B): questo effetto è costante, quando l'eccitabilità del preparato non sia troppo elevata né troppo depressa, mentre può mancare in altri casi, le variazioni generalmente essendo sempre piccole (intorno al 10%). Nel tempo stesso si modificano i caratteri della risposta: compare, ovvero si accentua la deflessione iniziale superficiale-negativa e aumenta (in media del 30-40%) l'ampiezza della deflessione superficiale-positiva; la durata della quale non presenta sempre le stesse variazioni, risultando ora accorciata ora

(13) F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », in corso di stampa.

(14) P. CREPAX e F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », in corso di stampa.

(15) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXXV, 427 (1954).

allungata (variazioni massime: -40% e $+100\%$). La diminuzione della durata di solito si accompagna a modificazioni dell'aspetto della deflessione superficie-positiva, la quale appare intercisa da onde meno ampie e meno frequenti che di regola. L'aumento di durata della deflessione per lo più non si associa a variazioni di forma della risposta e si osserva, con particolare frequenza, in quei preparati in cui l'applicazione di sostanza P rafforza l'attività elettrica ritmica e prolunga la risposta alla stimolazione elettrica iterativa (fig. 1 B).

3° La stimolazione iterativa provoca in condizioni normali la comparsa di una o poche scariche di onde, durante la stimolazione medesima e talora nei primi 1-2 sec successivi: l'attività di preparati siffatti non manifesta modificazioni sostanziali per azione della sostanza P, se si eccettua una intensificazione dell'attività elettrica corticale nel corso della stimolazione stessa. In alcuni preparati normali, la stimolazione iterativa (fig. 3 A) provoca la

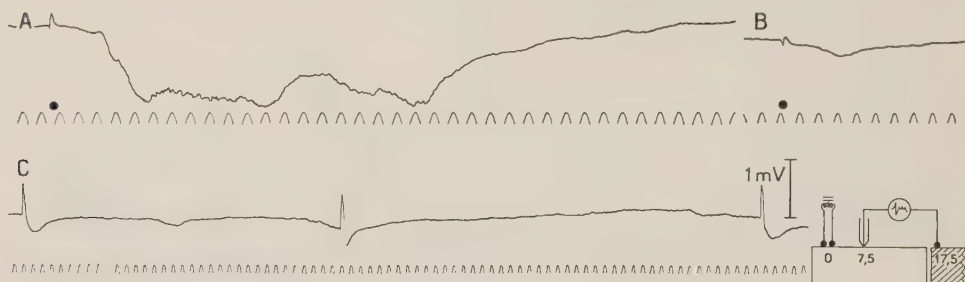


Fig. 2. - Effetti della sostanza P sull'attività elettrica del lembo isolato di corteccia cerebrale (Gatto) pretrattato con eserina.

Per il segno delle deflessioni e per le indicazioni affiancate ai tracciati, si veda la leggenda della fig. 1.

Tra A e B il lembo è stato trattato per 6 min con una soluzione di salicilato di eserina all'1 p. 100; tra B e C, trattamento per 5 min con una soluzione di sostanza P contenente 100 unità v. Euler per ml: l'applicazione di tale sostanza è stata iniziata 9 min dopo l'inizio del trattamento con eserina. A, avanti il trattamento: risposta a uno stimolo di voltaggio liminale. B, 8 min dopo l'inizio del trattamento con eserina: la soglia è del 34 % superiore a quella determinata in A. C, 6 min dopo l'inizio dell'applicazione di sostanza P: oscillazioni di potenziale non provocate da stimoli elettrici.

comparsa di onde elettriche, riunite in complessi variamente costituiti, che si susseguono per un certo tempo (3-30 sec) dopo la fine della stimolazione, separati da pause di durata varia: in questi casi, l'applicazione di sostanza P prolunga fino a cinque volte la durata dell'attività destata dalla stimolazione (fig. 3 B), aumenta la frequenza con cui si succedono i complessi di onde (per esempio, si passa da due complessi al secondo a tre o quattro) e l'ampiezza delle onde che li costituiscono (aumenti del 100-150 %). I caratteri dei complessi appaiono il più spesso immutati; ma nei casi in cui, avanti l'applicazione della sostanza, le deflessioni superficie-positiva non erano precedute da onde superficie-negative, spesso si osserva la comparsa di queste.

4° Il pretrattamento con eserina non altera in modo netto gli effetti della sostanza P sul lembo: in tali condizioni riesce particolarmente agevole cogliere l'azione caratteristica della sostanza P sulla deflessione superficie-negativa. In effetto, tale deflessione, che per la sola applicazione di eserina spesso prontamente scompare, si ripresenta dopo trattamento con sostanza P (fig. 2 C).

5° Le modificazioni della risposta del lembo corticale a stimoli elettrici (isolati o ripetuti) e della sua attività ritmica, che si osservano per effetto della sostanza P iniettata nella A. carotide, sono assai simili a quelle provocate con l'applicazione locale della sostanza stessa. Circa ai rapporti tra quantità di sostanza P iniettata e grado delle modificazioni osservate, dosi comprese tra 100 e 40 unità v. Euler hanno provocato effetti identici sotto tutti gli aspetti: per altro, impiegando le dosi maggiori, essi si palesano più rapidamente e durano più a lungo. Con dosi inferiori a 40 unità v. Euler, gli effetti propri del prodotto tendono a farsi incostanti. Le variazioni dell'attività elettrica prodotte dalla sostanza somministrata per via intracarotidea, al pari di quelle ottenute con la sua applicazione locale, perdurano 30-40 min circa.

Prima di esaminare i risultati sperimentali, occorre stabilire se le modificazioni della reattività dei neuroni corticali provocate dalla sostanza P dipen-

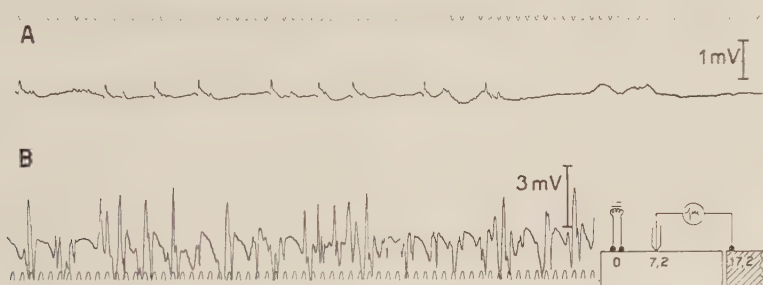


Fig. 3. — Effetti della sostanza P sulla risposta del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto alla stimolazione iterativa.

Per il segno delle deflessioni e per le indicazioni affiancate ai tracciati, si veda la leggenda della fig. 1.

Tra A e B il lembo è stato trattato per 7 min con una soluzione di sostanza P contenente 100 unità v. Euler per ml. A, prima del trattamento: attività destata da una stimolazione iterativa (8,2 V; 100 Hz; 0,5 msec; 5 sec) e durata complessivamente per 12 sec dopo la fine della stimolazione. B, 20 min dopo l'inizio del trattamento: attività destata da una stimolazione iterativa avente le medesime caratteristiche di quella i cui effetti sono riprodotti in A e durata per 29 sec.

dano da un'azione che essa esercita direttamente sugli elementi cellulari ovvero siano la conseguenza di alterazioni circolatorie. L'azione della sostanza P sui vasi cerebrali non è stata indagata; e non vi è dubbio che solo lo studio degli effetti di tale principio attivo sui vasi piali potrebbe fornire elementi diretti per conoscere in quale misura le modificazioni funzionali dei vasi medesimi partecipino al meccanismo di formazione dei fenomeni da noi osservati. Che tuttavia la natura circolatoria di tali effetti sia verosimilmente da escludersi, si può credere sul fondamento delle seguenti considerazioni. Innanzi tutto, il campione di sostanza P da noi impiegato è di un alto grado di purezza: si sa che quanto maggiore è il grado di purificazione del prodotto, tanto minore è l'abbassamento della pressione generale del sangue che esso provoca [v. Euler e Gaddum ⁽¹⁾, Pernow ⁽²⁾]. In secondo luogo i nostri esperimenti sono stati eseguiti in una specie, il Gatto, il cui sistema vasale è relativamente poco sensibile all'azione della sostanza P [Pernow ⁽²⁾]. Infine, le alterazioni della reattività degli elementi nervosi da noi osservate durano

più a lungo (30-40 min) degli effetti vasali della sostanza: così, l'azione vasodilatatrice che questa manifesta sui vasi dell'orecchio denervato di Coniglio non si protrae per oltre 3 min [Holton e Holton ⁽¹⁶⁾].

Le diverse modificazioni funzionali degli elementi nervosi si manifestano per effetto di quantità di sostanza P che verosimilmente non sono maggiori di quelle presenti in condizioni fisiologiche nel tessuto nervoso. Infatti, tenuto conto dei limiti assai larghi di approssimazione di cui è possibile valersi per un simile calcolo, è possibile in base a ipotesi semplificative, e solo nel caso della somministrazione intrarteriosa della sostanza, stabilire la quantità di principio attivo distribuita per g di tessuto nervoso. Così, 40 unità v. Euler di sostanza P (dose minima attiva per via intracarotidea, secondo le nostre determinazioni) corrisponderebbero a 2 unità per g di tessuto cerebrale, considerando pari a g 20 il peso degli emisferi, esclusi i gangli della base, e supponendo che la sostanza si ripartisca in modo uniforme e venga interamente fissata dai tessuti il cui letto capillare per primo essa attraversa. Ora la quantità di sostanza P dosata nelle diverse parti del tessuto nervoso varia tra 10 e 170 unità v. Euler per g di tessuto [Pernow ⁽²⁾].

Quanto al significato del principio attivo rispetto all'attività funzionale dei centri nervosi, va rilevato che le alterazioni delle proprietà reattive dei neuroni che esso provoca, non hanno certo un'importanza confrontabile con quelle provocate in analoghe condizioni dall'acetilcolina [Infantellina ⁽¹¹⁾], alle cui attribuzioni funzionali sono state ritenute analoghe quelle della sostanza P.

Fisiologia. — *I fattori che intervengono nel regolare gli scambi di liquido attraverso la pleura viscerale* ^(*). Nota di E. AGOSTONI, A. TAGLIETTI e I. SETNIKAR, presentata ^(**) dal Socio R. MARGARIA.

In una precedente comunicazione (Setnikar, Agostoni e Taglietti 1955) si era giunti alla conclusione che in condizioni fisiologiche la depressione pleurica non è l'espressione della forza di retrazione elastica del polmone e si era emessa l'ipotesi che il fattore principale nel determinare la depressione pleurica fosse la pressione oncotica del plasma nei capillari della pleura viscerale. In questi capillari, che appartengono prevalentemente al piccolo circolo (Bruni 1948), la pressione idraulica è di circa 5-10 mm Hg (Hellems e Coll. 1948) e quindi molto inferiore alla pressione oncotica del plasma che è di 25-30 mm Hg. Il liquido pleurico, che è quasi privo di proteine, deve perciò essere assorbito con una pressione pari alla differenza tra la pressione colloid-osmotica delle proteine plasmatiche e la pressione idraulica dei capillari:

(16) F. A. HOLTON a. P. HOLTON, « J. Physiol. », CXVIII, 310 (1952).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

questa differenza di pressione è di circa $-20-15$ mm Hg ed è superiore alla forza elastica di retrazione del polmone.

Per vagliare questa ipotesi era necessario studiare l'assorbimento dei liquidi a livello della pleura viscerale e misurare la pressione con la quale il liquido interstiziale o la soluzione fisiologica sono assorbiti.

METODO. — A tale scopo si è opportunamente adattato alle condizioni sperimentali il dispositivo di Hepp (1936) per la misura della pressione colloid-osmotica. Tale dispositivo è costituito da una camera in cui viene posto il liquido in esame e di una membrana semipermeabile tra questo e la soluzione priva di colloid posta in sottile strato sul fondo della camera. Le variazioni di volume della soluzione priva di colloid sono misurate in un capillare che comunica col fondo della camera. La pressione colloid-osmotica si può valutare quantitativamente determinando la depressione alla quale è necessario sottoporre la soluzione priva di colloid affinché non vi sia diffusione osmotica di liquido verso la soluzione proteica.

Era necessario risolvere questi problemi: *a*) applicare l'apparecchio alla pleura viscerale in modo ermetico e senza provocare alterazioni della circolazione capillare, *b*) ridurre al minimo possibile gli spostamenti della pleura viscerale che rappresentava la membrana semipermeabile perché, come ha potuto dimostrare Meschia (1954), la rigidità della membrana semipermeabile è una condizione indispensabile per ottenere misure precise e rapide.

Nella figura 1 è schematizzato lo strumento costruito a questo scopo. Esso consiste in una camera rotonda di plexiglas (A) del diametro di 45 mm e dello spessore di 10 mm. Su una delle facce si trova una cavità centrale del diametro di 25 mm fonda 2 mm in cui si mette della soluzione fisiologica. Per impedire il più possibile i movimenti della pleura questa è sostenuta da un diaframma di plexiglas leggermente convesso (B) bucherellato da fori del diametro di 1 mm distanti 1 mm. La cavità centrale comunica con il capillare di vetro (C) del diametro interno di 0,5 mm, dove si leggono le variazioni di volume del liquido privo di proteine, dovute alla diffusione attraverso la sierosa pleurica.

Per tenere accollata la camera di misura alla parete pleurica si praticava una depressione in un canale periferico D, posto nello spessore della parete della camera; questo canale, attraverso due tubi (V), era connesso con un recipiente (F) di grande capacità (ca. 25 l.) nel quale precedentemente si era stabilita una depressione. La grande capacità del recipiente F assicurava che la depressione nel canale D rimanesse costante durante tutto il corso dell'esperimento. La comunicazione tra la cavità anulare E, dove si innestavano i tubi V, e il canale D avveniva attraverso numerosi fori del diametro di 1 mm e ciò per garantire la pervietà da D a F. In questo modo si otteneva una depressione uniforme in tutto il canale D quando la camera veniva applicata alla superficie pleurica. Per effettuare le determinazioni sperimentali si appoggiava la camera A alla pleura viscerale, quindi si stabiliva la comunicazione tra il tubo V e la camera F con il rubinetto a tre vie. In questo modo la depressione esistente nella camera F, attraverso il canale D faceva aderire ermetica-

mente la camera di plexiglas alla pleura viscerale. La depressione ottimale per tenere aderente la pleura allo strumento durante tutto il corso dell'esperimento era da -30 a -60 mm. Hg. Con tale depressione non si avevano alterazioni circolatorie a carico della pleura in esame; solo raramente è com-

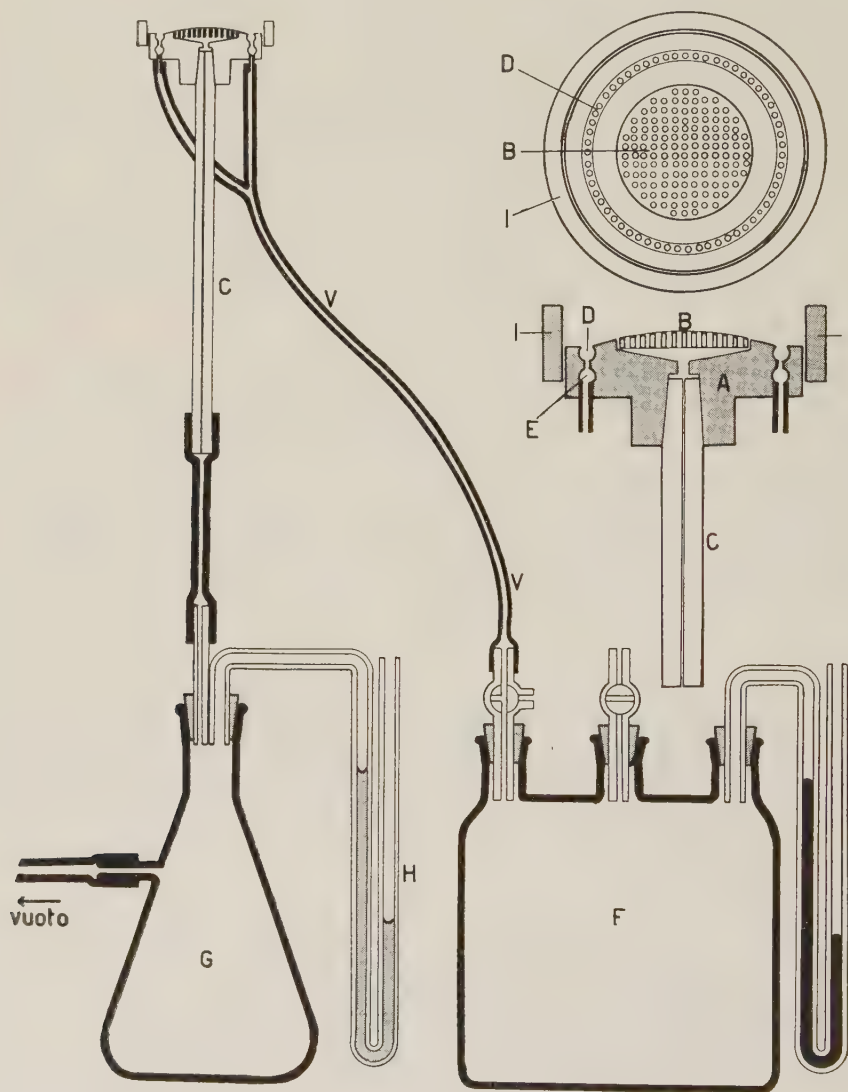


Fig. 1. - A sinistra e in basso tutto il dispositivo montato. In alto a destra particolare della camera di plexiglas. La descrizione è esposta nel testo.

parso qualche segno di stasi, ma limitato ad alcuni punti della pleura in corrispondenza del canale D. La depressione nel canale D non interferiva in alcun modo con gli scambi di liquido nella camera di misura e anche forti variazioni di depressione in F non producevano spostamenti del liquido nel capillare C.

La soluzione fisiologica, contenuta nella camera di plexiglas che attraverso il disco B era a contatto con la pleura, veniva sottoposta ad una determinata depressione per mezzo della beuta da vuoto G, connessa con un manometro ad acqua H. La depressione veniva regolata sino ad annullare la diffusione del liquido attraverso la pleura.

Per il buon funzionamento del dispositivo era indispensabile che nel sistema di misura non vi fossero bollicine di aria. Per evitare che al momento dell'applicazione dello strumento al lobo polmonare rimanesse dell'aria tra la superficie pleurica ed il disco forato B si sono seguiti i seguenti accorgimenti.

Il cane era posto, durante l'applicazione, in posizione tale che il lobo polmonare avesse la superficie in esame rivolta verso il basso, così che lo strumento poteva essere applicato dal basso all'alto. Un anello di plexiglas (I) permetteva di mantenere una falda di liquido al disopra dello strumento prima dell'applicazione. Man mano che lo strumento veniva accostato al lobo polmonare l'anello I retrocedeva ed il liquido contenuto in esso traboccava perifericamente impedendo così che dell'aria potesse rimanere tra pleura e camera di misura. D'altra parte, la trasparenza dello strumento permetteva di controllare l'assenza di aria nel sistema ad applicazione avvenuta.

Il lobo polmonare e lo strumento venivano tenuti durante il corso dell'esperimento coperti con un foglio di polietilene al di sotto del quale era fatta scorrere lentamente della soluzione fisiologica a 37°C, in modo che il lobo polmonare fosse costantemente umettato. Il calore per mantenere il preparato a temperatura di circa 37°C veniva fornito da una lampada ad incandescenza da 40 W posta ad opportuna distanza.

Veniva curato che le variazioni di volume del lobo polmonare impresse dalla pompa per la respirazione artificiale fossero molto piccole perché non disturbassero l'osservazione dei cambiamenti di volume nella camera. Per abolire i movimenti respiratori spontanei si praticava una anestesia profonda con Dial e, se necessario, si ricorreva al curaro. Con queste precauzioni e la particolare forma del disco B le oscillazioni respiratorie della pleura a contatto con lo strumento erano minime, sì da provocare movimenti ritmici del menisco nel capillare C di soli 2-3 mm.

Prima di essere usato *in vivo*, l'apparecchio descritto venne collaudato *in vitro* applicandolo a una membrana di cellofan e misurando in questo modo la pressione oncotica di soluzioni di emoglobina a varia concentrazione.

Le esperienze sono state eseguite su cani del peso da 12 a 19 kg in anestesia barbiturica profonda (Dial endovena 60-70 mg/kg). Il torace era aperto in 5° e 6° spazio intercostale destro, veniva asportata parzialmente la sesta costa ed esteriorizzato il lobo medio. La respirazione era praticata con una pompa di Starling, mantenendo una resistenza espiratoria costante e tale da impedire un troppo rapido collasso espiratorio del polmone: la pressione intratracheale, che veniva determinata continuamente, oscillava fra circa 15 mm Hg durante la inspirazione e circa 7 mm Hg durante la espirazione. Il lobo esteriorizzato era generalmente il medio, ma alcuni esperimenti sono stati

eseguiti anche sull'inferiore e in questo caso si asportava parzialmente la settima costa destra.

RISULTATI E DISCUSSIONE. - Ponendo a contatto della pleura viscerale della soluzione al 9‰ di NaCl si è osservato un assorbimento di liquido da parte della sierosa pleurica. Se anziché soluzione fisiologica si metteva a contatto della pleura una soluzione a pressione colloidò-osmotica superiore a quella del plasma, per esempio una soluzione al 14‰ di emoglobina, si poteva notare una fuoriuscita di liquido dalla pleura viscerale. Ciò dimostra che la pressione colloidò-osmotica del plasma ha una parte importante nel regolare la diffusione dei liquidi a livello della pleura viscerale.

Per misurare la pressione determinante l'assorbimento di liquido attraverso la sierosa pleurica si è applicato all'apparecchio, che misurava l'assorbimento, una depressione, graduandone l'intensità e notando a quale valore la diffusione del liquido attraverso la pleura si riduceva a zero. Tale valore di depressione è l'espressione della pressione determinante l'assorbimento della soluzione fisiologica nelle condizioni sperimentali.

I valori ottenuti sono indicati nella prima colonna della tabella: essi oscillano attorno a 9 mm Hg.

TABELLA I.

N.	I Pressione di assorbimento (valore sperimentale)	II Pressione endoalveolare media (valore sperimentale)	III Pressione idraulica dei capillari polmonari (valore teorico)	IV I + III
11 <i>b</i>	8,8	10,0	15,0	23,8
12 <i>b</i>	7,7	10,3	15,3	23,0
13 <i>b</i>	8,4	9,6	14,6	23,0
15 <i>b</i>	7,7	11,0	16,0	23,7
16 <i>b</i>	13,1	9,8	14,8	27,9
21 <i>b</i>	8,8	9,2	14,2	23,0
Media				24,1 ± 0,8

Per integrare la valutazione quantitativa di questi dati era necessario stimare la pressione idraulica nei capillari della pleura polmonare. Questa doveva naturalmente essere maggiore della pressione intra-alveolare altrimenti il sangue non avrebbe potuto passare attraverso i polmoni. La pres-

sione endoalveolare determinata con la metodica di Vuilleumier (1939) risultò avere valori oscillanti attorno a 10 mm Hg (colonna II).

Partendo dal presupposto che la pressione idraulica del sangue nei capillari del piccolo circolo, nelle condizioni sperimentali, fosse di circa 5 mm Hg superiore alla pressione endoalveolare media, il valore di pressione nei capillari alveolari nei singoli esperimenti doveva essere quello riportato nella colonna III. Sommando i valori delle colonne I e III si ottiene il gradiente di pressione idrostatica attraverso l'area di pleura viscerale in esperimento quando il movimento di liquido attraverso la pleura stessa diventa uguale a zero. Questo valore che in media è di $24,1 \pm 0,8$ mm Hg (colonna IV) dovrebbe essere uguale alla pressione oncotica del plasma e infatti è in buon accordo con i valori riportati da Albritton (1952) relativi alla pressione colloid-osmotica del plasma di cane.

Concludendo, l'assorbimento di soluzione salina da parte della pleura viscerale risulta essere condizionato dalla differenza tra la pressione colloid-osmotica del plasma e la pressione idraulica nei capillari della pleura viscerale; questa differenza di pressione, nelle condizioni sperimentali oscilla intorno a 9 mm Hg.

Tenendo conto che in condizioni fisiologiche la pressione idraulica nei capillari del piccolo circolo oscilla intorno a 5-10 mm Hg e che la pressione endoalveolare media è zero, la pressione endopleurica limitatamente al contributo apportato dalla pleura viscerale, deve essere — 20 — 15 mm Hg, come era stato prospettato all'inizio di questa Nota. La depressione che verosimilmente esiste nella cavità pleurica in condizioni fisiologiche dovrà approssimarsi a questo valore, se, come è presumibile, gli scambi attraverso la pleura viscerale prevalgono su quelli che hanno luogo attraverso la pleura parietale. Il valore — 6 — 2 Hg riportato in molti trattati, e ottenuto per mezzo di determinazioni dirette di pressione eseguite attraverso un ago infisso nel cavo pleurico, con una metodica quindi che comporta l'introduzione di una sia pur piccola quantità di gas, deve essere considerato valido per quelle particolari condizioni sperimentali, e cioè di pneumotorace, ma verosimilmente erroneo nelle condizioni normali di assenza completa di gas nel cavo pleurico.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] ALBRITTON E. C., *Standard values of blood*, Saunders Philadelphia, 1952.
- [2] BRUNI A. C., *Compendio di Anatomia descrittiva umana*, Vallardi Milano, 1948.
- [3] HELLEMS H. K., HAYNES F. W., DEXTER L. e KINNEY T. D., «Am. J. Physiol.» 155, 98 (1948).
- [4] HEPP O., «Zschr. ges exp. Med.», 99, 709 (1936).
- [5] MESCHIA G., «Yale J. Biol. Med.», 27, 206 (1954).
- [6] SETNIKAR I., AGOSTONI E., TAGLIETTI A., «Boll. Soc. Biol. Sper.», 1955 (in corso di stampa).
- [7] VUILLEUMIER P., «Schw. med. Wschr.», 69, 697 (1939).

Fisiologia. — *Analisi dell'elettroretinogramma ottenuto con differenti tempi di esposizione* (*). Nota di ALBERTO WIRTH, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Dall'analisi delle componenti scotopica e fotopica dell'elettroretinogramma (ERG) risulta che tanto la oscillazione negativa iniziale a (componente P III) quanto la positiva b (componente P II) posseggono un duplice meccanismo, che è da attribuire rispettivamente all'attività dei coni e dei bastoncelli.

Per quanto riguarda l'oscillazione a , già Granit ⁽¹⁾ ne aveva suggerito la duplice natura. E recenti esperimenti hanno confermato che tale oscillazione non è da attribuire esclusivamente ai coni, com'era stato erroneamente affermato: difatti Boehm, Sigg e Monnier ⁽²⁾ e più tardi Armington, Johnson e Riggs ⁽³⁾, Bornschein ⁽⁴⁾ e Best ⁽⁵⁾ hanno potuto dimostrare che l'oscillazione a aumenta durante il decorso dell'adattamento al buio. Lo stesso è stato osservato da Dodt e Heck ⁽⁶⁾ nel Geco, la cui retina è composta soltanto da bastoncelli. Inoltre Armington, Johnson e Riggs ⁽³⁾ hanno potuto riprodurre la curva di visibilità scotopica, prendendo l'oscillazione a come indice di risposta.

Quanto all'oscillazione b , è da notare innanzi tutto che essa è presente, con il suo andamento caratteristico, in animali la cui retina è prevalentemente, se non addirittura esclusivamente, composta di coni; inoltre che la fusione degli stimoli intermittenti a livelli fotopici può avvenire per una successione di oscillazioni $a-b-a-b$ oppure $b-b-b$ [Dodt e Enroth ⁽⁷⁾]; e infine che questa oscillazione b può in certe condizioni rivelare una fase rapida iniziale, denominata x , legata essenzialmente all'attività dei coni. Risultati ottenuti da differenti Autori in esperimenti diversi [Adrian ⁽⁸⁾, Armington ⁽⁹⁾, Schubert e Bornschein ⁽¹⁰⁾ e Vukovich ⁽¹¹⁾] hanno consentito di stabilire questo fatto con certezza.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) R. GRANIT, *Sensory mechanisms of the retina*. London, Oxford University Press (1947).

(2) F. BOEHM, B. SIGG u. M. MONNIER, « *Helv. physiol. Acta* », II, 481 (1944).

(3) J. C. ARMINGTON, E. P. JOHNSON a. L. A. RIGGS, « *J. Physiol.* », CXVIII, 289 (1952).

(4) H. BORNSCHEIN, « *Z. Biol.* », CV, 454 (1953).

(5) W. BEST, « *Acta ophthal.*, Kbh. », XXXI, 95 (1953).

(6) E. DODT u. J. HECK, « *Pflüger's Arch.* », CCLIX, 226 (1954).

(7) E. DODT a. C. ENROTH, « *Acta physiol. scand.* », XXX, 375 (1954).

(8) E. D. ADRIAN, « *J. Physiol.* », CV, 24 (1946-47).

(9) J. C. ARMINGTON, « *J. opt. Soc. Amer.* », XLII, 393 (1952).

(10) G. SCHUBERT u. H. BORNSCHEIN, « *Ophthalmologica* », CXXIII, 396 (1952).

(11) V. VUKOVICH, « *Ophthalmologica* », CXXIV, 354 (1952).

La possibilità di studiare il meccanismo fotopico dell'elettroretinogramma è particolarmente importante nel caso di applicazioni cliniche, poiché è noto che la risposta elettrica è stata finora considerata, a ragione, come dovuta esclusivamente al contributo dei bastoncelli. Si è infatti visto che vasti scotomi centrali, per esempio, erano perfettamente compatibili con un tracciato di ampiezza normale [Karpe ⁽¹²⁾, Wirth ⁽¹³⁾]. Uno degli obiettivi principali dell'elettroretinografia clinica è appunto quello di dare evidenza alla risposta fotopica o, per meglio dire, di sottrarla al predominio di quella scotopica. Simile obiettivo può perseguirsi mediante i seguenti tre metodi, applicabili singolarmente o in associazione fra loro: 1°) adattamento alla luce; 2°) stimoli intermittenti; 3°) analisi della curva di visibilità spettrale. In tutti questi casi è richiesto uno stimolo di intensità elevata.

È opportuno però rilevare che delle variabili che regolano la risposta elettrica alla luce (intensità, area, durata e composizione spettrale) solo la durata non è stata finora presa in particolare considerazione. Da un esame della letteratura è possibile rilevare come siano stati usati tempi di esposizione diversi secondo i casi: appariva quindi di notevole interesse ricercare se la durata dello stimolo ha effetto sull'ampiezza e sull'andamento dell'elettroretinogramma e se è possibile in questo modo scindere la componente fotopica e scotopica delle fasi iniziali.

Gli esperimenti che ora riferisco, sono stati effettuati su Conigli pigmentati: com'è noto, la retina di questi animali è dominata dai bastoncelli, ma vi è di certo un numero di coni sufficiente per dare, per esempio, lo spostamento di Purkinje nella curva di visibilità [Brown ⁽¹⁴⁾, con esperimenti behaviouristici] e anche una punta di maggiore sensibilità della curva medesima nella regione delle più alte lunghezze d'onda [Wirth ⁽¹⁵⁾].

Sono stati impiegati un unico elevato livello di intensità luminosa (4.000 lux \pm 8% nell'adattamento alla luce; 2.000 lux \pm 10% nell'adattamento al buio) e un'area di stimolazione tale da avere una risposta *in toto* della retina, poiché solo in queste condizioni è possibile avere un ERG completo, per quanto riguarda le sue fasi iniziali [Wirth e Zetterström ⁽¹⁶⁾].

La tecnica di registrazione è stata descritta in precedenti lavori. Qui riporto solo alcuni punti principali: il sistema di amplificazione usato ha una costante di tempo di 0,9 sec circa e lo *sweep* dell'oscillografo (Allen Du Mont, double-beam Mod. 322 A) è sincronizzato con una cellula fotoelettrica, sulla quale viene deviata da un prisma una parte del fascio luminoso, in modo che l'inizio dello stimolo coincide con la partenza dello *sweep*. I tracciati sono perciò fotografati su film stazionario. Gli esperimenti sono stati condotti in condizioni di adattamento alla luce (a un livello di 40 lux, dopo 15

(12) G. KARPE, «Acta ophthal., Kbh.», Suppl. XXIV (1945).

(13) A. WIRTH, «Atti Soc. oftal. it.», XII, 199 (1950).

(14) R. H. BROWN, «J. gen. Psychol.», XVII, 323 (1937).

(15) A. WIRTH, «Acta physiol. scand.», XXIX, 22 (1953).

(16) A. WIRTH a. B. ZETTERSTRÖM, «Brit. J. Ophthal.», XXXVIII, 257 (1954).

min di preadattamento) e di adattamento al buio (45 min). La durata dello stimolo, regolata mediante un Compur calibrato, aveva i seguenti valori, espressi in sec: 0,002-0,004-0,01-0,02-0,04-0,1-0,2-0,5. Complessivamente sono state effettuate 200 registrazioni nell'adattamento al buio e 250 alla luce, con una media quindi di 25, rispettivamente 30 tracciati per ciascun tempo di esposizione.

I risultati possono essere riassunti nei seguenti dati principali.

1°) Nell'adattamento alla luce, a partire dallo stimolo più breve si ha un aumento dell'ampiezza dell'oscillazione x , con un massimo a 0,02 sec, dopo il quale i valori declinano e si stabilizzano tra 0,1-0,5 sec. Al tempo stesso il « grado di elevazione » dell'oscillazione x , cioè il rapporto tra ampiezza

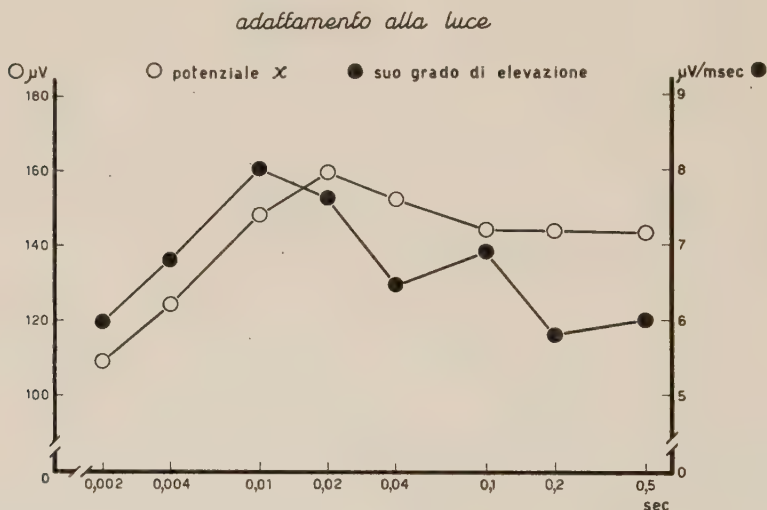


Fig. 1. — Curva del potenziale x e curva del suo grado di elevazione, in funzione della durata dello stimolo (valori di ascissa in scala logaritmica).

(in microvolt) e tempo (in millisecondi) dall'inizio fino al suo apice, ha il valore massimo già a 0,01 sec, resta presso che invariato a 0,02 sec e cade poi bruscamente in due passaggi successivi (0,04-0,1 sec e 0,2-0,5 sec): cfr. fig. 1. Ciò significa che per un tempo di 0,02 sec la durata dell'onda aumenta: l'ampiezza del potenziale è infatti maggiore che non per 0,01 sec, ma « il grado di elevazione » è invariato. Possiamo perciò affermare che a partire da un tempo di esposizione di 0,02 sec, anche nell'adattamento alla luce entra in giuoco una componente più lenta, verosimilmente legata all'attività dei bastoncelli e tale da inibire il meccanismo fotopico puro: difatti l'ampiezza dell'oscillazione x tende a diminuire. Questo trova conferma nel fatto accertato che i bastoncelli possono in certe condizioni inibire i coni [Granit ⁽¹⁾, Dodt ⁽¹⁷⁾, Dodt e Heck ⁽⁶⁾].

(17) E. DODT, « v. Graefes Arch. Ophthalm. », CLIII, 152 (1952).

2°) Nell'adattamento al buio il fatto caratteristico è che solo con tempi di esposizione brevi, tra 0,002 e 0,02 sec, si può osservare una componente iniziale rapida dell'oscillazione b , da identificare con l'oscillazione x , che abbiamo visto essere di natura fotopica. Questa oscillazione diminuisce di ampiezza e diventa meno netta nel suo contorno, quando lo stimolo è di durata maggiore di 0,04 sec. Il valore del potenziale b aumenta con andamento quasi lineare, fino a raggiungere un livello stabile a 0,1 sec; la oscillazione a ha pure il suo massimo a 0,1 sec, ma diminuisce per tempi di esposizione

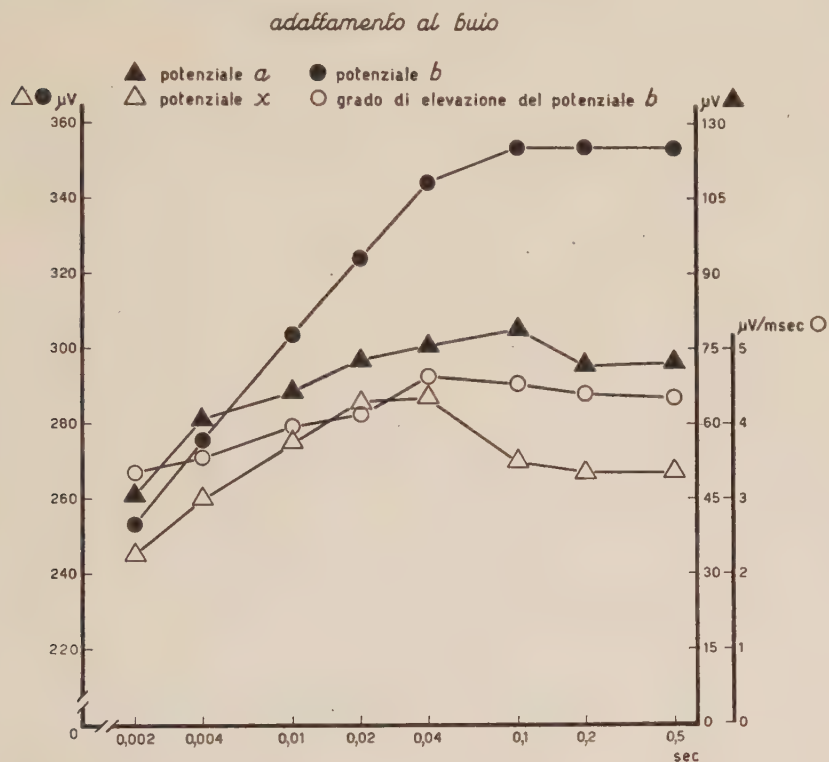


Fig. 2. - Curve dei potenziali a , x e b e curva del grado di elevazione del potenziale b , in funzione della durata dello stimolo (valori di ascissa in scala logaritmica).

zione maggiori. Anche in condizioni scotopiche il «grado di elevazione» della b mostra variazioni sensibili: per $t = 0,002$ sec e $t = 0,5$ sec i valori sono apparentemente poco dissimili, ma la notevole differenza di ampiezza del potenziale, per questi due tempi di esposizione, sta ad indicare che l'oscillazione assume un andamento molto più lento (fig. 2).

Alla duplice natura delle fasi iniziali dell'ERG (oscillazioni a , b e x) si può dare evidenza, seguendo le variazioni che si manifestano nel decorso dell'adattamento al buio e nel ricupero dal buio alla luce.

Concludendo, variazioni della durata dello stimolo luminoso permettono di rivelare queste caratteristiche del comportamento dell'ERG: a) nell'adat-

tamento alla luce la pura risposta fotopica si ha per stimoli di durata uguale o inferiore a 0,02 sec; b) nell'adattamento al buio si ha una componente fotopica dell'oscillazione b per stimoli di durata uguale o inferiore a 0,02 sec; c) nel ricupero dalle condizioni di adattamento completo al buio a quelle di adattamento alla luce, l'ampiezza dell'oscillazione b dapprima diminuisce e poi aumenta.

Di conseguenza l'ERG dovrà sempre essere analizzato con almeno due differenti tempi di esposizione, preferibilmente 0,01 e 0,1 sec, in modo che le sue componenti fotopica e scotopica possano essere adeguatamente rivelate.

Patologia. — *Azione della riboflavina e dell'atebrin sulla produzione di forme L^(*).* Nota di TULLIO TERRANOVA, presentata ^(**) dal Corrisp. L. CALIFANO.

Il ciclo L inizia da un bacillo a normale morfologia che si trasforma in large body (forma gigante) da cui originano granuli capaci di dar luogo di nuovo alla forma bacillare. Tale è il ciclo completo, mentre se la trasformazione si arresta alla sola forma gigante il ciclo è incompleto. Sia la forma gigante che quella granulare vengono indicate come forme L. La proliferazione dei granuli e delle forme giganti determina lo sviluppo di particolari colonie ben distinguibili infossate nell'agar e che sono caratterizzate da un centro costituito prevalentemente da granuli e da una corona periferica formata in prevalenza da forme giganti.

Si dicono forme L fisse quelle che hanno perso la capacità di ritornare a forme batteriche di normale morfologia.

Si conoscono forme fisse spontanee o naturali e queste vengono indicate con la sigla PPLO (pleuropneumonia like organisms), ma forme L fisse si possono ottenere artificialmente a mezzo di penicillina.

Si è ritenuto per molto tempo che per la produzione di forme L fosse indispensabile nel terreno di cultura la presenza di siero o di liquido ascitico fatto esprimere secondo Minck ⁽¹⁾, Heilman ⁽²⁾, Pulvertaft ⁽³⁾ particolari esigenze metaboliche per lo sviluppo. Tulasne ⁽⁴⁾, però, mise già in evidenza il fatto che tale necessità se occorre per lo sviluppo del ciclo L completo, non si ha per quello incompleto in quanto forme giganti si ottengono su terreni solidi e liquidi senza siero o liquido ascitico.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 12 novembre 1955.

(1) R. MINCK, « Rev. Immunol. », 19, 96 (1955).

(2) F. R. HEILMAN, « J. Infect. Dis. », 69, 45 (1941).

(3) R. J. V. PULVERTAFT, « J. Path. Bact. », 65, 175 (1953).

(4) R. TULASNE, *Symposium Citologia Bacterica*. VI Congresso Internazionale Microbiol. Roma (1953).

Secondo Edwards ⁽⁵⁾ esse si sviluppano anche in terreno naturale con l'aggiunta di albumina di bue o anche della frazione lipidica insolubile in acetone del tuorlo d'uovo, mentre per lo sviluppo dei PPLO è necessaria l'aggiunta di colesterolo.

Smith e Coll. ^(6,7), invece, ritengono che il fattore presente nel siero necessario per lo sviluppo dei PPLO, non sia il colesterolo ma una proteina a basso peso molecolare, stabile al calore, che precipita a saturazione completa con solfato di ammonio e che è composta da relativamente pochi aminoacidi e tra questi soprattutto da quelli basici. Gli stessi ricercatori ⁽⁸⁾, attribuiscono recentemente particolare significato alle lipoproteine che nel plasma dei mammiferi trasportano componenti insolubili in acqua. In questa loro ammissione essi sono confortati da ricerche di Poetsche ⁽⁹⁾ che ha trovato che l'aggiunta di colesterina in un mezzo inoculato con forme L del *Corynebacterium*, determina formazione di cristalli di esteri di colesterina nell'interno delle forme giganti.

Stabilire quali siano i fattori necessari allo sviluppo delle forme L è senza dubbio importante perché permette di definire diversità metaboliche con le forme normali e offre la possibilità di studiare il metabolismo e le caratteristiche biochimiche delle forme L in terreni chimicamente definiti. Hanno significato in tal senso le ricerche di Tulasne, Terranova e Lavillaureix ⁽¹⁰⁾ che dimostrano l'importanza di vitamine del complesso B (B_2 , B_6 , B_{12}) nella produzione delle forme L. È stato cioè dimostrato che è possibile sostituire vitamine del gruppo B, particolarmente la riboflavina, al siero o all'ascite, sia per ottenere le forme L da certi batteri Gram negativi, che per coltivare queste nei trapianti successivi. Con la riboflavina si è ottenuto il ciclo L in un ceppo di Salmonella (S. 24) dal quale germe Tulasne ⁽¹¹⁾ non era mai riuscito ad ottenere colonie L in terreni al siero e penicillina. La possibilità, infine, di ottenere lo sviluppo delle forme L in un mezzo sintetico definito è stata dimostrata da Medill e O'Kane ⁽¹²⁾ che hanno descritto un terreno contenente aminoacidi che permette un rapido sviluppo del *Proteus* e delle relative forme L. Ciò fa concludere agli Autori che le richieste nutritive sia nell'usuale sviluppo che in ciclo L sono essenzialmente identiche.

La sola differenza consisterebbe nella sensibilità delle forme L ad uno o più inibitori presenti nei terreni naturali; l'azione favorente del siero si esplicherebbe non per particolare apporto metabolico ma per sottrazione degli inibitori da parte del siero con un meccanismo di adsorbimento paragonabile

(5) D. G. EDWARDS, « J. gen. Microbiol. », 8, 256 (1953).

(6) P. F. SMITH e H. H. MORTON « J. Bact. », 61, 395 (1951).

(7) P. F. SMITH e H. H. MORTON, « Arch. Bioch. Biophys. », 38, 23 (1952).

(8) P. F. SMITH, J. G. LECCE e R. J. LYNN, « J. Bact. », 68, 627 (1954).

(9) POETSCHKE, riportato in SMITH, LECCE e LYNN, quale comunicazione personale agli Autori.

(10) R. TULASNE, T. TERRANOVA e J. LAVILLAUREIX, « Giorn. Microbiol. », 1, 44 (1955).

(11) R. TULASNE, comunicazione personale.

(12) M. A. MEDILL e D. J. O'KANE, « J. Bact. », 68, 530 (1954).

o identico a quello messo in evidenza da Dubos per l'albumina umana nei terreni al Tween 80⁽¹³⁾.

Le presenti ricerche mostrano l'azione favorente della riboflavina, sulla formazione e sullo sviluppo di forme L di un ceppo di *Proteus* (P. 18) e l'azione inibitrice di un derivato acridinico, l'atebrin, che è un antagonista della riboflavina (Silverman e Evans⁽¹⁴⁾, Madinaveita⁽¹⁵⁾, Burger⁽¹⁶⁾, Sebrell e Harris⁽¹⁷⁾).

MATERIALE E METODO.

Da patine di *Proteus* (P. 18) di 18-24 h su agar si allestiscono sospensioni a densità ottica standard (valori 10 allo stufofotometro di Pulfrich). L'inoculo nei terreni solidi è praticato ponendo sulla superficie dell'agar 5-6 gocce della sospensione batterica. Dopo permanenza di 24 h a 37°C si fissa il coperchio delle piastre alla base con uno strato di paraffina-vasellina allo scopo di impedire la evaporazione e mantenere nell'ambiente un elevato e costante grado di umidità, condizione favorevole allo sviluppo del ciclo L. L'inoculo nei terreni liquidi è fatto aggiungendo ml. 0,1 della sospensione batterica a 5 ml. di mezzo.

L'esame delle colonie è condotto osservando le piastre per transilluminazione con adatta lente di ingrandimento ovvero al microscopio a contrasto di fase a piccolo ingrandimento.

Lo studio morfologico delle forme si è fatto su preparati a fresco al microscopio a contrasto di fase e su preparati fissati con acido osmico e colorati al Giemsa-Robinow.

La penicillina, la riboflavina, il siero e l'atebrin sono aggiunti all'agar, tenuto fuso a 45°C prima di allestire le piastre.

Subculture sono allestite dai terreni solidi per sovrapposizione.

Prove con terreni naturali solidi. - Sono stati adoperati Difco Nutrient Agar, Difco Heart Agar e Difco Riboflavin Assay Medium. Quest'ultimo è stato solidificato con l'aggiunta di agar (lavato in H₂O) alla concentrazione finale del 2,2%. La penicillina è stata aggiunta nelle concentrazioni di 500-10.000 U./ml; la riboflavina nella concentrazione di 1 µg/ml, il siero nelle quantità di 0,2 ml, l'atebrin 0,1-2 mg/ml.

Nella descrizione dei risultati si è preso come riferimento la formazione di colonie L ed i risultati positivi in tal senso vengono indicati con la lettera L. La trasformazione dei bacilli in forme L è stata seguita con osservazione al microscopio a contrasto di fase in camera termostatica.

(13) R. J. DUBOS e B. D. DAVIS, « J. Exp. Med. », 83, 409 (1946).

(14) M. SILVERMAN e E. A. EVANS Jr., « J. Biol. Chem. », 150, 265 (1943).

(15) J. MADINAVEITA, « Biochem. J. », 40, 373 (1946).

(16) A. BURGER, *Medicinal Chemistry*, Intersc. Publ. New York, 1951.

(17) W. H. SEBRELL Jr. e R. S. HARRIS, *The Vitamins*, Ac. Press. 1954.

TABELLA I.

Proteus P. 18

Agar normale Difco					Agar-cuore Difco				
Penicillina U/ml	500	1000	5000	10000	100	500	1000	5000	10000
	o	o	o	L	o	o	o	o	L
	o	L	o	o	o	L	L	L	—
	o	o	o	o	o	L	L	L	L
	—	o	L	o	L	o	L	L	L
	o	—	L	L	o	o	o	L	L
					o	o	o	L	L
+ Riboflavina 1 µg/ml									
	L	L	—	L	o	o	L	L	—
	o	o	L	L	L	L	L	L	—
	o	o	L	L	—	L	L	L	L
	o	L	L	—	L	L	o	L	L
	—	L	L	L	o	o	L	L	L
					o	o	L	L	L

La lettera L indica le prove nelle quali si è riscontrata formazione di colonie L.

Nella tabella I sono riportati i risultati ottenuti con agar normale Difco e con agar-cuore Difco. Essi indicano che la comparsa di colonie L è evenienza rara su agar normale ma molto frequente in mezzi arricchiti in riboflavina.

Nell'agar-cuore le colonie L si formano con frequenza maggiore che nell'agar normale. L'aggiunta di riboflavina ne favorisce anche in questo caso lo sviluppo e ciò è maggiormente evidente quando si adoperano basse concentrazioni di penicillina.

Nella II tabella sono riportati i risultati di prove di inibizione condotti su agar-cuore, con penicillina 5000 U./ml, riboflavina 1 µg/ml (o siero al 0,2 per ml), e adoperando quale inibitore delle forme L l'atebrin mg 0,1-2/ml.

Sono state anche allestite prove su subculture di forme L di *Proteus* al 2° e al 50° passaggio. Le forme L del 50° passaggio sono pratica-

mente irreversibili e cioè non danno mai luogo a forme bacillari ⁽¹⁸⁾ (vedi tabella III).

Dalla II e III tabella appare evidente l'azione inibitrice svolta dall'atebrin, sulla formazione di colonie L.

L'esame microscopico ha mostrato che alle più alte concentrazioni adoperate, l'aggiunta di atebrin inibisce non soltanto la comparsa di colonie L, ma anche la trasformazione dei batteri in forme giganti.

Prove di controllo hanno mostrato che l'aggiunta di atebrin in terreni privi di penicillina è senza effetto sullo sviluppo batterico (vedi tabella IV).

TABELLA II.

Proteus P. 18 in Agar-cuore + Penicillina 5000 U/ml				
Atebrin mg/ml	0,1	0,5	1	2
	L	L	o	o
	L	o	o	o
	L	L	o	o
	L	o	L	o
	o	o	o	o
+ riboflavina 1 µg/ml				
	L	L	L	o
	L	L	L	o
	L	L	o	o
	L	o	L	o
	L	o	o	o
+ siero 0,2/ml				
	L	L	L	o
	L	o	o	o
	L	L	L	o
	L	L	o	o

La lettera L indica le prove nelle quali si è riscontrata la formazione di colonie L.

(18) Queste culture di forme L fisse mi sono state cortesemente fornite dal prof. R. Tulasne che qui vivamente ringrazio.

TABELLA III.

Forme L di <i>Proteus</i> P. 18 in agar cuore + Penicillina (5000 U/ml)		
	Subcultura 2° passaggio	Subcultura 50° passaggio
+ Riboflavina 1 µg/ml	L	L
+ Atebrin 2 mg/ml + Riboflavina 1 µg/ml . . .	o	o
+ Atebrin 2 mg/ml	o	o
+ Siero 0,2/ml	o	L
+ Atebrin 2 mg/ml + siero 20 %	o	o

TABELLA IV.

Proteus P. 18 in Brodo Difco				
		% Trasmittanza		
		Lecture iniziali	a 24 h	a 48 h
Atebrin µg/ml	20	100	14	7
Atebrin µg/ml	100	100	19	9
Atebrin µg/ml	1000	90	17	6
Atebrin µg/ml	2000	80	18	6
senza Atebrin		81	21	6

Poiché dagli esperimenti eseguiti è risultata netta l'azione favorente della riboflavina sulla produzione e sullo sviluppo delle forme L sono state eseguite prove su mezzo nutritivo assolutamente privo di riboflavina (Difco Riboflavin Assay Medium). Il terreno è stato solidificato con agar e adoperato come tale o con l'aggiunta di siero, o di riboflavina, o di un idrolizzato di caseina (casamino acids Difco) o di una miscela di aminoacidi la cui composizione è data nella tabella VI. Il terreno conteneva 5000 U./ml di penicillina (vedi tabella V). In nessuna prova si è avuta la comparsa di colonie L tranne che quelle nelle quali all'agar si era aggiunto riboflavina e idrolizzato di caseina. Poiché comparsa di colonie L non si è avuta quando queste sostanze sono state aggiunte separatamente, appare probabile che la riboflavina esplica azione favorente la formazione del ciclo L solo in presenza di un'altra sostanza, contenuta nell'idrolizzato di caseina.

Le prove, pertanto, eseguite sui terreni naturali, inducono a ritenere che la riboflavina è, per quella composizione del mezzo, fattore necessario per lo sviluppo delle colonie L. Probabilmente però, separatamente o in sinergismo con la vitamina agiscono altri fattori, i quali sono favorenti o necessari e, per ora, non sono identificabili.

TABELLA V.

Proteus P. 18 Difco privo di riboflavina. Penicillina 5000 U/ml.						
Riboflavina 1-5000 µg/ml	Siero 0,2/ml	Idr. caseina 1 %	Miscela aminoac.	Riboflavina + idr. caseina	Siero 0,2/ml + idr. caseina	Riboflavina idr. caseina Atebrin
o	o	o	o	L	o	o

Prove con terreni sintetici. - Si è adoperato il terreno di Medill e O'Kane (vedi tabella VI) liquido oppure solidificato con agar (lavato con H₂O) al 2,2 %. Le inoculazioni sono state fatte con cellule batteriche da culture di 18-24 h, lavate e risospese in acqua distillata. Lo sviluppo delle forme normali è stato seguito nei terreni liquidi con misure di torbidità al Pulfrich, dopo 24-48 h dalla semina. Le colonie L sono state studiate in base al tempo di comparsa dall'inoculo ed alla grandezza. Si è costantemente seguita l'evoluzione morfologica al microscopio a contrasto di fase.

È stato constatato che il *Proteus P. 18* si sviluppa nel terreno sintetico sia solido che liquido. Lo sviluppo è chiaramente favorito dall'aggiunta al mezzo basale di una miscela di aminoacidi o di idrolizzato di caseina.

Per quanto riguarda la comparsa di forme L, si è constatato che il terreno basale solido, con l'aggiunta di solfato d'ammonio e di penicillina, determina dopo circa 5 giorni la trasformazione quasi totale della popolazione batterica in forme giganti e la comparsa di piccole colonie L. L'aggiunta di aminoacidi o di idrolizzato di caseina ha netta azione favorente lo sviluppo di tali colonie, che in tal caso compaiono già a 24 h dall'inoculo, e che sono più numerose e più grandi. Le subculture, eseguite per sovrapposizione, su terreni ad uguale composizione hanno dato sempre esito positivo. Il materiale raccolto, filtrato per candela L 3 ed inoculato in terreni naturali o sintetici contenenti 5000 U./ml di penicillina dà luogo a sviluppo di colonie L; fatto questo che dimostra la presenza di forme L granulari, filtrabili e vitali.

Nel mezzo liquido si ha intorbidamento visibile in 24 h solo quando si è aggiunta la miscela di aminoacidi oppure l'idrolizzato di caseina, e l'esame microscopico mostra in questo caso la totale trasformazione dei batteri in forme giganti (vedi tabella VII). Le subculture su terreni liquidi hanno sempre dato risultato negativo, mentre su terreni solidi naturali o sintetici, contenenti 500 U./ml di penicillina si sviluppano sempre colonie L.

TABELLA VI.

Composizione del terreno basale sintetico di Medill e O'Kane.

Glucosio	1 %
Sodio lattato	2 %
K ₂ HPO ₄	0,9 %
KH ₂ PO ₄	0,1 %
Nicotinamide	1 µg/ml.
Miscela sali	0,2 %
MgSO ₄ ·7H ₂ O	g 40,0
NaCl	2,0
FeSO ₄ ·7H ₂ O	2,0
MnSO ₄ ·4H ₂ O	8,0

Sostanze aggiunte al terreno basale.

(NH ₄) ₂ SO ₄	0,1 %
Idrolizzato di caseina	0,5 %-1 %
Miscela di aminoacidi	0,410 %

Composizione miscela aminoacidi (mg/10 ml).

Glicina mg. 0,2	dl-Serina mg 0,4
l-Leucina » 2,5	dl-Valina » 4,0
l-Tirosina » 3,0	l-Isoleucina » 2,5
l-Prolina » 4,0	dl-Fenilalanina » 2,0
l-Istidina » 1,0	dl-A. aspartico » 2,0
l-Arginina » 2,5	dl-Lisina » 4,0
dl-Alanina » 1,0	l-A. glutammico » 10,0
	dl-Metionina » 2,0

La possibilità di ottenere le colonie L su di un mezzo definito privo di vitamine non esclude la importanza della riboflavina, la quale può essere sintetizzata da batteri del genere *Proteus* (Burkholder e Mc. Veigh⁽¹⁹⁾). Allo scopo di chiarire questo aspetto della questione si sono fatte delle prove di inibizione aggiungendo al mezzo sintetico-liquido o solido e arricchito o non con aminoacidi e con idrolizzato di caseina - l'antagonista della riboflavina,

(19) P. R. BURKHOLDER e I. MC VEIGH, « Proc. Natl. Acad. Sci. », U. S. 28, 285 (1942).

l'atebrin, adoperato per gli esperimenti sui terreni naturali. Si è visto che anche nel caso di terreni sintetici l'atebrin inibisce la comparsa delle forme L e delle colonie L sui terreni sintetici solidi e la trasformazione dei batteri normali in forme giganti nei terreni liquidi.

TABELLA VII.

Sostanze aggiunte	Mezzo sintetico basale liquido di Medill e O'Kane		
	% Trasmittanza		
	Letture iniziali	a 24 h	a 48 h
Miscela aminoacidi	84	80	78
Idrolizzato caseina	81	8	6
Solfato d'ammonio	80	7	6
Penicillina 5000 U/ml	100	21	21
Penicillina + aminoacidi	100	100	100
Penicillina + Idr. caseina	100	48	47
Penicillina + Riboflavina	100	42	40
Penicillina + Siero	84	82	78
Penicillina + Solfato am.	84	100	80
Penicillina + Aminoacidi	100	84	92
Penicillina + Atebrin	100	100	94

Si è provato infine se l'azione inibitrice da atebrin si espliciti anche su forme L di altri ceppi batterici e cioè su *Salmonella paratyphi* (S. 24) ed *Escherichia coli* K-12.

L'inoculo batterico è stato praticato su agar-cuore contenente 1000-10.000 U./ml di penicillina e siero al 0,2/ml o riboflavina 1-50 µg/ml.

Si è avuto sviluppo di colonie L dal ceppo di *Salmonella* e produzione di forme giganti e di colonie N dal ceppo di *E. coli*.

L'aggiunta di atebrin 1-2 mg/ml inibisce lo sviluppo di colonie L e di forme giganti rispettivamente nei due ceppi adoperati. Questi risultati sono corrispondenti a quelli ottenuti con il ceppo di *Proteus*.

CONCLUSIONI. - Viene messa in evidenza l'importanza della riboflavina nella produzione e nello sviluppo di forme L di *Proteus* (P. 18). Gli esperimenti condotti adoperando terreni naturali dimostrano che l'aggiunta di riboflavina favorisce la comparsa di colonie L, mentre l'atebrin, che è un deri-

vato acridinico antagonista della riboflavina, ne inibisce la produzione e lo sviluppo. Non si formano mai colonie L in terreni naturali assolutamente privi di riboflavina. L'atebrin inibisce anche la formazione di colonie L di *Salmonella paratyphi* (S. 24) e di forme giganti di *Escherichia coli* K - 12.

La aggiunta al terreno base di Medill e O'Kane di idrolizzato di caseina o di miscela di aminoacidi facilita la crescita del *Proteus* a normale morfologia ed incrementa pure, in presenza di penicillina, la formazione del ciclo L.

Nei terreni sintetici, invece, la aggiunta di riboflavina non è necessaria perché in essi si abbia sviluppo di ciclo L da germi coltivati in presenza di penicillina e perpetuazione del ciclo per le forme fisse.

La atebtrin impedisce il fenomeno nei terreni sintetici così come in quelli naturali arricchiti in riboflavina. Probabilmente nei terreni sintetici la sintesi della riboflavina da parte dei germi è più attiva che nei terreni naturali ovvero in questi è presente un fattore di inibizione o inattivazione della vitamina o di suoi precursori che manca nei primi.

Biologia. — *Il nucleo della cellula nervosa dei Vertebrati. Osservazioni sui Mammiferi*^(*). Nota di GIORGIO M. BAFFONI, presentata^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Lo studio delle strutture nucleari della cellula nervosa dei Vertebrati presenta un notevole interesse a causa delle cospicue dimensioni e dell'elevato grado del differenziamento che può essere raggiunto da questi elementi; è noto infatti che le cellule nervose si mantengono diploidi (Swift 1950⁽¹⁾) e perciò in quelle di esse che presentano un notevolissimo aumento di volume durante lo sviluppo e l'accrescimento somatico (in rapporto con l'aumento del territorio d'innervazione: legge di Levi) non si verificano fenomeni di endomitosi; ciò spiega perché già i primi osservatori abbiano notato che il nucleo delle cellule nervose dei Vertebrati ha un aspetto acromatico (Flemming 1882, Nissl 1894, Besta 1904). Nel nucleo intercinetico della cellula in differenziamento, l'eucromatina scompare, ma resta l'eterocromatina (Koller 1947⁽²⁾) in corpi di aspetto diverso (ved. Barigozzi 1949⁽³⁾); secondo le recenti vedute, l'eterocromatina del nucleo intercinetico ha una grande importanza in quanto essa interviene a controllare il metabolismo proteico ed in particolare quello degli acidi nucleici della cellula in accrescimento ed in attività funzionale (Caspersson 1950⁽⁴⁾).

(*) Ricerca eseguita nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze della Università di Roma; con il contributo del C.N.R.

(**) Presentata nella seduta del 14 gennaio 1954.

(1) H. H. SWIFT, « *Physiol. Zool.* », 23, p. 169 (1950).

(2) P. C. KOLLER, « *Symp. Soc. experim. Biol.* », 1, p. 270 (1947).

(3) C. BARIGOZZI, in: *Acidi nucleici, proteine e differenziamento normale e patologico*, (Torino 1949), p. 66.

(4) T. CASPERSSON, *Cell Growth and Cell Function* (New York 1950).

Per le considerazioni sopra esposte mi è apparso interessante stabilire un confronto tra le strutture desossiribonucleiche dei nuclei di neuroni di diverso tipo ed eseguire un esame sul loro comportamento durante il differenziamento del neurone di vari Vertebrati.

Su questi problemi vanno ricordate in primo luogo le classiche ricerche di Levi (1896-98⁽⁵⁾); questo Autore, in una estesa indagine comparativa eseguita sul nucleo dei neuroni di numerosi Vertebrati, ha messo in evidenza come durante il differenziamento del neurone la cromatina (nucleina) migra verso il centro del carioplasma, condensandosi in 2-4 grosse zolle attorno al nucleolo; Levi ha chiamato questo fenomeno « centralizzazione » ed ha osservato che esso si arresta a vari stadi a seconda della « elevatezza funzionale del neurone », intendendo con questo termine lo sviluppo e le dimensioni del pirenoforo, il numero e l'estensione dei prolungamenti nervosi e la complessità funzionale del neurone. Le osservazioni di Levi sono state confermate da numerosi Autori successivi che si sono occupati dell'argomento (Ramon y Cajal 1896, Van Gehuchten 1897, Perrin de la Touche e Dide 1901, Rohde 1903, Hatai 1904, Ferrata 1905, Havet 1906, Lache 1906, Collin 1907, Mühlmann 1911, ecc.).

Di recente, in seguito all'impiego di speciali tecniche (osservazione all'ultravioletto: Stöhr 1923⁽⁶⁾, Hydén 1943⁽⁷⁾) e di precise reazioni istochimiche (reazione di Feulgen) sul tessuto nervoso, oltre alle zolle perinucleari di Levi, nei nuclei di neuroni voluminosi sono stati messi in evidenza granuli desossiribonucleici nel carioplasma, particolarmente abbondanti contro la membrana nucleare (Hydén 1943⁽⁷⁾, Sosa 1945⁽⁸⁾, ecc.). Queste osservazioni mi hanno spinto ad eseguire un riesame delle modificazioni delle strutture nucleari in vari tipi di cellule nervose di diversi Vertebrati.

In questa Nota mi limito ad esporre sommariamente i risultati delle osservazioni compiute sui nuclei delle cellule nervose di due Mammiferi: un carnivoro (il gatto) ed un roditore (il ratto albino); insisterò nella descrizione dei neuroni di gatto anzitutto perché nei Felidi almeno alcune cellule nervose sono in proporzione più sviluppate che in altri mammiferi (Sugita 1918⁽⁹⁾) e anche perché di recente nel nucleo dei neuroni dei Carnivori è stata messa in evidenza una sferula eterocromatica, presente solo negli individui di sesso femminile, che è stata interpretata come eterocromatina dei cromosomi sessuali (Barr e Bertram 1949)⁽¹⁰⁾.

Usando la tecnica per il metodo di Feulgen e quelle per la messa in evidenza delle ribosonucleoproteine (ved. in proposito una mia precedente Nota in questi

(5) G. LEVI, « Riv. Patol. Nerv. e Ment. », 1, p. 141; (1896); *Ibidem*, 2, p. 190; *Ibidem*, 3, p. 244 (1898).

(6) P. STÖHR, « Anat. Anz. », 57, p. 154 (1923).

(7) O. HYDÉN, « Acta Physiol. Scand. », 6, Suppl. XVII.

(8) J. SOSA, « Ann. Fac. Med. Montevideo », 30, p. 319 (1945).

(9) N. SUGITA, « Journ. Comp. Neurol. », 29, p. 241 (1918).

(10) Per le critiche sollevate in proposito all'esistenza ed all'interpretazione della sex chromatin, rimando al recente lavoro di K. L. MOORE e M. L. BARR, « Journ. Comp. Neurol. » 98, p. 213 (1953).

« Rendiconti » ⁽¹¹⁾), ho riscontrato che la seriazione delle immagini dei nuclei dei neuroni esaminati nei due Mammiferi, è in diretto rapporto con il volume nucleare, e quindi, per le note relazioni intercorrenti tra citoplasma e nucleo, con quello neurolasmatico; infatti nelle cellule nervose differenziate ho distinto:

a) nei granuli della corteccia cerebrale, di quella cerebellare e della retina, elementi di piccole dimensioni (nucleo da 3 a 6 μ di diametro—fig. 1, 5, 10), il materiale Feulgen-positivo si presenta in grosse zolle marcate localizzate in parte contro la membrana nucleare, ove possono apparire più o meno unite da sottili prolungamenti, e parte nel karioplasma ove si addensano in due grosse zolle attorno al nucleolo ribonucleico, che è eccentrico, a costituire la cromatina nucleolo-associata; nei gatti di sesso femminile ho osservato una grossa sferula, positiva per il DNA e per RNA, localizzata in genere sul polo non occupato dal nucleolo;

b) nelle cellule di medie dimensioni (nuclei da 7 a 10 μ di diametro (fig. 6), quali quelle dello strato molecolare della corteccia cerebrale e cerebellare e quelle delle corna posteriori del midollo di gatto e di ratto, le strutture Feulgen-positive si presentano contro la membrana nucleare disposte come zolle minute e numerose e concentrate in 2-4 zolle semilunari attorno al nucleolo ribonucleico; nei neuroni di gatti di sesso femminile si osserva una sferula, più piccola del nucleolo e più prossima a questo rispetto alle cellule dei granuli;

c) nelle cellule molto voluminose del ratto (neuroni di Purkinje, del nucleo dentato, piramidali della corteccia cerebrale, multipolari del midollo e gangliari) ed in alcune del gatto (neuroni di Purkinje, cellule piramidali del III strato della corteccia), con nuclei da 11 a 14 μ di diametro (fig. 2, 3, 7, 10) il materiale Feulgen-positivo si presenta contro la membrana nucleare sotto forma di una coroncina di granuli isolati; nel karioplasma, oltre alla cromatina nucleolo-associata, che appare come un rivestimento granuloso quasi continuo, si osservano minuti granuli Feulgen-positivi, distribuiti più o meno omogeneamente; nei neuroni di gatto di sesso femminile, la grossa sferula della cromatina sessuale è presso al nucleolo;

d) nelle cellule più voluminose del gatto (cellule piramidali giganti del V strato della corteccia cerebrale, multipolari motori delle corna anteriori del midollo e gangliari) il materiale Feulgen-positivo a ridosso della membrana nucleare si presenta come minuti granuli, tanto più radi ed imprecisi quanto maggiori sono le dimensioni del nucleo (fig. 4, 8); attorno al voluminoso nucleolo ribonucleico la cromatina nucleolo-associata si presenta come un esile rivestimento continuo di spessore uniforme; granuli Feulgen positivi di varie dimensioni si osservano in prossimità del nucleolo e tra essi, particolarmente evidente, si presenta negli individui di sesso femminile una grossa zolla, a margini perlopiù sfumati.

Ulteriori osservazioni preciseranno se, come sembra, i granuli e le zolle di cromatina si rarefacciano ed indeboliscano progressivamente la propria affinità per il reattivo fuxin-solforoso in rapporto con l'età dell'animale.

(11) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 16, p. 113 (1954).

Da questa sommaria esposizione appare evidente che il materiale Feulgen positivo nei nuclei dei neuroni differenziati si distribuisce in parte contro la membrana nucleare ed in parte attorno al nucleolo ribonucleico; tale distribuzione è molto netta nei neuroni con nucleo di dimensioni piccole e medie (dei granuli e dello strato molecolare del cervelletto); con l'aumentare delle dimensioni degli elementi nervosi si assiste a due fenomeni:

1° le strutture desossiribonucleiche si diradano e si assottigliano; infatti le zolle assumono un aspetto granulare e la cromatina nucleolo-associata diviene un sottilissimo rivestimento del nucleolo; la spiegazione di questi fatti può essere riferita rispettivamente all'aumento di massa del carioplasma ed a quello del nucleolo, che provoca la dilatazione della cromatina nucleolo-associata;

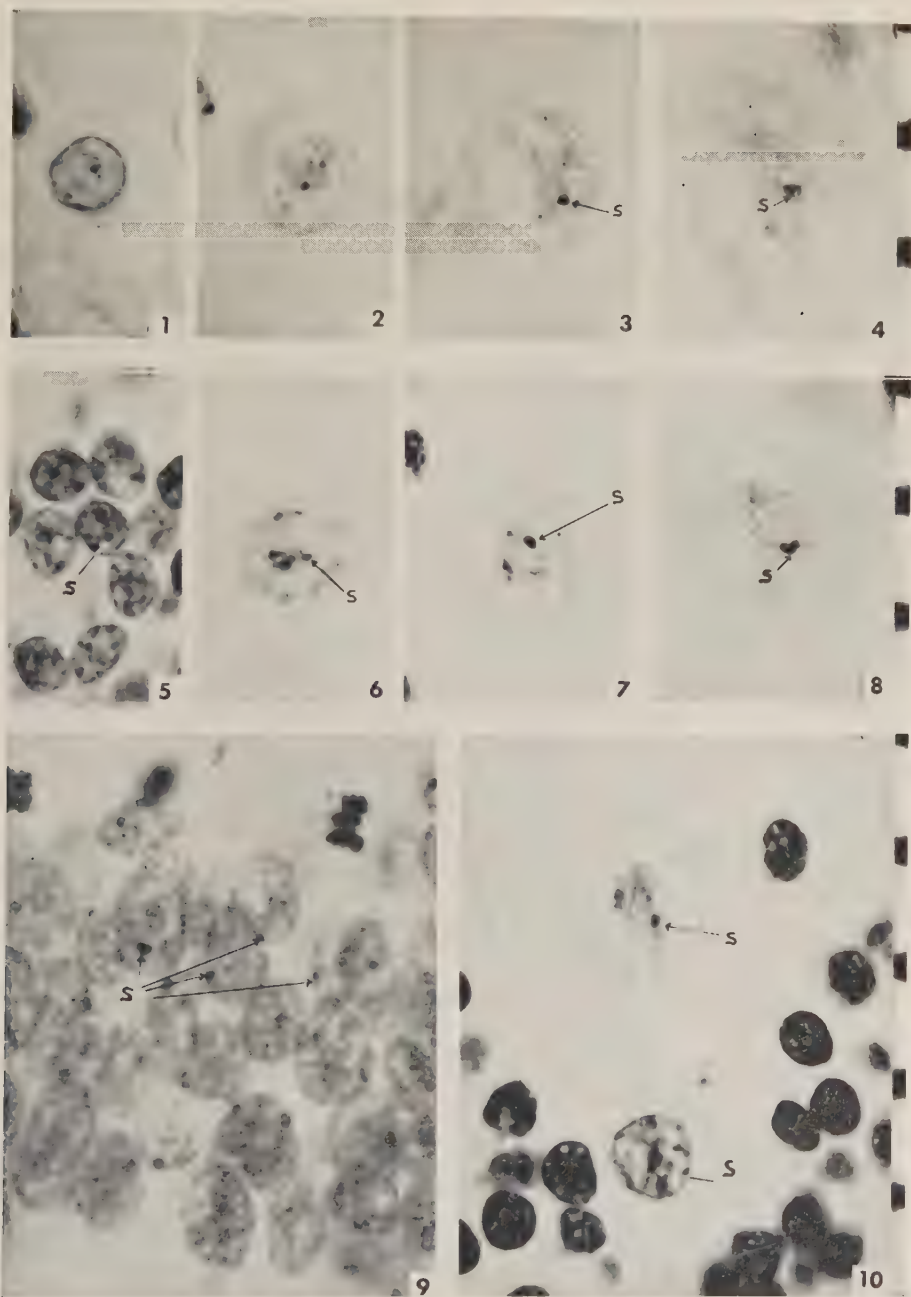
2° la comparsa di granulazioni Feulgen-positive nel carioplasma; è stato già osservato come queste granulazioni negli elementi voluminosi si distribuiscono più o meno omogeneamente nel carioplasma e nei più grossi si dispongono presso al nucleolo; questo fatto mi ha indotto ad esaminare l'istogenesi degli elementi precedentemente descritti su una serie di encefali a vari periodi della vita endouterina e postnatale di ratto e di gatto.

Conforme a quanto ho notato seguendo la normale istogenesi dei neuroni cerebellari di gatto⁽¹²⁾, il nucleo dei neuroblasti che costituiscono il tubo neurale di gatto e di ratto (embrioni di 24-30 somiti) presenta strutture Feulgen-positive di aspetto filamentoso (nuclei di 1° tipo sec. Barigozzi 1949⁽¹³⁾) con al centro del carioplasma una massa positiva per i metodi del RNA e del DNA, più o meno evidente a seconda dell'attività mitotica dell'elemento; solo in due, dei cinque embrioni di gatto esaminati, tutti i neuroblasti presentano una zolla appiattita aderente alla membrana nucleare, Feulgen-positiva (fig. 9) e reattiva anche con i metodi per il RNA, che deve ritenersi la sex-chromatin di Barr.

All'inizio del differenziamento dei diversi neuroblasti, più o meno presto a seconda della natura dei diversi centri osservati (prima nei gangli spinali e nei centri delle corna anteriori del midollo, poi nella corteccia cerebrale ed infine in quella cerebellare) ho osservato che il contenuto nucleare perde l'aspetto filamentoso ed il materiale Feulgen-positivo subisce un rimescolamento; una parte di esso si dispone infatti contro la membrana nucleare assumendo un aspetto reticolare con zolle nodali ed un'altra parte si concentra attorno alla massa centrale costituendo una grossa zolla che in un secondo momento si fende o si vacuolizza divenendo al centro positiva solo con i metodi per il RNA (formazione del nucleolo); negli elementi nervosi di piccole dimensioni, i granuli di cromatina aderenti alla membrana nucleare divengono più grossi, marcati e ravvicinati; nei neuroni più voluminosi durante il differenziamento, invece, essi divengono progressivamente più minuti e radi; le delicate granulazioni Feulgen-positive che ho osservato nel cario-

(12) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 17, p. 70 (1954).

(13) C. BARIGOZZI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 21, Suppl. p. 226 (1949).



1. - Nucleo di un neurone dello strato granulare della corteccia cerebrale di gatto. 2 e 3. - Nuclei di cellule piramidali dell'area motoria della corteccia cerebrale (III Strato) di gatto (S = sex-chromatin). 4. - Nucleo di una cellula piramidale dell'area motoria della corteccia cerebrale (V strato) di gatto. 5. - Nuclei di cellule dello strato granulare della corteccia cerebellare di gatto. 6. - Nucleo di una cellula dei canestri della corteccia cerebellare di gatto. 7. - Nucleo di una cellula di Purkinje del cervelletto di gatto. 8. - Nucleo di una cellula multipolare delle corna anteriori del midollo spinale (cervicale) di gatto. 9. - Nuclei del tubo neurale di embrione di 10 mm. di gatto. 10. - Nuclei di cellule della corteccia cerebellare di gatto; notare la diversa carica di materiale Feulgen positivo nei vari elementi. (Fissativo: Helly; Metodo di Feulgen; $\times 1100$; ogni intervallo delle scale a fianco = 10μ).

plasma dei grossi elementi nervosi differenziati, dalle immagini osservate durante l'istogenesi di questi neuroni, appaiono dovute a granuli che non raggiungono la membrana nucleare, probabilmente a causa del veloce accrescimento del nucleo e della loro piccola massa; il fatto che nei più voluminosi elementi differenziati essi restino presso al nucleolo avvalorava questa ipotesi. Un comportamento del tutto particolare si verifica a carico della sex-chromatin dei neuroni di gatti di sesso femminile: essa infatti durante l'istogenesi resta in permanenza sulla membrana nucleare e solo al termine del differenziamento del neurone si osserva distaccarsi dalla membrana e dirigersi verso il centro del carioplasma raggiungendo la sua sede definitiva; la differenza di comportamento tra questa e le granulazioni che nei nuclei più voluminosi restano nel carioplasma, trova con tutta verosimiglianza la sua ragione nella cospicua massa della sex chromatin (circa $1\ \mu$ di diametro). Va sottolineata l'importanza del comportamento di questa massa di cromatina per la diagnosi degli elementi in differenziamento rispetto a quelli differenziati. Durante l'istogenesi dei neuroni la cromatina nucleolo-associata si dilata in rapporto con l'aumentare delle dimensioni del nucleolo, quindi essa si frammenta in zolle e, proseguendo l'accrescimento del nucleolo ribonucleico, queste si dilatano formando prima delle masse semilunari e quindi costituendo un rivestimento granulare attorno al nucleolo; la cromatina nucleolo-associata in questi elementi al termine del differenziamento, come è stato già osservato, diviene un sottile rivestimento continuo di spessore uniforme che avvolge il nucleolo ribonucleico.

Da queste osservazioni si può concludere che la distribuzione e la disposizione del materiale Feulgen-positivo nei neuroni di gatto e di ratto è in stretto rapporto con le dimensioni nucleari; ciò è in accordo con le osservazioni di Levi⁽⁵⁾. Il materiale Feulgen-positivo si distribuisce attorno al nucleolo (cromatina nucleolo-associata) e contro la membrana nucleare; con l'aumentare del volume nucleare le strutture eterocromatiche diradano e si assottigliano; nei più grossi neuroni sono state osservate minute granulazioni nel carioplasma. Seguendo l'istogenesi dei diversi neuroni è stato osservato che il materiale Feulgen-positivo si modifica in rapporto con due fenomeni distinti: con l'inizio del differenziamento e con l'accrescimento del neurone; esso infatti perde precocemente l'aspetto filamentoso, subisce un rimescolamento, e quindi si distribuisce parte sulla membrana nucleare (aspetto reticolare, poi a zolle o a granuli) e parte al centro del carioplasma in rapporto con la formazione del nucleolo, a costituire la cromatina nucleolo-associata; nei neuroni che subiscono un notevole e rapido sviluppo volumetrico, le strutture desossiribonucleiche non riescono a raggiungere tutte la membrana nucleare, così che una parte di esse resta nel carioplasma. Un comportamento di particolare interesse è stato osservato a proposito di una cospicua massa Feulgen-positiva presente solo negli individui di sesso femminile di gatto (sex-chromatin di Barr) e che caratterizza gli elementi in differenziamento da quelli a differenziamento ultimato.

Biologia. — *Sulla incompatibilità larvale tardiva nei trapianti xenoplastici di Urodeli su Anuri* (*). Nota di ALDO ROSSI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Dalle numerose esperienze sui trapianti omo-etero-xenoplastici è risultato che vi è un diverso grado di compatibilità fra il portatore e i tessuti trapiantati. Infatti la possibilità di sopravvivenza di un tessuto trapiantato è condizionata dalla affinità biochimica tra donatore e portatore; nei trapianti fra ordini zoologici differenti, dove c'è poca affinità biochimica, inevitabilmente si instaurano dei fenomeni di incompatibilità che conducono alla distruzione o del trapianto o del portatore. In alcune combinazioni xenoplastiche, i processi di degenerazione si manifestano subito dopo l'operazione mentre in altri più tardivamente, permettendo così una più lunga convivenza fra portatore e tessuto trapiantato. Questi diversi gradi di incompatibilità sono stati ampiamente studiati dal Cotronei e Coll. negli Anfibi anuri ed urodeli applicando la tecnica dei trapianti, degli espianti e delle parabiosi. Da queste ricerche è risultato che: *a*) il *Bufo* sia come portatore che come trapianto è sempre tossico per i tessuti del *Triton*; *b*) gli abbozzi di *Triton cristatus* e *taeniatus* trapiantati su embrioni di *Rana esculenta* non si differenziano e vanno in distruzione in un periodo in cui il portatore non ha ancora riassorbito il tuorlo; *c*) gli abbozzi di *Rana esculenta* trapiantati su *Triton cristatus* e *taeniatus* si differenziano e vanno in distruzione in un periodo in cui il portatore trovasi al termine del riassorbimento vitellino; *d*) l'*Hyla arborea* come portatore permette ai trapianti di *Triton* di differenziarsi e di sopravvivere a lungo; la degenerazione dei tessuti trapiantati, avviene tardivamente durante la vita larvale del portatore (Cotronei e Spirito 1930-31-36, Nicolosi 1942 ⁽¹⁾). Un comportamento simile si ha per i trapianti di *Triton* su *Discoglossus pictus* (Parravano 1939); *e*) gli abbozzi di *Hyla arborea* e di *Discoglossus pictus* trapiantati su embrioni di *Triton* si differenziano e vanno in distruzione durante la vita della larva del portatore, ma più precocemente che non nella combinazione inversa (Cotronei e Spirito 1930-31-36, Nicolosi 1942, Parravano 1939).

Cotronei ha quindi distinto i fenomeni di incompatibilità in due tipi: A) *Incompatibilità embrionale*: la degenerazione del trapianto avviene in un periodo in cui il portatore non ha ancora riassorbito il tuorlo (Periodo embrionale). L'abbozzo trapiantato non si differenzia e va rapidamente in degenerazione pochi giorni dopo l'operazione. Questa incompatibilità che si

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. Grassi » dell'Università di Roma, durante la direzione del prof. G. Cotronei.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) Per la bibliografia rimando al lavoro per esteso in corso di stampa nell'« Arch. Ital. Anat. Embriol. », vol. 61, 1956.

definisce come « primaria » si verifica nelle combinazioni del tipo *Triton cristatus* e *taeniatus* su *Bufo vulgaris*, *Bufo vulgaris* su *Triton cristatus* e *taeniatus*, *Triton cristatus* e *taeniatus* su *Rana esculenta*, *Triton cristatus* su *Rana agilis*, *Axolotl* su *Rana agilis* e *temporaria*, *Axolotl* su *Bufo vulgaris*. B) *Incompatibilità larvale*: la degenerazione del trapianto avviene nel periodo in cui il portatore ha già riassorbito il suo tuorlo (Periodo larvale). Gli abbozzi trapiantati si differenziano e vanno in distruzione in un periodo di tempo più o meno lungo della vita larvale del portatore. Possiamo quindi distinguere questo tipo di incompatibilità, definita come « secondaria », in due categorie: a) Incompatibilità che si manifesta subito dopo l'inizio della vita larvale del portatore, come nelle combinazioni *Rana esculenta* su *Triton cristatus* e *taeniatus*, *Rana agilis* su *Triton cristatus*, *Rana esculenta* e *temporaria* su *Axolotl*, *Bufo vulgaris* su *Axolotl*, *Hyla arborea* su *Triton cristatus* e *taeniatus*, *Discoglossus pictus* su *Triton taeniatus*. b) Incompatibilità che si manifesta più tardivamente durante la vita larvale del portatore, come nelle combinazioni *Triton cristatus* e *taeniatus* su *Hyla arborea* e *Triton taeniatus* e *cristatus* su *Discoglossus pictus* ⁽²⁾.

Da queste esperienze risulta quindi che la compatibilità fra donatore e portatore ha un valore differente a seconda che uno stesso individuo agisca come portatore o come trapianto. Un esempio tipico si ha nelle reciproche combinazioni fra *Rana esculenta* e *Triton cristatus*: infatti nella combinazione *Triton* su *Rana* si ha rapida incompatibilità embrionale e nella combinazione *Rana* su *Triton* incompatibilità all'inizio della vita larvale. Quindi in base al periodo (embrionale, larvale) in cui iniziano i processi di degenerazione del trapianto si può fare una scala di compatibilità che per le combinazioni citate è la seguente:

Incompatibilità embrionale		<i>Triton cristatus</i> su <i>Bufo vulgaris</i>
		<i>Bufo vulgaris</i> su <i>Triton cristatus</i>
Incompatibilità larvale		<i>Triton cristatus</i> su <i>Rana esculenta</i> (T. taeniatus su R. esculenta, T. cristatus su R. agilis, Axolotl su R. temporaria e esculenta, Axolotl su Bufo vulgaris)
		<i>Rana esculenta</i> su <i>Triton cristatus</i> (R. esculenta su T. taeniatus, R. agilis su T. cristatus, R. esculenta e temporaria su Axolotl; Bufo vulgaris su Axolotl, Hyla arborea su T. taeniatus e cristatus, Discoglossus pictus su T. taeniatus)
	Precoce	
	Tardiva	<i>Triton taeniatus</i> e <i>cristatus</i> su <i>Hyla arborea</i> <i>Triton taeniatus</i> e <i>cristatus</i> su <i>Discoglossus pictus</i> .

Nella scala di compatibilità la combinazione *Triton cristatus* su *Discoglossus pictus* è l'ultima della serie perché la degenerazione del trapianto si com-

(2) Mi riferisco essenzialmente ai risultati della scuola romana di G. Cotronei.

pleta dopo la metamorfosi del portatore; nella combinazione *Triton cristatus* su *Hyla arborea* la degenerazione del trapianto si completa prima della metamorfosi del portatore: in base a ciò sembrerebbe che la combinazione *Triton* su *Discoglossus* presenti un grado maggiore di compatibilità della combinazione *Triton* su *Hyla*. Tuttavia è interessante notare che il *Discoglossus pictus* si sviluppa più rapidamente dell'*Hyla arborea*: infatti la metamorfosi è più precoce in *Discoglossus* che in *Hyla*. Di conseguenza mi sono domandato se in queste due combinazioni, i fenomeni di degenerazione del trapianto sono effettivamente in rapporto ai periodi di sviluppo (larvale, metamorfosi) del portatore o se invece sono in relazione innanzi tutto con il fattore tempo.

Mi sono proposto di fare un esame comparativo fra lo stadio di sviluppo dei portatori, il momento in cui inizia e quello in cui termina la degenerazione dei tessuti del trapianto. A questo scopo ho trapiantato abbozzi di arto-cinto scapolare di *Triton cristatus* su embrioni di *Hyla arborea* e di *Discoglossus pictus*. L'abbozzo del *Triton* è stato trapiantato nella sede dell'occhio previamente asportato dell'*Hyla* e del *Discoglossus* e nel territorio dell'arto posteriore dell'*Hyla arborea*. Le operazioni sono state eseguite nei mesi di aprile-maggio, allo stadio 35-36 (Twitty e Bodenstein) del *Triton cristatus* ed allo stadio di bottone codale dell'*Hyla arborea* e del *Discoglossus pictus*. I dati relativi al comportamento dell'abbozzo arto-cinto scapolare trapiantato su *Hyla* e *Discoglossus* li rimando al lavoro in esteso, ora in stampa.

Al semplice esame macroscopico sembra che il riassorbimento dell'arto di *Triton* trapiantato su *Discoglossus* avvenga dopo la metamorfosi del portatore, mentre sull'*Hyla*, tardivamente, durante la vita larvale.

Facendo l'esame microscopico si nota che la successiva degenerazione dei tessuti di *Triton* avviene a circa uguale distanza di tempo dal giorno della operazione tanto su *Hyla* che su *Discoglossus*. I tessuti dell'arto cinto scapolare vanno in degenerazione con una caratteristica sequenza: lo strato cutaneo dell'arto di *Triton* viene sormontato da quello dell'*Hyla* e del *Discoglossus*; dopo circa 25 giorni dall'operazione non è più possibile distinguere chiaramente lo strato cutaneo dell'arto di *Triton* da quello di rivestimento del portatore: quest'ultimo successivamente si ispessisce e forma uno spesso manicotto intorno all'arto trapiantato. Dopo più di 3 settimane dall'operazione la muscolatura e la cartilagine dell'Urodelo non presentano evidenti fenomeni degenerativi: tuttavia cominciano a comparire i primi fagociti del portatore in prossimità del trapianto. Nel *Discoglossus* dopo 30 giorni dall'operazione, in un caso ho notato i primi accenni di degenerazione della muscolatura (stadio del portatore XVII⁽³⁾); nell'*Hyla*, per mancanza di casi l'ho potuta osservare solo dopo 45 giorni dall'operazione (stadio del portatore IV). In un *Discoglossus* allo stadio XXV, cioè quando il portatore è già completamente metamorfosato (dopo 45 giorni dall'operazione) non vi è più alcuna traccia delle fibre muscolari di *Triton* mentre in un caso esaminato 51 giorni

(3) Per gli stadi larvali dell'*Hyla arborea* e del *Discoglossus pictus* mi sono basato su quelli della *Rana palustris* (TAYLOR e KOLLROS).

dopo l'operazione (stadio del portatore XXIV) la muscolatura è ancora presente ma profondamente degenerata. In *Hyla* dopo 46 giorni dall'operazione (stadio del portatore VII) il trapianto presenta notevoli degenerazioni a carico della muscolatura e segni di degenerazione della cartilagine. Sul *Discoglossus* ho osservato cartilagine di *Triton* profondamente degenerata 51 giorni dopo l'operazione (stadio del portatore XXIV). In *Hyla* la completa degenerazione della cartilagine di *Triton* l'ho osservata 54 giorni dopo l'operazione (stadio del portatore: IV e XVIII); tuttavia in un caso esaminato 80 giorni dopo l'operazione (stadio del portatore XVIII) la cartilagine del *Triton* è ancora ben conservata e sono ancora visibili alcune fibre muscolari. Particolarmente interessanti sono le ultime fasi della degenerazione del trapianto; in alcuni casi nulla lascerebbe pensare che l'arto visibile all'esame macroscopico è internamente degenerato; all'esame microscopico gli stessi arti presentano esternamente uno spesso manicotto cutaneo di rivestimento del portatore; internamente non vi è più alcuna traccia dei tessuti trapiantati e gli spazi lasciati liberi, vengono invasi da fagociti e da globuli rossi del portatore. Successivamente anche questi ultimi scompaiono e resta solo un manicotto cutaneo del portatore che persiste ancora a lungo dopo la completa degenerazione dei tessuti di *Triton* trapiantati. In un caso il pseudo-arto di *Triton* è rimasto inalterato su un portatore di *Hyla* 127 giorni dopo l'operazione (stadio del portatore XVIII).

Nella tabella che segue ho riunito i casi sopradescritti allo scopo di illustrare complessivamente le successive fasi della degenerazione dei tessuti muscolare e cartilagineo del *Triton*, dopo la comparsa dei fagociti del portatore in prossimità del trapianto; con questa tabella si può fare anche un confronto diretto fra lo stadio del portatore *Hyla* e *Discoglossus* e il tempo (partendo dal giorno dell'operazione) in cui si manifesta una determinata fase della degenerazione.

Dal complesso di questi dati risulta che nella incompatibilità larvale tardiva si deve fare una distinzione fra la reazione iniziale e la successiva degenerazione del trapianto: *a*) la reazione iniziale si manifesta nei primi stadi della vita larvale dell'*Hyla* e del *Discoglossus*: durante questa fase non si hanno evidenti fenomeni di degenerazione; *b*) la degenerazione dei tessuti trapiantati si manifesta tardivamente durante la vita larvale e prosegue con una velocità che risulta indipendente dalla velocità di sviluppo dei portatori. Secondo Cotronei l'accumulo di sostanze dannose per il trapianto provoca ad un dato momento l'iniziarsi del processo degenerativo.

Come è stato precedentemente detto, il *Discoglossus* si sviluppa più rapidamente dell'*Hyla*; tuttavia nei due portatori i tessuti di *Triton* degenerano nello stesso periodo di tempo: di conseguenza in *Discoglossus* la degenerazione del trapianto si completa dopo la metamorfosi perché la velocità di sviluppo del portatore è maggiore della velocità di degenerazione del trapianto: mentre nell'*Hyla* la degenerazione si completa prima della metamorfosi, perché il portatore si sviluppa più lentamente rispetto alla velocità di degenerazione del trapianto. Date le variazioni individuali e il numero limitato di casi in

esame, non si possono definire i limiti di tempo entro cui si realizzano le successive fasi della degenerazione dei tessuti trapiantati. Dalla descrizione dei risultati risulta che i processi di degenerazione si realizzano nello stesso periodo di tempo anche nei portatori che rallentano o arrestano il loro sviluppo ad un determinato stadio della vita larvale. Ciò dimostra quindi che una volta iniziati i processi di degenerazione questi procedono indipendentemente dalla velocità di sviluppo di ambedue i portatori. Questo fatto esclude nella combinazione *Triton cristatus* su *Discoglossus pictus* l'importanza della metamorfosi del portatore nei processi di degenerazione; tutt'al più si può supporre che con la metamorfosi si possono ad un dato momento accelerare i processi degenerativi; ma almeno per i risultati ottenuti non vi è alcuna prova in favore di tale ipotesi.

caso	stadio	giorni	fagociti	muscolatura	cartilagine
<i>Triton cristatus</i> su <i>Hyla arborea</i>					
3	II	23	+	+++	+++
19	III	25	++	+++	+++
20	III	25	++	+++	+++
6	II	27	+	+++	+++
7	IV	45	—	—	—
21	VII	46	+++	+	++
22	IV	54	+++	—	—
23	XVIII	54	+++	—	—
8	XVIII	80	—	—	—
24	XVIII	127	0	0	0

Triton cristatus su *Discoglossus pictus*

13	VIII	25	+	+++	+++
14		29	+	+++	+++
15	XVII	30	++	++	+++
16	X	31	++	++	+++
21	XIV	32	++	++	+++
22	XXV	45	+++	—	+++
23	XXIV	51	+++	+	+

Dall'insieme di questi fatti si deve ritenere quindi che è essenzialmente uguale il grado di compatibilità delle combinazioni *Triton cristatus* su *Hyla arborea* e *Triton cristatus* su *Discoglossus pictus*.

CONCLUSIONI. — Si è esaminato il grado di compatibilità e di incompatibilità fra le combinazioni *Triton cristatus* su *Hyla arborea* e *Triton cristatus* su *Discoglossus pictus*. I risultati sono i seguenti:

1° Nella incompatibilità larvale tardiva, che si stabilisce nelle combinazioni *Triton* su *Hyla* e *Triton* su *Discoglossus*, si deve fare una distinzione fra la reazione iniziale e la successiva degenerazione del trapianto:

a) Una reazione iniziale, con richiamo di fagociti, si manifesta in stadi della vita larvale dell'*Hyla* e del *Discoglossus* che precedono le fasi in cui si hanno evidenti fenomeni di degenerazione;

b) la degenerazione dei vari tessuti trapiantati inizia successivamente durante la vita larvale di ambedue portatori.

2° La degenerazione dei tessuti muscolare e cartilagineo di *Triton* trapiantati su *Discoglossus* si completa dopo la metamorfosi del portatore, mentre in *Hyla*, tardivamente durante la vita larvale. Si è dimostrato tuttavia che:

a) la degenerazione dei tessuti muscolare e cartilagineo di *Triton* avviene nello stesso periodo di tempo tanto su *Hyla* che su *Discoglossus*;

b) il *Discoglossus pictus* si sviluppa più velocemente dell'*Hyla arborea*: infatti la metamorfosi è più precoce in *Discoglossus* che in *Hyla*; di conseguenza

c) la degenerazione del trapianto su *Discoglossus* si completa dopo la metamorfosi perché la velocità di sviluppo del portatore è maggiore di quella della degenerazione del trapianto; al contrario la degenerazione del trapianto su *Hyla* si completa prima della metamorfosi perché il portatore si sviluppa lentamente rispetto alla velocità di degenerazione del trapianto.

3° I processi di degenerazione si realizzano nello stesso periodo di tempo nei portatori che rallentano o arrestano il loro sviluppo ad un determinato stadio della vita larvale. Si deve ritenere quindi che:

a) una volta iniziati i processi di degenerazione, questi proseguono indipendentemente dalla velocità di sviluppo del portatore;

b) nella combinazione *Triton cristatus* su *Discoglossus pictus* l'inizio dei fenomeni degenerativi del trapianto non è in dipendenza della metamorfosi del portatore.

4° In definitiva questi risultati dimostrano che i tessuti di *Triton cristatus* hanno una uguale resistenza sia trapiantati su *Hyla arborea* che su *Discoglossus pictus*; si deve ritenere quindi che è essenzialmente uguale il grado di compatibilità delle combinazioni *Triton cristatus* su *Hyla arborea* e *Triton cristatus* su *Discoglossus pictus*.

Biologia. — *Ricerche sulle correlazioni tra midollo spinale ed arti negli Anfibi Anuri. Esperienze di asportazione e di trapianto di arti* (*). Nota di TEODORO PERRI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In lavori precedenti ⁽¹⁾ esposi vari risultati, che ottenni in Anfibi Anuri, sulle correlazioni tra gli arti ed il sistema nervoso centrale e periferico in esperienze di asportazione oppure di trapianto di un abbozzo di arto o, infine, in casi d'induzione di arti soprannumerari. Nella presente Nota espongo i risultati che mi paiono non privi d'interesse, riguardanti essenzialmente due questioni dell'amplissimo argomento: una di esse è lo studio di come vengano a costituirsi le asimmetrie nell'intumescenza lombo-sacrale in seguito all'asportazione di un abbozzo di arto, e a tale scopo ho esaminato, in vari stadi di sviluppo, il midollo spinale di larve di *Bufo vulgaris* prive di un arto posteriore in seguito all'asportazione del suo abbozzo allo stadio di embrione giovanissimo; l'altra questione della quale mi occupo in questo lavoro è la mobilità degli arti trapiantati sul tronco, avendo ottenuto l'anno scorso alcuni casi di arti trapiantati dotati di mobilità più o meno ampia. Le due serie di esperienze convergono nello studio delle differenziazioni regionali precoci che si hanno nello sviluppo del midollo spinale, ossia nello studio del costituirsi delle intumescenze brachiale e lombo-sacrale, distinguendo quanto sia insito nel midollo stesso e quanto sia invece dovuto agli organi periferici (arti).

ESPERIENZE DI ASPORTAZIONE DI UN ABOZZO DI ARTO. — Esperienze di asportazione di un abbozzo di arto embrionale o larvale furono già eseguite da molti Autori negli Anuri, negli Urodeli e nel pollo. Fu sempre osservata, sul lato operato, una notevole diminuzione di volume dei gangli spinali corrispondenti; per quanto riguarda la parte motrice del midollo spinale, non furono riscontrate modificazioni in *Amblystoma* (Detwiler e la sua Scuola), mentre furono osservate ipoplasia e assenza del corno motore, sul lato operato, sia negli Anuri (Braus, Dürken, May ed altri) che nel pollo (Hamburger). Per più ampie notizie rinvio al mio lavoro in esteso del 1955 ⁽¹⁾. Debbo qui notare che nell'esperienze sugli Anuri gli operati furono quasi sempre esaminati quando erano già in metamorfosi o poco prima; l'esigenza di studiare i vari gradi di passaggio dello stabilirsi delle deficienze del sistema nervoso nei casi di asportazione di un arto, fu particolarmente avvertita dapprima da

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata dell'Università di Perugia, con un contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) T. PERRI, in questi « Rendiconti », vol. 15 (ser. 8^a), p. 463 (1953); vol. 16 (ser. 8^a), p. 118 (1954 a); vol. 16 (ser. 8^a), p. 291 (1954 b); « Rivista di Biologia », vol. 47 (1955).

R. Levi-Montalcini e G. Levi ⁽²⁾ che si riferirono soprattutto al comportamento dei gangli spinali (esperienze nel pollo).

Nell'intento di avere qualche chiarimento a proposito delle precoci differenze regionali nel midollo spinale, che alcune mie precedenti ricerche avevano contribuito a porre in risalto, ho voluto l'anno scorso sperimentare sulle modalità con cui si stabiliscono tali differenze, confrontando nel midollo spinale, in vari stadi di sviluppo, il lato normale con quello operato di asportazione di un abbozzo di arto.

A questo scopo, in vari embrioni di *Bufo vulgaris*, ho asportato l'abbozzo di un arto posteriore. Ho eseguito le operazioni allo stadio di bottone codale piccolo, ossia — è qui da notare — molto prima che l'abbozzo stesso sia innervato. L'asportazione dell'abbozzo fu ampia: in alcuni casi se ne ebbe la rigenerazione mentre in altri, dei quali appunto tengo qui conto, non si ebbe. Gli operati vennero fissati in vari stadi di sviluppo sia embrionali che larvali.

L'esame microscopico ha dato i seguenti risultati. Nei casi fissati a larve ancora giovanissime e con l'abbozzo dell'arto (sul lato normale) allo stadio di gemma sferica o un po' allungata, non ho riscontrato, nella futura regione lombo-sacrale del midollo spinale, apprezzabili differenze tra il lato normale e quello senz'arto; anche nei gangli spinali corrispondenti non ho osservato asimmetrie.

Molto espressivi sono i casi fissati in stadi più avanzati, ossia quando l'abbozzo dell'arto è cilindro-conico oppure è al primissimo inizio della digitazione. A questo stadio nelle intumescenze brachiale e lombo-sacrale è già cominciato il differenziamento dei corni motori, che si riconoscono — soprattutto — per la posizione delle loro cellule, le quali fanno sporgenza nella sostanza bianca. Il fatto più interessante da notare è che nel lato privo dell'arto il corno motore è più piccolo del normale ma — e questo è l'importante — è presente e ben riconoscibile.

È successivamente, ossia dallo stadio di digitazione ben chiara in poi, che si hanno differenze sempre più nette tra il lato normale e quello operato; in quanto su quest'ultimo si finisce col non scorgere più un evidente corno motore. Nei gangli spinali corrispondenti è ben netta la differenza di volume tra quelli del lato normale e quelli del lato operato.

Osservo subito che non è ancora completa la serie dei casi, e spero che le lacune saranno eliminate nella prossima stagione sperimentale. Tuttavia i risultati finora conseguiti mi paiono interessanti perché pongono in rilievo che nel midollo spinale di *Bufo vulgaris* il differenziamento dei corni motori delle intumescenze è — nelle sue fasi iniziali — indipendente dalla presenza dell'arto. È successivamente che quest'ultimo acquista importanza, ed è indispensabile, per l'ulteriore sviluppo del corno motore; è in questa seconda fase che si verifica la legge del Levi sulla correlazione tra il volume del pirenoforo del neurone e l'estensione del neurite corrispondente. Da ribadire che questo inizio dei corni motori si ha solo nella regione lombo-sacrale del mi-

(2) R. LEVI-MONTALCINI e G. LEVI, in « Arch. de Biol. », vol. 53, p. 537 (1942).

dollo spinale, anche sul lato ove sia stato asportato l'arto, e nella regione brachiale, mentre non si ha affatto nel midollo spinale intermedio alle intumescenze. Già prima che l'abbozzo dell'arto possa avere influenza, si è adunque stabilita una differenza nel midollo spinale tra le zone delle future intumescenze e la zona intermedia: vedremo come ciò risulti riconfermato da esperienze con i trapianti di abbozzo di arto.

Esperienze di trapianto di un abbozzo di arto. — Nelle mie precedenti ricerche sull'induzione di arti soprannumerari avevo osservato alcuni casi con mobilità, mentre in quelle sul trapianto di abbozzi di arto avevo sempre avuto arti immobili. L'anno scorso ho eseguito numerosi trapianti dell'abbozzo dell'arto, sia omoplastici (in *Bufo vulgaris* e in *Rana esculenta*) che eteroplastici (*Bufo viridis* su *Bufo vulgaris*).

I trapianti omoplastici in *Bufo vulgaris* furono eseguiti allo stadio di bottone codale piccolo o piccolissimo. Gli arti trapiantati si svilupparono benissimo, sincronicamente agli arti del portatore e raggiunsero dimensioni notevoli. Frequentissima (11 casi su 15) fu la duplicazione degli arti. Su 15 casi di ottimo differenziamento, tutti tenuti in vita sino alla metamorfosi, osservai quattro casi di mobilità, sui quali tornerò tra poco. In *Rana esculenta*, su 5 casi di ottimo differenziamento e accrescimento, anch'essi fissati alla metamorfosi, non ebbi nessun caso di mobilità.

I trapianti eteroplastici furono eseguiti asportando in *Bufo viridis*, allo stadio di bottone codale piccolo, l'abbozzo dell'arto posteriore destro e trapiantandolo su un embrione di *Bufo vulgaris* allo stesso stadio. Dieci casi furono tenuti in vita fino alla metamorfosi. L'arto trapiantato si sviluppò benissimo: è qui implicita, e ne viene ribadita, la completa compatibilità della combinazione *Bufo viridis* su *Bufo vulgaris*, compatibilità che già risultava, con esperienze di trapianto della vescicola ottica, da vari lavori della Scuola del Cotronei⁽³⁾. È interessante la velocità di accrescimento di questi arti trapiantati. È noto che, a parità di temperatura, *Bufo viridis* va in metamorfosi dopo un tempo molto più lungo che *Bufo vulgaris*. Orbene, in tutti i casi, l'arto di *viridis* dapprima si accrebbe con velocità sua propria di accrescimento, ossia come nei *viridis* normali di controllo e quindi molto meno degli arti di *vulgaris*; successivamente, risentendo delle condizioni ambientali del portatore, si accrebbe in modo molto più rapido che non gli arti dei *viridis* di controllo, pur senza raggiungere, almeno fino alla metamorfosi, la lunghezza degli arti del *vulgaris* portatore. Un altro interessante particolare è che su 11 casi ottenni in uno solo la duplicazione del trapiantato, mentre si è visto che in *Bufo vulgaris* è frequentissima: onde si osservano negli Anuri, come già era stato notato per gli Urodeli⁽⁴⁾, differenze nella capacità alla duplicazione degli arti trapiantati a seconda della specie sulla quale si esperimenta. Questi trapianti eteroplastici li ho eseguiti perché offrono interesse per molte questioni: così,

(3) T. PERRI, in « Boll. di Zool. », a. 7 (1936); G. COTRONEI e T. PERRI, ivi, a. 12 (1941); L. DI NATALE, in questi « Rendiconti », vol. 16 (ser. 8^a), p. 563 (1954).

(4) F. H. SWETT, in « J. of Exp. Zool. », vol. 61, p. 129 (1932).

oltre le sopradette, vi è quella dell'origine della muscolatura degli arti, delle correlazioni scheletriche, ecc. Per ora mi limito ad aggiungere, per quanto riguarda questa Nota, che su 10 casi di ottimo differenziamento ed accrescimento, tenuti in vita sino alla metamorfosi, non osservai nessun caso con mobilità dell'arto trapiantato.

In tutti questi trapianti, che furono eseguiti a vari livelli, ottenni solo 4 casi di mobilità dell'arto. La mobilità era sia spontanea che in seguito a stimolazione meccanica; era più o meno accentuata, ma sempre bene evidente. Appartengono tutti ai trapianti omoplastici su *Bufo vulgaris*. Al fatto che nei trapianti di abbozzi di arto di *Bufo viridis* su *Bufo vulgaris* non ebbi nessun caso di mobilità, non mi pare si possa annettere, almeno per ora, alcun particolare significato.

Nei casi con mobilità l'arto si è sempre sviluppato vicinissimo al normale arto anteriore del portatore. In un caso si tratta di arto unico; negli altri tre di duplicazione ed uno solo dei componenti (quello che inizia più vicino al normale arto anteriore) era mobile. L'arto, o nelle duplicazioni il componente mobile, era benissimo conformato, come mostra l'esame microscopico, sia per la parte scheletrica che per le articolazioni e per l'abbondanza della muscolatura. Particolare interesse ha l'innervazione che proviene e in misura cospicua dal plesso brachiale ⁽⁵⁾. L'esame microscopico di alcuni casi con l'arto trapiantato immobile, ha mostrato invece che in questi l'innervazione non proveniva, o proveniva solo in piccola parte, dalle intumescenze, che la muscolatura era molto meno abbondante, mentre si poteva avere buona conformazione sia dello scheletro che delle articolazioni. Le differenze tra arti mobili e immobili sono pure evidenti nei casi sopradetti di duplicazione dell'arto con mobilità di uno solo dei componenti.

Questa parte delle mie ricerche pone adunque in evidenza, d'accordo con quanto avevo osservato nei casi di mobilità di arti soprannumerari da induzione abnorme, che per la mobilità degli arti trapiantati è essenziale una cospicua innervazione da parte di una intumescenza. Nell'esperienze del presente lavoro si tratta dell'intumescenza anteriore, nei casi precedenti di arti indotti si trattava o dell'intumescenza anteriore o della posteriore. Il prendere connessioni nervose con un'intumescenza è in gran parte collegato, a sua volta, con la vicinanza dell'arto trapiantato all'arto normale. Gli altri fattori necessari alla mobilità degli arti possono verificarsi anche negli arti immobili.

Non ho parlato per nulla delle modificazioni della parte motrice del midollo spinale, perché mi riservo di ritornarvi dopo esatte misurazioni. Mi limito qui a notare che le connessioni nervose tra arto trapiantato e midollo spinale non provocano — quando avvengano con il tratto di midollo intermedio alle intumescenze — la formazione di una intumescenza. Sul lato del trapianto, i gangli corrispondenti sono, com'era da attendersi per le ricerche di molti autori, aumentati di volume anche nei casi senza mobilità.

(5) Ciò ho visto in 3 casi. L'altro fu fissato già morto e perciò l'innervazione non è risultata con chiarezza. Ma trovandosi la testa del femore dell'arto trapiantato vicinissima all'arto anteriore del portatore, è più che probabile che anche in questo caso l'innervazione sia provenuta dal plesso dell'arto anteriore normale.

CONSIDERAZIONI. - Ho già detto, all'inizio del lavoro, che le due serie di esperienze riferite convergono nello studio di precoci differenziamenti regionali del midollo spinale degli Anuri.

Delle intumescenze ho preso particolarmente in considerazione, per ora, i corni motori. Nella morfologia causale di questi corni motori occorre distinguere le fasi iniziali del loro differenziamento dalle fasi ulteriori. Le fasi iniziali sono indipendenti dalla presenza dell'abbozzo dell'arto, come si è visto nell'esperienza di asportazione di questo abbozzo; è inoltre da ribadire che si verificano solo in corrispondenza delle future intumescenze, ossia mancano completamente nel tratto di midollo intermedio ad esse. Ricordo che l'abbozzo dell'arto fu asportato allo stadio di bottone codale piccolo: perciò molto prima dell'inizio della sua innervazione e della sua influenza sul midollo spinale. Le fasi ulteriori di sviluppo che, nelle intumescenze, portano alla formazione dei corni motori con le loro grosse cellule motorie, sono invece dipendenti dalla presenza dell'arto altrimenti, come si è visto, non si ha più nessuna traccia dei corni motori. È in questa seconda parte dello sviluppo che acquista tutto il suo valore la legge del Levi.

Un altro aspetto del precoce differenziamento regionale del midollo spinale è costituito dalla mobilità o meno dell'arto trapiantato. È infatti indispensabile che il trapiantato riceva una cospicua innervazione dal plesso brachiale o lombo-sacrale. Questa necessità sembra più rigida negli Anuri che negli Urodeli; ricordo che il May ⁽⁶⁾ nelle sue esperienze di trapianto di abbozzi di arto in embrioni di *Discoglossus pictus* non segnalò nessun caso di mobilità; ricordo inoltre che nei suoi trapianti sul pollo l'Hamburger ⁽⁷⁾ ottenne mobilità solo quando l'arto era innervato da uno dei plessi normali degli arti. Che questo differenziamento anatomico e funzionale delle intumescenze non dipenda negli Anuri da connessioni del midollo con altre parti del neurasse (il che accade invece negli Urodeli secondo le ricerche del Detwiler) è reso evidente da mie precedenti ricerche (1953) ⁽¹⁾ dimostranti che abbozzi di arto trapiantati insieme con la futura regione lombo-sacrale erano dotati di notevolissima mobilità. Questo risultato è del tutto concordante con la conclusione che la competenza a dare l'intumescenza con corni motori si stabilisce precocemente.

CONCLUSIONI. - I risultati esposti in questa Nota pongono in evidenza che le fasi iniziali del differenziamento dei corni motori delle intumescenze è indipendente dalla presenza dell'arto, tanto che si presentano anche sul lato ove sia stato asportato l'arto; è per le fasi evolutive successive dei corni motori che è indispensabile la presenza dell'arto. Queste osservazioni chiariscono varie questioni relative alle differenze regionali del midollo spinale. Viene inoltre ribadito che gli arti trapiantati possono essere dotati di mobilità solo se ampiamente innervati dai plessi normali degli arti.

(6) R. M. MAY, in « Bull. biol. de la France et de la Belg. », vol. 57, p. 327 (1933).

(7) V. HAMBURGER, in « Phys. Zool. », vol. 12, p. 268 (1939), « J. of Exp. Zool. », vol. 80, p. 347 (1939).

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è presente alla seduta il prof. Wilhelm Blaschke dell'Università di Amburgo e porge all'illustre ospite il saluto cordiale della Classe e suo personale.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato del prof. Ezio Falla Caravino, consegnato alla Cancelleria in data 17 dicembre 1955, e contenente uno studio del predetto Professore sulla « Teoria Generale della esponenzialità ».

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci Scorza-Dragoni, Sansone, Segre, Picone, Cotronei, Cambi, Vardabasso, Pupilli, Rossi-Fanelli, Margaria e Severi.

Il Socio Benedicenti, nel presentare una Nota preliminare sua e del prof. Sergio Tchakhotine, sulle « Azioni di alcuni farmaci sugli esseri unicellulari », informa brevemente la Classe intorno a una serie di esperimenti che egli, in collaborazione con il predetto professore, ha eseguiti recentemente, in un laboratorio di fortuna improvvisato nella sua casa di campagna, su quelle cellule isolate che sono i protozoi e, specialmente, negli infusori.

Il Socio Benedicenti, dopo aver espresso il suo compiacimento per avere potuto lavorare ancora una volta con il prof. Tchakhotine, al quale da circa mezzo secolo è legato da vincoli di sincera amicizia e di antica colleganza, si augura che le esperienze da loro intraprese possano aprire una nuova via nel campo della farmacologia, quella cioè dello studio dei farmaci su una cellula sola e conclude inviando il suo affettuoso saluto a tutti i Colleghi della Classe, in nome di quella comune passione di ricerca scientifica, che anima e ispira costantemente tutta la vita dello studioso.

Le parole del Socio Benedicenti sono salutate da un vibrante applauso della Classe e il Presidente rivolge all'illustre Collega un vivo ringraziamento e il più affettuoso augurio che egli possa continuare ancora per molti anni la sua feconda attività di studio e di ricerca.

Il Socio Cotronei presenta una Memoria del dott. R. Stefani dal titolo: « Il problema della partegenesi in *Haploembia Solieri* Ramb ». Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Cotronei e dal Collega Beccari.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CHIUINI F. e MILLETTI L. - Ancora sull'azione della penicillina sull'accrecimento e sulla differenziazione delle larve di « *Bufo vulgaris* » (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

FOIAS C. - Elementi completamente continui e quasi completamente continui di un'algebra di Banach (pres. dal Socio M. PICONE).

GAUTSCHI W. - Una estensione agli integrali doppi di una condizione di Picone, necessaria per un estremo (pres. dal Socio G. SANSONE).

PECORINI G. - La facies bauxitica nel Cretaceo della Nurra (Sardegna) (pres. dal Corrisp. S. VARDABASSO).

ROSSI-FANELLI A., ANTONINI E. e TRASARTI F. - Ricerche sulla mioglobina degli invertebrati inferiori, composizione in aminoacidi della mioglobina e l'emoglobina di « *thunnus thynnus* » (pres. dal Corrisp. A. ROSSI-FANELLI).

VOLPATO M. - Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabile rispetto ad un'altra variabile (pres. dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Sansone, anche a nome del Collega Picone, legge la relazione della Commissione per l'esame della Memoria del prof. G. Fichera dal titolo: «Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine». Tale relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Sansone presenta il volume III delle Opere di Ulisse Dini, edito dall'Unione Matematica Italiana con le seguenti parole:

«Questo volume, curato da Giovanni Sansone per le memorie sulle equazioni differenziali ordinarie e da Mauro Picone, pure discepolo del Dini, per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, non ha soltanto valore di ricostruzione storica ma contiene, specie per quanto concerne le equazioni differenziali ordinarie, delle acquisizioni che sono ancor oggi a fondamento degli studi generali per il comportamento asintotico degli integrali di tali equazioni.

«Il lettore ritroverà la così detta serie del Dini, a cui Egli pervenne costruendosi in modo autonomo una teoria completa delle equazioni integrali a limiti variabili.

«Le memorie sulle equazioni alle derivate parziali sono collegate ad alcuni problemi di fisica matematica e di geometria differenziale. Il Dini, ponendo a fondamento delle Sue ricerche un'identità integrale che potrebbe esser chiamata «l'identità del Dini», dedusse notevoli teoremi di unicità per le

equazioni di tipo ellittico parabolico, anche per valori al contorno relativi ad una combinazione lineare della funzione incognita e della sua derivata.

« La stampa è stata resa possibile dai cospicui aiuti del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

« Questo volume chiude la stampa delle Memorie di Ulisse Dini.

« Un grazie va ai professori Francesco Cecioni, Giuseppe Scorza-Dragoni e Mauro Picone per il valido e sapiente loro apporto alla stampa del secondo e del terzo volume; e un memore pensiero va a Michele Cipolla e ad Enea Bortolotti che dettarono le introduzioni del primo volume ».

Il Socio Carobbi presenta il volume XI, 1955, dei Rendiconti della Società Mineralogica Italiana, contenente gli Atti dell'XI Congresso della predetta Società, da lui presieduta, svoltosi a Palermo e a Messina dal 17 al 22 ottobre 1954. Nel volume figurano, fra l'altro, la relazione del Congresso e Assemblea generale della S.M.I., due conferenze, 18 note e 21 riassunti di comunicazioni, alcune delle quali di studiosi stranieri.

Il Socio Carobbi conclude mettendo in evidenza che è stato possibile pubblicare il volume grazie al generoso aiuto del Consiglio Nazionale delle Ricerche, al quale rinnova il suo più vivo ringraziamento.

Il Socio d'Erasmus presenta una Memoria sua e della dott.ssa Maria Moncharmont Zei, dal titolo « Il cranio giovanile di *Elephas antiquus italicus* di Pignataro Interamna nella Valle del Liri ». In tale Memoria, estratta dal volume III, serie 3^a, n. 6, degli Atti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, viene descritto il cranio di *Elephas antiquus italicus*, scoperto nel 1949 nel giacimento pleistocenico di Pignataro Interamna. Allo studio osteologico particolareggiato di tale avanzo, che permette utili considerazioni sull'età ed il sesso dell'individuo al quale esso apparteneva, nonché sulla sua attribuzione ad una specie e ad una razza (*Elephas antiquus italicus*) già nota per altri due crani, rispettivamente rinvenuti nello stesso giacimento quaternario di Pignataro Interamna (1926) ed in quello di Fonte Campanile presso Viterbo (1941), seguono i necessari confronti con questi due esemplari, oltre che con le due specie attualmente viventi nell'India e nell'Africa. Il fossile illustrato nel volume, che pur appartenendo ad un individuo non giunto ancora a completo sviluppo, si rivela come il cranio di *Elephas antiquus* meglio conservato fra quelli finora descritti, consente di concludere che la specie è strettamente collegata – anche per i dettagli dell'osteologia cranica, come si era già precedentemente affermato per i caratteri della dentizione – con l'elefante asiatico anziché con l'africano.

Il Socio Puntoni, dopo aver ricordato di aver già offerto all'Accademia i primi quattro volumi degli « Atti » del VI Congresso Internazionale di Microbiologia, svoltosi a Roma dal 6 al 12 settembre 1953, ne presenta il V, il VI, e il VII, nonché una « Appendice », nella quale sono raccolti i processi verbali delle assemblee generali e dei diversi comitati tenutisi durante il Congresso. I volumi V, VI e VII contengono le seguenti sezioni:

Volume V – Sezione XIII (Spirochete); Sezione XIV (Miceti); Sezione XV (Protozoi); Sezione XVI (Artropodi trasmettitori di Microrganismi).

Volume VI = Sezione XVII (Microbiologia applicata alla patologia umana, sperimentale e veterinaria); Sezione XVIII (Microbiologia applicata all'agricoltura).

Volume VII - Sezione XIX (Microbiologia Industriale e delle fermentazioni); Sezione XX (Microbiologia applicata all'igiene); Sezione XXI (Microbiologia del latte e degli alimenti); Sezione XXII (Microbiologia marina).

Il Socio Puntoni conclude mettendo in evidenza che i sette volumi degli Atti del Congresso costituiscono un aggiornamento completo al 1953 della microbiologia scientifica e di quella applicata in tutti i diversi campi.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno presentato le suddette pubblicazioni.

Il Segretario Accademico presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 gennaio 1956

BOSSOLASCO Mario. — *Sulla prospezione dei giacimenti di minerali radioattivi in Italia*. Estr. da « L'Industria Mineraria », a. VI, 1955.

CENTRO DE COOPERACIÓN CIENTÍFICA PARA AMÉRICA LATINA. MONTEVIDEO. — *Segundo Catalogo General de Colecciones Micológicas Latino Americanas*. Montevideo, 1955. Pp. 111, in-8°.

COMUNITÀ EUROPEA DEL CARBONE E DELL'ACCIAIO. — *Origine - scopi - risultati - presenza italiana*. Atti del Convegno di studio per insegnanti. Roma 4-6 marzo 1955. Roma, 1955. Pp. 102, in-8°.

CONGRESSO (VI) INTERNAZIONALE DI MICROBIOLOGIA. ROMA, 6-12 SETTEMBRE 1953. — *Atti*. Vol. VI, sezioni XVII-XVIII, n. 1-99; vol. VII, sezioni XIX-XXII, n. 1-115; appendice. Roma, Staderini, 1955. Voll. 3, in-8°, con figg.

DALMA Juan. — *La medicina y su enseñanza en los siglos. Problemas históricos y actuales*. Tucumán, s. d. Pp. 72, in-8° (Quaderno de Extensión Universitaria, 2).

DAVIS E. N. — *Les péridotites de l'Eubée Méridionale*. Estr. da « Annales Géologiques des Pays Helléniques », vol. III, 1950.

D'ERASMO Geremia e MONCHARMONT ZEI Maria. — *Il cranio giovanile di «Elephas antiquus italicus» di Pignataro Interamna,*

nella Valle del Liri. Estr. da « Atti della Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli », s. 3^a, vol. VI, n. 6.

DINI Ulisse. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. III: *Equazioni differenziali ordinate e alle derivate parziali*. Roma, Edizioni Cremonese, 1955. Pp. 661, in-8°.

In memoria di Giuseppe Peano. Cuneo, Liceo Scientifico Statale, 1955. Pp. 117, in-8°.

IVICKIJ A. I. — *Principy proektirovanija zakrytogo drenaža v Belorusskoj SSR*. Minsk, Akademiya Nauk Belorusskoj SSR, Institut Melioracii, Vodnogo i Bolotnogo Hozjajstva, 1954. Pp. 100, in-8°, con figg.

IZQUIERDO José Joaquín. — *Montaña y los orígenes del movimiento social y científico de México*. México, Ediciones Ciencia, 1955. Pp. xvi-443, in-8°.

Klucze do oznaczania owadów Polski. Fasc. II, III-V, XIX 1-2. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1955. Fasc. 4, in-8°, con figg.

KUPREVIČ V. F. — *Bolezni klevera i ljucerny*. Moskva-Leningrad, Akademiya Nauk SSSR, Botaničeskij Institut imeni V. L. Komarova, 1954. Pp. 180, in-8°, con figg.

- LUYTEN Willem J. — *A Catalogue of 1849 Stars with proper motions exceeding 0".5 annually*. Minneapolis, Lund Press, 1955. Pp. 42, in-8°.
- MADALSKI Józef. — *Atlas Flory Polskiej i Ziemi Ościernych*. T. IX, z. 1. Warszawa-Wrocław, Polska Akademia Nauk, 1955. Pp. 13, in-4°, con tavv.
- MITZOPOULOS Max K. — *Die Verbreitung der Pikermistufe auf der Insel Euböa*. Estr. da «Annales Géologiques des Pays Helléniques», vol. I, 1947.
- MOISEEV I. G. — *Puti povyšeniya plodorodija derno-podzolistyh poev BSSR*. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, Institut Socialističeskogo Sel'skogo Hozjajstva, 1954. Pp. 243, in-8°.
- MONCHARMONT ZEI Maria. — Vedi: D'ERASMO Geremia e MONCHARMONT ZEI Maria.
- PAPP A. — *Erläuterungen zur Geologie der Insel Lemnos*. Estr. da «Annales Géologiques des Pays Helléniques», vol. V, 1953.
- PARASKEVAIDIS Il. — *Zwei Schildkrötenkernsteine aus dem obermiozän von Chios*. Estr. da «Annales Géologiques des Pays Helléniques», vol. VI, 1955.
- POLSKA AKADEMIA NAUK. — *Biochemia a baza wyżywienia*. Materiały sesji problemowej wydziału II Pan (12-13 lutego 1954). Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1955. Pp. 226, in-8° (Zeszyty Problemowe Nauki Polskiej, II).
- *Materiały z Konferencji techniki ultradźwiękowej, 26-28, XI, 1953*. Warszawa, 1955. Pp. 264, in 8°.
- PSARIANOS P. S. — «*Vivipara mitzopoulozi*», eine neue Art aus den neogenen Bildungen von Achaia (Nordpeloponnes). Estr. da «Annales Géologiques des Pays Helléniques», vol. V, 1953.
- Rendiconti della Società Mineralogica Italiana*. A. XI, 1955.
- ŠČERBOV N. A. — *Sistema grupovogo soderžanija svinej*. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, 1954, Pp. 306, in-8°, con figg.
- Scritti in onore di Raffaello Silvestrini*. Perugia, «Grafica», 1938. Pp. XXIV-834, in-8°, con figg. (Università di Perugia. «Annali della Facoltà Medico-Chirurgica», vol. XXXVII).
- De Technische Hogeschool te Delft, 1905-1955*. Delft, 1955. Pp. VIII-310-XXXVII, in-8°, con tavv.
- VILLA Luigi. — *La insufficienza epatica*. Relazione al LVI Congresso della Soc. Ital. di Medicina Interna. Roma, ottobre 1955. Roma, Pozzi, 1955. Pp. 487, con tavv.
- VILLAR G. E. — *Elementos de Atomística*. 4ª ed. Montevideo, Impresora Uruguaya, 1953. Pp. XI-289, in-8°, con figg.
- WÖLF Helmut. — *Fehlerformeln für Grundlinien und trigonometrisch abgeleitete Dreiecksseiten*. Estr. da «Veröffentlichungen des Instituts für Erdmessung», 4.
- *Die Lotabweichungsausgleichung für das Zentraleuropäische Netz*. Estr. da «Veröffentlichungen des Instituts für Erdmessung», 6.
- *Über die Ausgleichung von Dreiecksnetzen*. Estr. da «Veröffentlichungen des Instituts für Erdmessung», 1.
- Za povyšenie produktivnosti lesov BSSR*. Materialy Naučno-Proizvodstvennoj Konferencii 21-23 dekabrya 1950. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, Institut Lesa, 1951, Pp. 119, in-8° con figg.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 febbraio 1956

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Alcune osservazioni sulle superficie cubiche nel campo razionale.* Nota ^(*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

1. In un recente interessante lavoro, Th. Skolem [7, § 4] ⁽¹⁾ ha fra l'altro osservato come la superficie cubica

$$(1) \quad x^3 + 2y^3 + 3z^3 + 6u^3 = 0$$

venga mutata nella

$$(2) \quad t_0^3 + 2t_1^3 + 4t_2^3 - 6t_0t_1t_2 + 3t_3^3 = 0$$

quando si operi la trasformazione data dalle

$$(3) \quad x:y:z:u = -t_0t_1 + 2t_2^2 : -t_1^2 + t_0t_2 : -t_1t_3 : t_2t_3,$$

la quale si inverte razionalmente con le equazioni

$$(4) \quad t_0:t_1:t_2:t_3 = xz^2 + 2yu^2 : yz^2 - xzu : xu^2 - yzu : z^3 + 2u^3.$$

Mentre la (1) è manifestamente priva di punti multipli, la (2) risulta possedere tre punti doppi (irrazionali); potendosi di conseguenza determinare con facilità tutti i punti razionali di quest'ultima superficie, se ne trae senz'altro una soluzione parametrica completa della (1) nel campo razionale.

(*) Presentata all'Accademia l'11 febbraio 1956.

(1) I numeri in corsivo entro parentesi quadre rinviano alla Bibliografia posta alla fine della presente Nota. Una trattazione sistematica di vari problemi relativi alle superficie cubiche nel campo razionale trovasi nella mia Memoria [4], che però lo Skolem sembra non conoscere; su ciò ved. altresì B. SEGRE [5, II, 4]. Per alcune proprietà delle superficie cubiche in un corpo qualunque, cfr. B. SEGRE [3], od anche [5, II, 3].

Lo Skolem ha posto il problema di vedere se (o quando) il procedimento indicato per la (1) possa venir esteso alle superficie cubiche generali. A tale questione dò qui risposta esauriente, sorvolando però sui semplici particolari dimostrativi. Come applicazione, mostro poi quali stretti legami intercedano fra i risultati di Selmer [6] e quelli dello stesso Skolem [7, § 3] relativi ad una nota congettura di L. J. Mordell [2, p. 6].

2. Sia F una superficie cubica razionale di S_3 (rappresentata cioè da una equazione cubica a coefficienti razionali in tre variabili non omogenee), la quale possenga una terna razionale di punti doppi, costituita da tre punti irrazionali A, B, C non allineati, fra loro coniugati in un corpo cubico γ . Presa in S_3 una generica retta razionale, d , le quadriche di S_3 passanti per A, B, C, d costituiscono un sistema omaloidico razionale, il quale definisce una trasformazione quadratica T , di seconda specie, dell' S_3 in un altro spazio S'_3 (cfr. ad esempio Enriques-Chisini [1], pp. 560-562). La T muta F in una superficie cubica razionale G di S'_3 , la quale risulta generalmente priva di singolarità, ma che - come ora vedremo - non è una superficie cubica razionale generale di S'_3 .

I piani fondamentali dA, dB, dC sono trasformati da T in rette a, b, c , le quali giacciono su G , e sono a due a due sghembe e fra loro coniugate in γ . Al piano fondamentale ABC corrisponde mediante T una retta r di S'_3 , che è manifestamente razionale ed appoggiata a ciascuna delle a, b, c . I piani ra, rb, rc segano G - fuori delle a, b, c - secondo coniche, le quali vengono a corrispondere su G ai punti doppi A, B, C di F . La T trasforma i piani di S_3 nelle superficie cubiche (rigate) di S'_3 che passano doppiamente per r e semplicemente per ciascuna delle a, b, c ; viceversa, il sistema omaloidico costituito da tali superficie risulta razionale e definisce la T^{-1} , trasformante G in F . Si ha così che:

Affinchè una superficie cubica razionale G , priva di punti multipli, possa venir trasformata nel modo dianzi indicato in una superficie cubica razionale dotata di una terna razionale di punti doppi non allineati, occorre e basta che: I) G contenga una terna razionale di rette a, b, c , a due a due sghembe; II) le a, b, c ammettano (almeno) una comune retta trasversale razionale (il che val quanto dire che ciascuna delle schiere rigate della quadrica determinata dalle a, b, c deve possedere infinite generatrici razionali).

Le proprietà precedenti sono d'immediata verifica sul particolare esempio considerato nel n. 1, dove le (1), (2), (3), (4) vengono ordinatamente ad identificarsi con le G, F, T, T^{-1} .

3. Per la superficie cubica

$$(5) \quad a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 = 0$$

(a_1, a_2, a_3, a_4 denotando numeri razionali non nulli), la condizione I) del n. 2 equivale a ciò che il prodotto di due opportune delle a_i diviso per il

prodotto delle rimanenti due dev'essere il cubo di un numero razionale: cfr. B. Segre [4, n. 33]. Questa condizione è anche necessaria affinché la (5) sia rappresentabile birazionalmente su di un piano nel campo razionale, talchè si possa conseguentemente determinare una soluzione parametrica completa della (5) nel campo stesso: cfr. B. Segre [4, n. 35]; essa d'altro canto implica automaticamente che la (5) soddisfi alla II) del n. 2: cfr. B. Segre [4, n. 33]. Pertanto:

Ogni superiore cubica (5) per i cui coefficienti valga la condizione specificata (in corsivo) nel precedente capoverso, può venir cremonianamente trasformata nel campo razionale in una superficie cubica dotata di tre punti doppi non allineati.

Le superficie cubiche (5) del suddetto tipo speciale sono state recentemente considerate da E. S. Selmer [6], il quale ha stabilito per esse la validità della congettura del Mordell a cui si è alluso nel n. 1, secondo cui l'equazione $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ — dove f denoti una forma cubica quaternaria a coefficienti razionali — ammette necessariamente soluzioni razionali se la congruenza $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0$ è risolubile per ogni valore del modulo. In base a ciò che precede, il suddetto risultato equivale ad un caso particolare di quello testè ottenuto dallo Skolem [7, § 3], a cui precisamente si deve la dimostrazione della congettura del Mordell per le superficie cubiche dotate di punti doppi.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. ENRIQUES e O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. II (Bologna Zanichelli, 1918).
- [2] L. J. MORDELL, *Rational points on cubic surfaces*, « Publ. Math. Debrecen », I (1939), 1-6.
- [3] B. SEGRE, *Le rette delle superficie cubiche nei corpi commutativi*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) 4 (1949) 223-228.
- [4] B. SEGRE, *On the rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables*, « Math. Notae », II (1951), 1-68.
- [5] B. SEGRE, *Arithmetical questions on algebraic varieties* (London, The Athlone Press, 1951).
- [6] E. S. SELMER, *Sufficient congruence conditions for the existence of rational points on certain cubic surfaces*, « Math. Scand. », I (1953), 113-119.
- [7] TH. SKOLEM, *Einige Bemerkungen über die Auffindung der rationalen Punkte auf gewissen algebraischen Gebilden*, « Math. Zeitschr. », 63 (1955), 295-312.

Chimica-fisica. — *Simmetria e assorbimento ultrarosso del ferrocianuro di potassio anidro e idratato* ^(*). Nota di G. B. BONINO e ORIANO SALVETTI, presentata ^(**) dal Socio G. B. BONINO.

In un precedente lavoro in collaborazione con il dott. G. Fabbri ⁽¹⁾ si è esaminato sperimentalmente lo spettro ultrarosso allo stato cristallino (utilizzando il metodo delle polveri impastate in eccipiente opportuno) del ferrocianuro di potassio idrato $K_4[Fe(CN)_6] \cdot 3H_2O$ e dello stesso ferrocianuro allo stato anidro.

A parte le considerazioni che si possono fare sulle manifestazioni nell'ultrarosso delle tre molecole d'acqua di cristallizzazione del ferrocianuro di potassio, argomento sul quale ci si intratterrà in un prossimo lavoro, si sono registrate nello spettro del ferrocianuro di K idrato (trascurando le bande riferibili all'acqua) due bande molto intense nella zona di 2050 cm^{-1} ed una banda di media intensità a 588 cm^{-1} .

Ulteriori e posteriori ricerche di Bonino e Fabbri in corso di pubblicazione e nelle quali i detti Autori, integrando l'apparecchiatura per ultrarosso già utilizzata ⁽¹⁾, sono riusciti ad ottenere una più alta sensibilità ed un più spinta risoluzione delle bande, hanno rivelato, accanto alle due intense bande nella zona a 2050 cm^{-1} del ferrocianuro di potassio idrato, alcune altre bande assai più deboli e più difficilmente rilevabili con gli ordinari mezzi di spettrometria ultrarossa dato anche l'allargamento col quale si presentano le due suddette bande intense attorno a 2050 cm^{-1} .

Si osservavano poi due gruppi di debolissime bande: uno tra 2680 e 2440 cm^{-1} e l'altro tra 1156 e 835 cm^{-1} . Si è fatta l'ipotesi che questi due gruppi di bande potessero essere interpretati come dovuti a frequenze di combinazione mentre le altre bande sopra ricordate erano sicuramente riferibili ad oscillazioni fondamentali dell'anione ferrocianidrico.

Nello spettro del ferrocianuro anidro mancavano, come è ovvio, le bande dovute alle oscillazioni di valenza e di deformazione delle molecole d'acqua mentre si riproducevano, si può dire esattamente, le tre frequenze interpretate come legate ad oscillazioni fondamentali del gruppo ferrocianidrico nel caso del ferrocianuro idrato e si presentavano pure i due gruppi di bande debolissime considerate nel caso precedente come toni di combinazione. Però lo spettro del ferrocianuro anidro mostra qualche particolarità che lo distingue dallo spettro dello stesso sale idrato. E cioè nella zona di 2000 cm^{-1} , che corrisponde ad oscillazioni che impegnano nella loro ampiezza particolarmente i legami $C \equiv N$, oltre alle due fortissime bande mostrate dallo spettro

(*) Lavoro eseguito nel Centro studi di Chimica-Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico «Giacomo Ciamician» della Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Questi «Rendiconti», vol. XIX, fasc. 6, pp. 386-392 (1955).

del ferrocianuro idrato si osservano in modo deciso e nettissimo due gruppi di tre bande che, rispetto alle precedenti, stanno uno verso le minori e l'altro verso le maggiori lunghezze d'onda. In questa zona si osservavano nel sale anidro ben 8 bande nettissime di intensità diversa tra 1984 e 2093 cm^{-1} . Queste bande che nello spettro del sale idrato erano rilevabili come deboli bande e soltanto con mezzi di più alta sensibilità e di maggior potere risolutore, apparivano invece nello spettro del ferrocianuro anidro come assai più intense e nettissimamente rilevabili già nelle precedenti condizioni sperimentali descritte nella Nota già citata⁽¹⁾. Nella parte dello spettro a maggior lunghezza d'onda e cioè al di sotto dei 600 cm^{-1} , oltre all'unica banda a 587 cm^{-1} osservata nel ferrocianuro idrato si rendevano evidenti nello spettro del sale anidro un doppietto (di intensità minore della precedente banda) a 512–584 cm^{-1} ed una banda più intensa che appariva a 416 cm^{-1} . Ricerche posteriori con mezzi più potenti rivelano però la presenza di questa banda seppure con intensità assai più piccola nello spettro del sale idrato.

L'interpretazione degli spettri di assorbimento U. R., del ferrocianuro di K idrato e del ferrocianuro anidro richiede una accurata discussione che potrà essere completata soltanto dopo che avremo resi noti gli spettri ultrarossi di altri complessi inorganici, esaminati sia nella forma anidra che nella forma idrata (si tratta sempre di acqua così detta « di cristallizzazione »).

Per ora desideriamo dare un breve cenno sui criteri teorici che seguiamo per iniziare ed impostare una tale ricerca.

Dobbiamo partire da una ipotesi, che siamo disposti a considerare anche come ipotesi limite, e che cioè all'ione ferrocianidrico isolato si debba attribuire una simmetria ottaedrica conformemente alle vedute formali della teoria Werneriana nella chimica dei complessi inorganici.

Può allora indagarsi entro questa ipotesi in quali classi debbano catalogarsi le 33 frequenze proprie di oscillazione che competono all'aggregato di 13 atomi costituenti lo ione ferrocianidrico. E si potrà così stabilire quali e quante di queste frequenze d'oscillazione possono essere attive dello spettro ultrarosso, ovvero in spettro Raman, e quali e quante debbono ritenersi, sempre nell'ipotesi ottaedrica, inattive in uno o ambedue gli spettri. E questo sempre riferendoci allo ione ferrocianidrico considerato come isolato e cioè non perturbato da campi di forze extra od intermolecolari quali invece si verificano sotto l'azione del campo dovuto alla simmetria del cristallo.

Nella tabella seguente (Tabella I) sono dati appunto gli elementi di simmetria e le rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria Oh che corrisponde nell'ottaedro regolare Werneriano a cui riferiamo l'anione ferrocianidrico.

Nella tabella I sono dati i « caratteri » delle rappresentazioni irriducibili del gruppo e nella penultima colonna sono riportati i numeri di oscillazioni conformi alle varie rappresentazioni stesse mentre nell'ultima colonna sono

dati i caratteri di attività spettroscopica, indicando con « U.R. » le oscillazioni attive in assorbimento ultrarosso, con « Ra » quelle attive in Raman e con « Inatt. » le oscillazioni inattive in ambo gli spettri.

Il calcolo, che porta ai risultati delle due ultime colonne, è fatto con i metodi ormai noti della teoria dei gruppi, metodi che uno di noi (Bonino) aveva già esposti e riassunti nel 1936 in una Nota apparsa in questi « Rendiconti » ⁽²⁾.

TABELLA I.

Gruppo di simmetria Oh - Oscillazioni del complesso $[\text{Fe}(\text{CN})_6]^{4-}$.

Rappresentazioni irriducibili	E	$8C_3$	$3C_2$	$6C_2'$	$6C_4$	i	$8iC_3$	$3iC_2$	$6iC_2$	$6iC_4$	Numero di oscillaz.	Attività
A_{1g}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	Ra
A_{1u}	1	1	1	1	1	— 1	— 1	— 1	— 1	— 1	0	Ina
A_{2g}	1	1	1	— 1	— 1	1	1	1	— 1	— 1	0	Ina
A_{2u}	1	1	1	— 1	— 1	— 1	— 1	— 1	1	1	0	Ina
E_g	2	— 1	2	0	0	2	— 1	2	0	0	2	Ra
E_u	2	— 1	2	0	0	— 2	1	— 2	0	0	0	Ina
T_{1g}	3	0	— 1	— 1	1	3	0	— 1	— 1	1	1	Ina
T_{1u}	3	0	— 1	— 1	1	— 3	0	1	1	— 1	4	U.R.
T_{2g}	3	0	— 1	1	— 1	3	0	— 1	1	— 1	2	Ra
T_{2u}	3	0	— 1	1	— 1	— 3	0	1	— 1	1	2	Ina

Dalla Tabella si vede chiaramente che le uniche frequenze dell'anione ferrocianidrico (supposto ottaedrico) che si rendono attive in assorbimento ultrarosso sono quattro oscillazioni triplamente degeneri di tipo T_{1u} . Queste oscillazioni non sono attive in effetto Raman. Viceversa in effetto Raman si dovrebbero manifestare due oscillazioni di tipo A_{1g} e due oscillazioni doppiamente degeneri di tipo E_g e due oscillazioni triplamente degeneri di tipo T_{2g} .

Nella zona verso i 2000 cm^{-1} (zona del $\text{C}\equiv\text{N}$) dello spettro Raman di soluzioni acquose di ferrocianuro di potassio, Mathieu e Cornevin ⁽³⁾ in un accurato lavoro avevano trovato due righe una a 2048 cm^{-1} (polarizzata) ed una a 2080 cm^{-1} (depolarizzata). La prima dovrebbe dunque classificarsi come una oscillazione di tipo A_{1g} e la seconda probabilmente come una

(2) Questi « Rendiconti », vol. XXIV, 288 (1936).

(3) « Journ. de Chimie Physique », vol. 36, 275 (1939).

oscillazione di tipo E_g . (Si discuterà in un prossimo lavoro la attribuzione di questa oscillazione al tipo T_{2g}).

Delle quattro oscillazioni triplamente degeneri di tipo T_{1u} attive in ultrarosso se ne possono descrivere due le cui ampiezze interessano in modo prevalente il legame $C \equiv N$ e che trovano immediata corrispondenza nelle due più forti bande di assorbimento a 2052 e 2044 cm^{-1} trovate da Bonino e Fabbri⁽¹⁾ nello spettro ultrarosso del ferrocianuro cristallino.

Una terza frequenza di tipo T_{1u} dovrebbe impegnare in modo particolare nella sua ampiezza di oscillazione i legami $Fe-C$ ed è identificabile con la banda 588 cm^{-1} del ferrocianuro idrato. In un prossimo e più dettagliato lavoro daremo gli schemi completi di queste oscillazioni triplamente degeneri dedotti dalle caratteristiche di simmetria. Mancherebbe nel computo una quarta oscillazione attiva di tipo T_{1u} che probabilmente è una oscillazione di frequenza molto bassa e che cade al di fuori delle nostre possibilità sperimentali.

Si deve notare che queste oscillazioni triplamente degeneri attive nello spettro ultrarosso potrebbero scindersi nello spettro del $K_4[Fe(CN)_6]$ cristallino sotto la influenza della simmetria cristallina. Si potrebbe però osservare che da una dimostrazione di Jahn e Teller⁽⁴⁾ opportunamente applicata al caso delle oscillazioni molecolari nei cristalli da D. F. Hornig⁽⁵⁾ si può dedurre (se pur sempre con criterio di non sicura approssimazione) che le oscillazioni intramolecolari degeneri del gruppo ottaedrico di simmetria O_h non vengono scisse (come invece avviene per altri tipi di simmetria) dalle oscillazioni « reticolari » del cristallo.

Nel caso del ferrocianuro anidro nella zona 2000–2100 cm^{-1} dove appaiono per il sale idrato le due bande attribuite a due oscillazioni triplamente degeneri attive, appaiono in modo nettissimo oltre alle due bande ora citate altre sei bande di varia intensità poste, tre verso le minori lunghezze d'onda e tre verso le maggiori.

Queste bande ad un esame eseguito con mezzi risolutivi più spinti sono rilevabili anche nel ferrocianuro idrato. Ma il fenomeno è osservabile in tutta la sua pienezza, con chiara e sicura nettezza nella polvere di ferrocianuro anidro.

Ricordiamo che il campione di ferrocianuro anidro esaminato aveva perduta tutta l'acqua di cristallizzazione, prova ne sia la assoluta assenza delle tre bande caratteristiche dell'acqua nello spettro del campione stesso.

Se si interpretano i due gruppi di tre bande a sinistra e a destra del doppietto caratteristico del ferrocianuro idrato a 2000–2100 cm^{-1} come il risultato della completa scissione delle due frequenze triplamente degeneri, si dovrebbe pensare ad una risoluzione della simmetria O_h in una simmetria minore D_{4h} . Dalle tabelle di Mulliken⁽⁶⁾ si dedurrebbe che l'oscillazione

(4) « Proc. Roy. Soc. », A, 161, 220 (1937).

(5) « Journ. of. Chem. Phys. », vol. 16, 1063 (1948).

(6) « Phys. Rev. », 43, 294 (1933).

triplanamente degenerare di tipo T_1 dovrebbe sdoppiarsi in una oscillazione semplice di tipo A_2 ed in una oscillazione doppiamente degenerare di tipo E ambedue attive in ultrarosso. Una ulteriore risoluzione di questa simmetria in quella V_h porterebbe senz'altro anche allo sdoppiamento delle oscillazioni doppiamente degeneri e quindi risolverebbe finalmente, in tre componenti, ciascuna delle oscillazioni T_1 della originaria simmetria O_h indeformata.

TABELLA II.

Risoluzione di rappresentazioni irriducibili riferibili alla simmetria di molecole poliatomiche in altre rappresentazioni di gruppi a più bassa simmetria.

O_h	D_{4h}	D_{4h}	V_h
(g, u)	(g, u)	(g, u)	(g, u)
A_1	A_1	A_1	A_1
A_2	B_1	A_2	B_1
E	$A_1 + B_1$	B_1	A_1
T_1	$A_2 + E$	B_2	B_1
T_2	$B_2 + E$	E	$B_2 + B_3$

E potrebbe indagarsi se sussistono così ragioni per ammettere che possano divenire attive in ultrarosso oscillazioni per esempio originariamente del tipo E_g o T_{2g} inattive in ultrarosso e attive invece in Raman.

L'ipotesi che si deve eseguire è quella di ritrovare la ragione dei fatti esposti nell'azione del campo cristallino sugli ioni $Fe(CN)_6$.

Alla discussione di questo delicato punto può portare un contributo lo studio della frequenza attiva in ultrarosso a 587 cm^{-1} che sembra restare unica e non risolta sia nello spettro del ferrocianuro idrato che in quello anidro. Appaiono invece nello spettro del ferrocianuro anidro tre oscillazioni « basse » rispettivamente a 512 , 484 , 416 cm^{-1} e che potrebbero riferirsi per la 416 cm^{-1} ad una frequenza « bassa » di tipo A_{1g} attiva in Raman e per il doppietto $512\text{--}584\text{ cm}^{-1}$ ad una oscillazione doppiamente degenerare E_g attiva in Raman e resa attiva e scissa nel ferrocianuro anidro per risoluzione progressiva della simmetria primitiva del complesso ferrocianidrico nel senso sopra esposto.

Abbiamo in corso con la collaborazione del dott. Fabbri esperienze atte ad indagare se anche per una più prolungata e drastica disidratazione del ferrocianuro di potassio (pur sempre restando nei limiti che garantiscono la integrità del complesso e quindi la reversibilità dell'idratazione controllata

allo spettro ultrarosso) permangono, si attenuano o scompaiono del tutto le bande corrispondenti alle oscillazioni T_{1u} triplamente degeneri non risolte.

In una prossima Nota ci occuperemo anche delle regole di selezione delle frequenze di combinazione nel caso della simmetria ipotizzata e vedremo come l'esame dei gruppi di deboli bande che appaiono nello spettro ultrarosso del ferrocianuro di potassio nella zona di 2500 cm^{-1} e nella zona di 1000 cm^{-1} possa portare, attraverso a questa via, a considerazioni utili per una discussione generale del problema e per l'identificazione e la classificazione di oscillazioni fondamentali inattive o difficilmente rilevabili sperimentalmente attraverso allo studio degli spettri Raman e ultrarossi.

Poste queste basi dovremo affrontare una più approfondita discussione sull'effetto della simmetria del campo cristallino sulle oscillazioni del complesso ferrocianidrico, discussione della cui difficoltà e delicatezza possono darci una idea per esempio lavori di indole generale quali quello già citato di Hornig ⁽⁵⁾ e quelli precedenti assai noti di Bhagavantam e Collaboratori ⁽⁷⁾ o di Ralph S. Halford ⁽⁸⁾ ecc.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi funzionale. — *Elementi completamente continui e quasi completamente continui di un'algebra di Banach.* Nota di CIPRIAN FOIAS, presentata ^(*) dal Socio M. PICONE.

Dans cette Note on étudie une classe d'éléments d'une algèbre de Banach, qui correspondent aux transformations linéaires complètement continues de l'espace de Hilbert.

La construction de ces éléments a comme point de départ l'ensemble des éléments j d'une algèbre de Banach B , caractérisés par la propriété que pour tout $x, y \in B$, on a

$$(1) \quad (xjy)^2 = f_j(yx)xjy$$

où f_j est une forme linéaire sur l'algèbre ⁽¹⁾. Ces éléments sont analogues aux transformations $Jf = \langle f, \varphi \rangle \psi$ de l'espace de Hilbert, car si B est l'algèbre des transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert, les transformations de ce type sont les seules qui ont la propriété (1). Les éléments $j_1 + j_2 + \dots + j_n$ (j_a ayant la propriété donnée) correspondent aux transformations de rang fini; si K est l'ensemble de ces élé-

(7) « Proc. Ind. Acad. Sci. », 9 A 224, p. 1939; 13 A, 543 (1941).

(8) « Journ. of Chem. Phys. », 14, 8 (1946).

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1955.

(1) Il faut remarquer que jusqu'au théorème 3, nous employons seulement la propriété (1) avec $y = e$.

ments, alors les éléments de l'adhérence \bar{K} de K sont les correspondants des transformations complètement continues.

Dans la première partie de cette note, en suivant la voie classique de Schmidt, nous obtenons l'analogie du théorème sur la forme de la résolvente $Q(\lambda; x)$ ⁽²⁾ dans l'intérieur du cercle $|\lambda| = \Omega$, où Ω est le rayon de Fredholm (voir [1] p. 203) et aussi le fait que $Q(\lambda, x)$ est, pour $x \in \bar{K}$, une fonction méromorphe, les coefficients des parties principales correspondant à chaque pôle étant dans K . Dans la seconde partie ⁽³⁾ de la Note, nous donnons l'analogie d'un théorème de Yosida et Kakutani [2] sur la représentation de certaines transformations quasi complètement continues.

Il est nécessaire de préciser que ces propositions ne peuvent pas être obtenues en considérant la transformation T_a , de l'espace de Banach B , donnée par $x \rightarrow ax$ ou $x \rightarrow xa$. En effet, si $B = L(E)$, où $L(E)$ est l'ensemble des transformations linéaires bornées de l'espace de Hilbert E , de dimension infinie, alors on voit immédiatement qu'aucune transformation $A \in L(E)$ n'est complètement continue comme transformation de translation T_A dans $L(E)$; en plus, les seules transformations A pour lesquelles T_A est quasi complètement continue sont telles que $\|A^m\| < 1$ pour un certain m , donc une transformation $A \in L(E)$ peut être quasi complètement continue sans que T_A ait la même propriété.

Les démonstrations ont un caractère analytique et utilisent souvent le théorème de décomposition spectrale ([3] pp. 104-107), sous la forme

THÉORÈME 1. - Si dans $|\lambda| < \omega$, $Q(\lambda; a)$ a un nombre fini de points singuliers, alors si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont ces points, on a dans $|\lambda| < \omega$

$$Q(\lambda; a) = \sum_{\alpha=1}^n \left[-\frac{j_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha} - \frac{b_\alpha}{(\lambda - \lambda_\alpha)^2} - \dots - \frac{b_\alpha^p}{(\lambda - \lambda_\alpha)^{p+1}} - \dots \right] + c + \lambda c^2 + \dots$$

où b_α sont quasinilpotents, j_α idempotents et

$$j_\alpha j_\beta = 0, \alpha \neq \beta; j_\alpha c = c j_\alpha = 0, b_\alpha j_\alpha = j_\alpha b_\alpha = b_\alpha; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n.$$

$$j_\alpha a (b_\alpha + \lambda_\alpha j_\alpha) = (b_\alpha + \lambda_\alpha j_\alpha) j_\alpha a = j_\alpha a, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n.$$

En plus

$$-\frac{j_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha} - \frac{b_\alpha}{(\lambda - \lambda_\alpha)^2} - \dots - \frac{b_\alpha^p}{(\lambda - \lambda_\alpha)^{p+1}} - \dots = Q(\lambda; j_\alpha a), \lambda \neq \lambda_\alpha \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{et } \sigma(c) = \sigma(a) \cap C\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (4).$$

Soit I l'ensemble des éléments $j \in B$ ayant la propriété (I). Nous supposons bien entendu que $I \neq \{0\}$. On voit immédiatement que: (i) $BIB \subset I$; (ii) K et \bar{K} sont des idéals bilatéraux.

(2) On note $(e - \lambda x)^{-1} = e + \lambda Q(\lambda; x)$.

(3) Le théorème 4.

(4) $\sigma(a)$ est le spectre de a .

Etudions maintenant les résolvantes des éléments appartenant à I et à K ; si $j \in I$ on voit que

$$Q(\lambda; j) = \frac{j}{1 - \lambda \mu},$$

où $j^2 = \mu j$.

Cette remarque faite, passons à la démonstration de la proposition suivante:

THEOREME 2. — Si $x \in K$, alors $Q(\lambda; x)$ est rationnelle et les coefficients des parties principales correspondant à chaque pôle, appartiennent à K ; en plus $Q(\lambda; x)$ appartient à K pour tout $\lambda \in \rho(x)^{(5)}$.

Nous avons besoin du

LEMME 1. — Si

$$F(\lambda) = a_1 + \lambda a_2 + \dots + a_{n+1} \lambda^n$$

appartient à un ensemble linéaire L , pour λ appartenant à un cercle quelconque, alors $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in L$.

La démonstration du lemme étant immédiate, passons à la démonstration du théorème énoncé: Pour $x = j \in I$, le théorème est évidemment vrai; supposons qu'il est vrai pour tout $x = \sum_{\alpha=1}^k j_\alpha$, $j_\alpha \in I$ et soit $x = \sum_{\alpha=1}^{k+1} j_\alpha$; nous avons

$$\begin{aligned} (1) \quad e - \lambda x^{k+1} &= e - \lambda x^k - \lambda j_{k+1} = (e - \lambda x^k) \{e - \lambda [e + \lambda Q(\lambda; x^k)] j_{k+1}\} = \\ &= (e - \lambda x^k) [e - \lambda R(\lambda) j_{k+1}], \end{aligned}$$

où $R(\lambda)$ est rationnelle en λ ; comme $R(\lambda) j \in I$ on a:

$$(2) \quad [e - \lambda R(\lambda) j_{k+1}]^{-1} = e + \frac{\lambda R(\lambda) j_{k+1}}{1 - \lambda f_{j_{k+1}}[R(\lambda)]} = e + \lambda P(\lambda),$$

où évidemment $P(\lambda) \in I$ pour les valeurs λ , pour lesquelles $P(\lambda)$ est définie. La forme $f_{j_{k+1}}$ étant linéaire sur B , $f_{j_{k+1}}[R(\lambda)]$ sera une fonction numérique rationnelle, donc $P(\lambda)$ sera aussi une fonction rationnelle. D'après (1) et (2) nous obtenons

$$(e - \lambda x^{k+1})^{-1} = [e + \lambda P(\lambda)] [e + \lambda Q(\lambda; x^k)]$$

d'où

$$Q(\lambda; x^{k+1}) = P(\lambda) + P(\lambda) Q(\lambda; x^k) + Q(\lambda; x^k).$$

Comme $P(\lambda)$ et $Q(\lambda; x^k)$ sont rationnelles, $Q(\lambda; x^{k+1})$ sera aussi rationnelle et puisque $P(\lambda) \in I$ et $Q(\lambda; x^k) \in K$, on a que pour les valeurs λ

(5) $\rho(x)$ est l'ensemble résolvant de x .

ordinaires de $Q(\lambda; x)$, $Q(\lambda, x)$ appartient à K . Maintenant si λ_0 est un pôle de $Q(\lambda; x)$, en nous appuyant sur le théorème 1, nous obtenons

$$j_0 Q(\lambda; x) = - \frac{j_0}{\lambda - \lambda_0} - \frac{b_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} - \dots - \frac{b_0^{N_0-1}}{(\lambda - \lambda_0)^{N_0}}$$

et comme $j_0 Q(\lambda; x) \in K$, pour $\lambda = \lambda_0$, en vertu du lemme 1, nous avons que $j_0, b_0 \in K$.

Pour prolonger l'analogie déjà mentionnée nous avons besoin du

LEMME 2. - Si $x \in K$ et $R(\lambda)$ est holomorphe dans $|\lambda| < \omega$, alors $Q[\lambda; R(\lambda)x]$ est méromorphe dans $|\lambda| < \omega$ et holomorphe à l'origine.

Montrons d'abord que si $R(\lambda)$ est méromorphe dans $|\lambda| < \omega$, holomorphe pour $\lambda = 0$, alors pour un $j \in I$, j quelconque, $Q[\lambda; R(\lambda)j]$ est méromorphe dans $|\lambda| < \omega$ et holomorphe pour $\lambda = 0$; or $R(\lambda)j \in I$ entraîne

$$(3) \quad Q[\lambda; R(\lambda)j] = \frac{R(\lambda)j}{1 - \lambda f_j[R(\lambda)]}.$$

Mais comme f_j est continue (on a même $\|f_j\| \leq \|j\|$), $f_j[R(\lambda)]$ sera une fonction numérique méromorphe dans $|\lambda| < \omega$, holomorphe dans chaque point ordinaire pour $R(\lambda)$. D'après (3) il résulte que $Q[\lambda; R(\lambda)j]$ est une fonction méromorphe dans $|\lambda| < \omega$ et holomorphe pour $\lambda = 0$. Supposons maintenant le lemme vrai pour tout $x = \sum_{\alpha=1}^k j_\alpha$, $j_\alpha \in I$ et soit $x = \sum_{\alpha=1}^{k+1} j_\alpha$;

comme auparavant nous avons

$$(4) \quad Q[\lambda; R(\lambda)x] = Q[\lambda; R(\lambda)x] + Q[\lambda; [e + \lambda Q(\lambda; R(\lambda)x)]j_{k+1}] + \\ + Q[\lambda; [e + \lambda Q(\lambda; R(\lambda)x)]j_{k+1}] Q[\lambda; R(\lambda)x],$$

où $Q[\lambda; R(\lambda)x] =$ donc aussi $e + \lambda Q[\lambda; R(\lambda)x] =$ est méromorphe dans $|\lambda| < \omega$ et holomorphe pour $\lambda = 0$; d'après ce que nous avons démontré

$$Q[\lambda; [e + \lambda Q(\lambda; R(\lambda)x)]j_{k+1}]$$

est méromorphe dans $|\lambda| < \omega$ et holomorphe pour $\lambda = 0$; la formule (4) montre que $Q[\lambda; R(\lambda)x]$ a les mêmes propriétés.

Maintenant nous pouvons passer à la démonstration d'un théorème analogue au théorème de comportement de la résolvante dans le cercle de Fredholm:

THÉORÈME 3. - Si $\|z - x\| < 1/\omega$ et $x \in K$, alors $Q(\lambda; z)$ est méromorphe dans le cercle $|\lambda| < \omega$; les coefficients de la partie principale du développement de Laurent, autour de chaque pôle compris dans $|\lambda| < \omega$ appartiennent à K .

Démonstration. — Posons $h = z - x$, alors de $\|h\| < 1/\omega$ il résulte que $Q(\lambda; h)$ est holomorphe dans $|\lambda| < \omega$. Pour $|\lambda| < \omega$ nous avons

$$e - \lambda z = (e - \lambda h) [e - \lambda (e - \lambda h)^{-1} x];$$

en posant $(e - \lambda h)^{-1} = R(\lambda)$, nous nous trouvons dans les conditions du lemme 2, donc $Q[\lambda; R(\lambda)x]$ est méromorphe dans $|\lambda| < \omega$; comme résolvante d'un élément de K , $Q[\lambda; R(\lambda)x]$ appartient à K . Pour une valeur λ ordinaire de $Q[\lambda; R(\lambda)x]$, ($|\lambda| < \omega$), nous avons

$$(5) \quad Q(\lambda; z) = Q[\lambda; R(\lambda)x] + \lambda Q[\lambda; R(\lambda)x] Q(\lambda; h) + Q(\lambda; h).$$

Cette formule montre que $Q(\lambda; z)$ est méromorphe dans $|\lambda| < \omega$. Comme les parties principales des développements de Laurent, des fonctions $Q(\lambda; z)$ et $Q(\lambda)$ — où

$$Q(\lambda) = Q[\lambda; R(\lambda)x] + \lambda Q[\lambda; R(\lambda)x] Q(\lambda; h)$$

autour d'un pôle λ_0 ($|\lambda_0| < \omega$) sont les mêmes et comme en plus, $Q(\lambda)$ appartient à K (K étant un idéal bilatéral) pour chaque $|\lambda| < \omega$ ordinaire, il résulte, exactement comme dans la démonstration du théorème 2, que j_0 et b_0 appartiennent à K .

Ce théorème a quelques corollaires immédiats:

Corollaire 1. — Si $z \in \bar{K}$, alors $Q(\lambda; z)$ est méromorphe dans le plan entier.

Corollaire 2. — Si $\|z - x\| < 1$, $x \in \bar{K}$, alors $Q(\lambda; z)$ est méromorphe dans le cercle $|\lambda| \leq 1$ et les coefficients des parties principales correspondant aux pôles compris dans $|\lambda| \leq 1$ appartiennent à K .

Le corollaire 1 complète l'analogie entre les éléments de \bar{K} et les transformations complètement continues de l'espace de Hilbert; le corollaire 2 s'utilise dans la démonstration du

THÉORÈME 4. — S'il existe un $x \in \bar{K}$ tel que $\|a^m - x\| < 1$ pour un certain m et si pour tout n , $\|a^n\| \leq N$, alors $(e - \lambda a)^{-1}$ existe dans $|\lambda| \leq 1$, sauf peut-être en un nombre fini de points de la circonférence $|\lambda| = 1$; si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sont ces points, alors,

$$(6) \quad a^n = \sum_{\alpha=1}^k j_\alpha \lambda_\alpha^{-n} + c^n$$

où $j_\alpha^2 = j_\alpha$, $j_\alpha j_\beta = 0$, $\alpha \neq \beta$; $j_\alpha c = c j_\alpha = 0$ et $j_\alpha \in K$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$; en plus

$$\|c^n\| \leq \frac{M}{(1 + \varepsilon)^n}, \quad \varepsilon > 0, M < \infty,$$

ε et M étant fixes.

Démonstration. — Le corollaire 2 nous assure que $Q(\lambda; a^m)$ est méromorphe dans $|\lambda| < (1 - r)^{-1}$, où $\|a^m - x\| < 1 - r < 1$ et que les coefficients des parties principales des pôles compris dans ce cercle appartiennent à K . En considérant un cercle intérieur de rayon > 1 , nous pourrions nous situer dans les conditions du

LEMME 3. - Si $Q(\lambda; a^m)$ a un nombre fini de pôles dans $|\lambda| < \omega$ et si pour $|\lambda| = \omega$ elle est holomorphe, alors $Q(\lambda; a)$ a de même un nombre fini de pôles dans $|\lambda| < \omega^{1/m}$, étant holomorphe sur la circonférence.

Cette proposition qu'on peut démontrer directement est une conséquence d'un théorème général de Dunford (voir [4], théorème 2-30) ainsi nous ne donnons plus sa démonstration.

De lemme 3 nous obtenons que $Q(\lambda, a)$ n'a qu'un nombre fini de pôles dans un cercle $|\lambda| < 1 + \alpha$, $\alpha > 0$ et qu'elle est holomorphe sur $|\lambda| = 1 + \alpha$. L'inégalité $\|a^n\| \leq N$, vraie pour tous les n , implique la convergence de la série $a + \lambda a^2 + \dots$ dans $|\lambda| < 1$, c'est-à-dire que $Q(\lambda; a)$ existe pour $|\lambda| < 1$ et que pour ces valeurs de λ on a

$$\|Q(\lambda; a)\| \leq \frac{N}{1-|\lambda|}.$$

De cette inégalité découle immédiatement le fait que sur la circonférence $|\lambda| = 1$, $Q(\lambda; a)$ n'a que des pôles simples, donc

$$(7) \quad Q(\lambda; a) = \sum_{\alpha=1}^k -\frac{j_{\alpha}}{\lambda - \lambda_{\alpha}} + Q(\lambda; c),$$

où $|\lambda_{\alpha}| = 1$, $j_{\alpha}^2 = j_{\alpha}$, $j_{\alpha} c = c j_{\alpha} = 0$, $j_{\alpha} j_{\beta} = 0$, $\alpha \neq \beta$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, k$ et $\sigma(c)$ est en dehors du cercle $|\lambda| \leq 1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ convenablement choisi. La décomposition (6) résulte directement de la relation (7). Montrons que $j_{\alpha} \in K$: En effet nous avons $a^m = \sum j_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{-m} + c^m$, donc la partie principale du développement de Laurent autour de λ_{α} de $Q(\lambda, a^m)$ est

$$\frac{\lambda_{\alpha}^{-m} j_{\alpha}}{1 - \lambda \lambda_{\alpha}^{-m}} + \frac{\lambda_{\alpha_1}^{-m} j_{\alpha_1}}{1 - \lambda \lambda_{\alpha_1}^{-m}} + \dots + \frac{\lambda_{\alpha_{m-1}}^{-m} j_{\alpha_{m-1}}}{1 - \lambda \lambda_{\alpha_{m-1}}^{-m}} = -\frac{j_{\alpha} + j_{\alpha_1} + \dots + j_{\alpha_{m-1}}}{\lambda - \lambda_{\alpha}^m},$$

où $\lambda_{\alpha_i}^m = \lambda_{\alpha}^m$; comme $j_{\alpha} + j_{\alpha_1} + \dots + j_{\alpha_{m-1}} \in K$, il en est de même de $j_{\alpha} = j_{\alpha} (j_{\alpha} + j_{\alpha_1} + \dots + j_{\alpha_{m-1}})$. L'inégalité $\|c^n\| \leq M(1 + \varepsilon)^{-n}$ découle directement de l'égalité:

$$c^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1+\varepsilon} \frac{Q(\lambda; c)}{\lambda^{n+1}} d\lambda.$$

On voit sans peine que la décomposition donnée satisfaisant les conditions imposées par le théorème, est unique. Nous nous contentons de spécifier seulement qu'on démontre cette assertion en utilisant l'inégalité $\|c^n\| \leq M(1 + \varepsilon)^{-n}$ et le « spectral mapping theorem » de Dunford.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Fr. RIESZ et B. SZ. NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. (Budapest 1953).
- [2] K. YOSIDA et S. KAKUTANI, *Operator theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorem*, « Ann. of Math. », 42, 188-228 (1941).
- [3] E. HILLE, *Functional analysis and semigroups*. (New-York 1948).
- [4] N. DUNFORD, *Spectral theory. - I. Convergence to projections*, « Transactions Amer. Math. Soc. », 54, 185-217, (1943).

Matematica. — *Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.* Nota II di MARIO VOLPATO, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA-DRAGONI.

In questa Nota II (nella quale conservo i simboli e la numerazione della Nota I), completo (n. 7) la dimostrazione del teorema 1, iniziata nella Nota I; segnalo (n. 8) un'altra condizione sufficiente per la sommabilità del prodotto $f[\varphi(y), y] \varphi'(y)$; indico (n. 9) una possibile estensione dell'ipotesi IV) del teorema 1⁽¹⁰⁾; e infine oltre ai teoremi di De La Vallée Poussin sul cambiamento della variabile di integrazione e quello di Lebesgue sull'integrazione per parti (n. 10), deduco una estensione (n. 11) del secondo teorema della media⁽¹¹⁾ e un criterio (n. 12) sufficiente per l'assoluta continuità di una funzione composta del tipo $F[\varphi(y), y]$.

7. — Liberiamoci ora dall'ipotesi che $f(x, y)$ sia limitata in R. A tale scopo poniamo

$$f_n(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{nei punti di R ove } M(x) \leq n, \\ 0 & \text{nei punti di R ove } M(x) > n, \end{cases}$$

di guisa che

$$f'_{ny}(x, y) = \begin{cases} f'_y(x, y) & \text{nei punti di R ove } M(x) \leq n, \\ 0 & \text{nei punti di R ove } M(x) > n. \end{cases}$$

Per qualsivoglia n sussiste la

$$(18) \quad |f_n(x, y)| \leq |f(x, y)| \leq M(x),$$

e allora, per ogni fissato n , si ha $|f_n(x, y)| \leq n$. Inoltre $f_n(x, y)$ risulta assolutamente continua rispetto ad y su quasi tutte le verticali e misurabile rispetto ad x su tutte le orizzontali. La derivata: $f'_{ny}(x, y)$, che esiste quasi ovunque in R ed è ivi misurabile, è sommabile perché, quasi ovunque in R, sussiste la

$$(19) \quad |f'_{ny}(x, y)| \leq |f'_y(x, y)|.$$

Per ogni fissato n , vale allora la formula:

$$(20) \quad \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f_n(t, y) dt = \int_c^y f_n[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\eta)} f'_{ny}(t, \eta) dt.$$

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(10) I numeri 9, 11, 12 e queste righe introduttive sono state aggiunte nelle bozze di stampa.

(11) Questo risultato interferisce con un teorema di G. DARBO, *Una estensione del secondo teorema della media*, « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. III, vol. V pp. 151-160 (1951).

Ora, a norma della (18) è

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f_n(t, y) dt = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t, y) dt,$$

e inoltre, essendo

$$|f_n[\varphi(t), t] \varphi'(t)| \leq |f[\varphi(t), t] \varphi'(t)|,$$

ove il secondo membro è sommabile in grazia dell'ipotesi III), è pure

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^y f_n[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt = \int_c^y f[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt.$$

Proviamo che è anche

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^y d\eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\eta)} f'_{ny}(t, \eta) dt = \int_c^y d\eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\eta)} f'_y(t, \eta) dt.$$

Anzitutto dimostriamo che, per quasi tutti gli η di J , esiste il limite per $n \rightarrow \infty$ della funzione

$$(24) \quad g_n(\eta) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\eta)} f'_{ny}(t, \eta) dt,$$

ed è

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\eta) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\eta)} f'_y(t, \eta) dt.$$

Infatti fissato comunque η in una conveniente porzione di J , avente la stessa misura di J , la $f'_{ny}(t, \eta)$, a norma della (19), è maggiorata, in modulo da una funzione, della sola t , sommabile in I e indipendente da n . Inoltre, su quasi tutte le orizzontali, risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_{ny}(t, \eta) = f'_y(t, \eta)$ per quasi tutti i t .

È quanto basta per acquisire la (25).

Poi osserviamo che, valendo, quasi ovunque in J , la disuguaglianza

$$|g_n(\eta)| \leq \int_a^b |f'_y(t, \eta)| dt,$$

col secondo membro funzione, della sola η , sommabile in J , segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^y g_n(\eta) d\eta = \int_c^y \{ \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\eta) \} d\eta.$$

Questa assieme alle (24) e (25), porge la (23).

Infine, passando al limite per $n \rightarrow \infty$ nella (20), attese le (21), (22), (23), si ottiene ancora la formula (2) da dimostrarsi.

8. — Alla fine del n. 6 abbiamo osservato esplicitamente che la limitatezza in R della $f(x, y)$, assieme alle ipotesi I), II), IV) assicurano la (misurabilità e) sommabilità del prodotto: $f[\varphi(y), y] \varphi'(y)$ in J . Orbene, ora dimostriamo che anche la monotonia della $\varphi(y)$ in J , il verificarsi in R di una, almeno, delle due disuguaglianze:

$$(26) \quad |f'_y(x, y)| \leq P(x) \quad , \quad |f'_y(x, y)| \leq Q(y),$$

con $P(x)$, $Q(y)$ sommabili, rispettivamente in I , J , assieme alle ipotesi I), II) assicurano la (misurabilità e) sommabilità del prodotto: $f[\varphi(y), y] \varphi'(y)$ in J . Infatti, osserviamo intanto che ognuna delle (26) porge la sommabilità in R della $f'_y(x, y)$ di guisa che l'ipotesi IV) è ancora soddisfatta. Inoltre, fissati comunque p, q in J , la disuguaglianza

$$|\Phi(p) - \Phi(q)| \leq \left| \int_p^q dy \int_a^b |f'_y(t, y)| dt \right| + \left| \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} M(t) dt \right|$$

e l'assoluta continuità delle funzioni: $\int_c^y dy \int_a^b |f'_y(t, y)| dt$, $\int_a^{\varphi(y)} M(t) dt$ ⁽¹²⁾, pongono, anche in queste nuove ipotesi, l'assoluta continuità della funzione $\Phi(y)$ in J . Sussiste quindi la (6). La (7) sussiste ancora perché per acquisirla non si è mai sfruttata la limitatezza della $f(x, y)$. Non così la (11); di questa relazione sussiste solo l'ultima uguaglianza. Però l'aver assunto una delle (26) ci permette di stabilire ancora la (13), cioè la

$$(27) \quad \Phi'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y)} f'_y(t, y) dt = f[\varphi(y); y] \varphi'(y),$$

in quasi tutto e'_y . Infatti, manteniamo nella (11) solo l'ultima uguaglianza, e detta ancora y_0 un punto di $e'_y - e'_y \cap E_y$, osserviamo che valgono le relazioni:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} \{f(t, y_0+h) - f(t, y_0)\} dt \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} dt \int_{y_0}^{y_0+h} f'_y(t, y) dy \right| \leq$$

$$\leq \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} P(t) dt \right| = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} \{f(t, y_0+h) - f(t, y_0)\} dt \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} \int_{y_0}^{y_0+h} dy \int_{\varphi(y_0)}^{\varphi(y_0+h)} f'_y(t, y) dt \right| \leq$$

$$\leq \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0)}{h} \right| \left| \int_{y_0}^{y_0+h} P(y) dy \right| = 0.$$

(12) Cfr. L. TONELLI, loco cit. in (9), p. 65.

Allora, di qui, dal rapporto incrementale (14) e dal fatto che sussiste la (7) e l'ultima delle uguaglianze scritte in (11), segue appunto che in $e'_y - e'_y \cap E_y$, cioè in quasi tutto e'_y , sussiste la (27). Quindi, in e'_y , il prodotto: $f[\varphi(y), y] \varphi'(y)$ è misurabile. Nei punti di e_y non appartenenti ad e'_y , e quindi in quasi tutto il complementare di e'_y rispetto a J , non possiamo dire che valga la (27), però, avendosi ivi $\varphi'(y) = 0$, è $f[\varphi(y), y] \varphi'(y) = 0$ e quindi il nostro prodotto è misurabile in J . Non solo, ma le considerazioni ora fatte porgono anche la disuguaglianza

$$(28) \quad |f[\varphi(y), y] \varphi'(y)| \leq \left| \Phi'(y) - \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f_y'(t, y) dt \right|,$$

in quasi tutto e_y , cioè quasi ovunque in J . Quindi il nostro prodotto è sommabile in J .

9. - Osserviamo ora che, a norma dell'ipotesi II), la derivata $f'_y(x, y)$ oltre ad esistere quasi ovunque in R ed essere ivi misurabile, è sommabile, rispetto ad y , su quasi tutte le verticali e inoltre l'integrale

$$(29) \quad \int_H f'_y(x, \eta) d\eta,$$

con H sottointervallo qualsiasi di J , è una funzione (della x) sommabile in I .

Ebbene, le nostre deduzioni istesse mostrano allora che la sommabilità superficiale di $f'_y(x, y)$, assunta in IV), è servita unicamente ad assicurare che

IV bis) *la funzione $f'_y(x, y)$ è sommabile, rispetto ad x , in I per quasi tutti i valori di y in J , l'integrale*

$$(30) \quad \int_G f'_y(t, y) dt,$$

con G sottointervallo qualsiasi di I , è una funzione (della y) sommabile in J , e sussiste la

$$(31) \quad \int_H d\eta \int_G f'_y(t, \eta) dt = \int_G dt \int_H f'_y(t, \eta) d\eta,$$

con H sottointervallo qualsiasi di J .

Poiché la (31) non garantisce la sommabilità superficiale di $f'_y(x, y)$ nemmeno se G ed H fossero due porzioni misurabili qualsiasi di I e J , rispettivamente ⁽¹³⁾, segue che, postulando la IV bis), anziché la IV), si ottiene una generalizzazione del teorema I.

(13) Cfr. G. FICHTENHOLZ, *Sur une fonction de deux variables sans intégrale double*, « Fundam. Math. », vol. 6, pp. 30-36 (1924) e F. CAFIERO, *Sull'inversione dell'ordine d'integrazione*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », vol. XXI, pp. 58-63 (1952).

10. — Possiamo ora a dedurre alcune conseguenze del teorema 1. Se $f(x, y)$ non dipende dalla y , ed è quindi $f(x, y) = f(x)$ ed $f'_y(x, y) = 0$, il teorema 1 afferma che sussiste la

$$(32) \quad \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t) dt = \int_c^y f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

nell'ipotesi che $f(x)$ sia sommabile in I ($a \leq x \leq b$), $\varphi(y)$ sia assolutamente continua in J e vi soddisfi la $a \leq \varphi(y) \leq b$, e che il prodotto $f[\varphi(y)] \varphi'(y)$ sia sommabile in J , e questa proposizione non è altri che il teorema di De La Vallée Poussin sul cambiamento della variabile di integrazione. Se poi $f(x, y)$ non dipende dalla x , ed è quindi $f(x, y) = f(y)$, il teorema dimostrato afferma che sussiste la

$$f(y) [\varphi(y) - \varphi(c)] = \int_c^y f(t) \varphi'(t) dt + \int_c^y f'_y(\eta) [\varphi(\eta) - \varphi(c)] d\eta,$$

ossia la

$$(33) \quad \int_c^y f(t) \varphi'(t) dt = f(y) \varphi(y) - f(c) \varphi(c) - \int_c^y f'_y(\eta) \varphi(\eta) d\eta,$$

nell'ipotesi che $f(y)$ e $\varphi(y)$ siano assolutamente continue in J , e questa proposizione non è altro che il teorema di Lebesgue sull'integrazione per parti.

11. — Proveremo ora che nelle ipotesi del teorema 1 sussiste l'identità:

$$(34) \quad \int_c^d d\eta \int_{\varphi(\eta)}^{\varphi(y)} f'_y(t, \eta) dt + \int_{\varphi(\eta)}^{\varphi(y)} f(t, c) dt + \int_{\varphi(y)}^{\varphi(d)} f(t, d) dt = \int_c^d f[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt.$$

Infatti, oltre alla formula di Green

$$(35) \quad \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t, y) dt - \int_c^y d\eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\eta)} f'_y(t, \eta) dt = \int_c^y f[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt,$$

indicata nel teorema 1, sussiste, nelle ipotesi di quel teorema, evidentemente, anche l'analoga

$$(36) \quad \int_{\varphi(d)}^{\varphi(y)} f(t, y) dt - \int_d^y d\eta \int_{\varphi(d)}^{\varphi(\eta)} f'_y(t, \eta) dt = \int_d^y f[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt,$$

e allora, sottraendo membro a membro la (36) dalla (35), e poi aggiungendo e togliendo i due integrali

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t, c) dt \quad , \quad \int_{\varphi(d)}^{\varphi(y)} f(t, d) dt,$$

si perviene alla identità

$$(37) \quad \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} dt \int_c^y f'_y(t, \eta) d\eta + \int_{\varphi(y)}^{\varphi(d)} dt \int_d^y f'_y(t, \eta) d\eta - \int_c^y d\eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\cdot)} f'_y(t, \eta) dt - \\ - \int_y^d d\eta \int_{\varphi(d)}^{\varphi(\eta)} f'_y(t, \eta) dt + \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} f(t, c) dt + \int_{\varphi(y)}^{\varphi(d)} f(t, d) dt = \int_c^d f[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt,$$

dalla quale si deduce immediatamente la (34).

Osservando che l'integrale iterato che figura in (34) è una funzione continua di y in $J^{(14)}$, si deduce subito la seguente proposizione: *Se oltre alle ipotesi del teorema I, risulta soddisfatta anche la*

$$(38) \quad \int_c^d d\eta \int_{\varphi(\eta)}^a f'_y(t, \eta) dt \cdot \int_c^d d\eta \int_{\varphi(\eta)}^b f'_y(t, \eta) dt < 0,$$

con

$$a = \min_J \varphi(y) \quad , \quad b = \max_J \varphi(y),$$

allora esiste almeno un punto ξ , in J , tale che

$$(39) \quad \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\xi)} f(t, c) dt + \int_{\varphi(\xi)}^{\varphi(d)} f(t, d) dt = \int_c^d f[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt.$$

È appena il caso di dire che la (38) è certamente soddisfatta se, quasi ovunque in R , risulta di segno costante la derivata $f'_y(x, y)$; quest'ultimo risultato rientra nell'estensione del secondo teorema della media indicata da Darbo nel loco citato in ⁽¹¹⁾.

12. - Infine può essere di qualche interesse mettere in evidenza, quali conseguenze immediate del teorema I, delle condizioni sufficienti affinché

(14) Sussiste infatti la

$$\left| \int_c^d d\eta \int_{\varphi(\eta)}^{\varphi(y+h)} f'_y(t, \eta) dt - \int_c^d d\eta \int_{\varphi(\eta)}^{\varphi(y)} f'_y(t, \eta) dt \right| = \left| \int_c^d d\eta \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} f'_y(t, \eta) dt \right| = \\ = \left| \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} \{f(t, d) - f(t, c)\} dt \right| \leq 2 \left| \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} M(t) dt \right|.$$

una funzione composta del tipo $F[\varphi(y), y]$ sia assolutamente continua ⁽¹⁵⁾. Ecco di che si tratta:

Se $F(x, y)$ è assolutamente continua rispetto alle singole variabili nel rettangolo R ($a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$), se $F'_x(x, y)$ è misurabile, rispetto ad x , e assolutamente continua rispetto ad y per quasi tutti gli x , di guisa che esiste, quasi ovunque in R , la $F'_{xy}(x, y)$ ed è ivi misurabile, se inoltre $F'_x(x, y)$ è maggiorata, in modulo, da una funzione $M(x)$ sommabile in (a, b) e F'_{xy} è sommabile in R , detta $\varphi(y)$ una qualsivoglia funzione assolutamente continua in (c, d) , ivi soddisfacente la

$$a \leq \varphi(y) \leq b,$$

e tale inoltre che il prodotto: $F'_x[\varphi(y), y] \varphi'(y)$ risulti sommabile in (c, d) , allora la funzione composta $F[\varphi(y), y]$ è assolutamente continua in (c, d) ed ivi sussiste, quasi ovunque, la formula di derivazione

$$(40) \quad \frac{dF[\varphi(y), y]}{dy} = F'_x[\varphi(y), y] \varphi'(y) + \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} F'_{xy}(t, y) dt + F'_y[\varphi(c), y].$$

Per acquisire la proposizione enunciata, basta osservare che, nelle ipotesi dichiarate, le funzioni $F'_x(x, y)$ e $\varphi(y)$ soddisfano a tutte le condizioni del teorema I, di guisa che sussiste la

$$(41) \quad \int_{\varphi(c)}^{\varphi(y)} F'_x(t, y) dt = \int_c^y F'_x[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\eta)} F'_{xy}(t, \eta) dt.$$

Inoltre, essendo

$$F(x, y) = F[\varphi(c), y] + \int_{\varphi(c)}^x F'_x(t, y) dt,$$

si ha

$$(42) \quad F[\varphi(y), y] = F[\varphi(c), y] + \int_c^y F'_x[\varphi(t), t] \varphi'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\varphi(c)}^{\varphi(\eta)} F'_{xy}(t, \eta) dt.$$

Di qui, l'assoluta continuità della funzione composta e la formula di derivazione (40) ⁽¹⁶⁾.

(15) In un mio teorema sull'unicità delle soluzioni dell'equazione $p = f(x, y, z, q)$, l'assoluta continuità di funzioni composte, del tipo ora indicato, è stata assunta come ipotesi; si veggia: G. SCORZA DRAGONI e M. VOLPATO, *Un teorema di unicità per le soluzioni di una equazione alle derivate parziali del primo ordine* (« Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », vol. XX, pp. 446-461 (1951), p. 454, ipotesi VI). La proposizione che andiamo a dedurre dà una risposta perché quell'ipotesi sia soddisfatta.

(16) Ricordo che G. Scorza Dragoni ha indicato delle condizioni sufficienti affinché la funzione composta, supposta quasi ovunque derivabile, ammetta quasi ovunque la classica espressione per la sua derivata. Si veggia: G. SCORZA DRAGONI, *Un'osservazione sulla derivata di una funzione composta*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », vol. XX, pp. 462-467 (1951).

Matematica. — *Sull'ortonormalizzazione di un particolare sistema di funzioni* ^(*). Nota di ALDO CREMONESI, presentata ^(**) dal Socio M. PICONE.

In questa Nota viene dato un metodo per ortonormalizzare, nell'intervallo $(0, +\infty)$, secondo il noto procedimento di Schmidt, il seguente sistema di $N = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ funzioni

$$(I) \quad \begin{cases} e^{-\alpha_1 t}, te^{-\alpha_1 t}, \dots, t^{p_1-1} e^{-\alpha_1 t} & ; & e^{-\alpha_2 t}, te^{-\alpha_2 t}, \dots, t^{p_2-1} e^{-\alpha_2 t} ; \\ \dots\dots\dots & ; & e^{-\alpha_n t}, te^{-\alpha_n t}, \dots, t^{p_n-1} e^{-\alpha_n t} \end{cases}$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono numeri reali o complessi, con parte reale positiva.

Dette $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_N(t)$ le funzioni del sistema ortonormale cercato, viene qui data l'espressione esplicita delle rispettive trasformate di Laplace $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_N(s)$.

Essendo così immediatamente note le $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$, si potranno, con i ben noti procedimenti algebrici di antitrasformazione, determinare le funzioni del sistema ortonormale cercato.

Il procedimento di ortonormalizzazione qui descritto trova soprattutto applicazione nello studio di certi problemi sui circuiti elettrici, e precisamente nel problema che dai tecnici è chiamato « di sintesi nel dominio del tempo ».

Il sistema (I) di funzioni può essere ortonormalizzato nell'intervallo $(0, +\infty)$ col ben noto procedimento di Schmidt.

Dette $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_N(t)$ le funzioni del sistema ortonormale, la generica fra esse può ovviamente indicarsi con

$$(2) \quad \Phi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(t) \quad (m = 1, 2, \dots, n; \mu = 1, 2, \dots, p_m)$$

e sarà definita da una formula del tipo

$$(3) \quad \Phi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(t) = \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{p_h} a_{m\mu}^{hk} t^{k-1} e^{-\alpha_h t} + \sum_{k=1}^{\mu} a_{m\mu}^{mk} t^{k-1} e^{-\alpha_m t},$$

dove le $a_{m\mu}^{hk}, a_{m\mu}^{mk}$ sono delle costanti da determinarsi in modo che siano verificate le seguenti condizioni di ortonormalità

$$(4_1) \quad \int_0^\infty \Phi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(t) \cdot \bar{\Phi}_\nu(t) dt = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, p_1)$$

$$(4_2) \quad \int_0^\infty \Phi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(t) \cdot \bar{\Phi}_{p_1+\nu}(t) dt = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, p_2)$$

.....
.....

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

$$(4m-1) \int_0^{\infty} \Phi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(t) \cdot \bar{\Phi}_{p_1+p_2+\dots+p_{m-2}+\nu}(t) dt = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, p_{m-1})$$

$$(4m) \int_0^{\infty} \Phi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(t) \cdot \bar{\Phi}_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\nu}(t) dt = \begin{cases} 0, & (\nu = 1, 2, \dots, \mu-1) \\ 1, & (\nu = \mu). \end{cases}$$

L'espressione delle predette costanti non è semplice e quindi non lo è nemmeno quella delle funzioni $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, \dots , $\Phi_N(t)$.

Ci proponiamo di far vedere che è invece assai semplice l'espressione delle loro *L-trasformate*.

Osserviamo per prima cosa che dalla (3) segue, per la generica di queste trasformate:

$$(5) \quad \varphi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(s) = \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{p_h} a_{m\mu}^{hk} \frac{(k-1)!}{(s+\alpha_h)^k} + \sum_{k=1}^{\mu} a_{m\mu}^{mk} \frac{(k-1)!}{(s+\alpha_m)^k}$$

onde tale trasformata è una funzione razionale propria coi poli $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, \dots , $-\alpha_{m-1}$, $-\alpha_m$, rispettivamente degli ordini p_1 , p_2 , \dots , p_{m-1} , μ .

Per abbreviare scriveremo spesso $\Phi(t)$ e $\varphi(s)$ in luogo di

$$\Phi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(t) \quad \text{e} \quad \varphi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(s) \quad \text{rispettivamente.}$$

Ciò premesso riprendiamo le (4_1) ed sostituiamo a $\bar{\Phi}_\nu(t)$ la sua espressione che deriva dalla (3); otteniamo in tal modo:

$$\int_0^{\infty} \Phi(t) \sum_{k=1}^{\nu} \bar{a}_{1\nu}^{1k} \cdot t^{k-1} \cdot e^{-\bar{\alpha}_1 t} \cdot dt = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, p_1)$$

relazione che equivale manifestamente alla

$$\sum_{k=1}^{\nu} \bar{a}_{1\nu}^{1k} \cdot (-1)^{k-1} \cdot \varphi^{(k-1)}(\bar{\alpha}_1) = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, p_1).$$

Da queste equazioni si ricava:

$$(6_1) \quad \varphi^{(k-1)}(\bar{\alpha}_1) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, p_1)$$

ossia che la trasformata $\varphi(s)$ ha nel punto $\bar{\alpha}_1$ uno zero di ordine p_1 .

Procediamo analogamente con la (4_2) che si può scrivere:

$$\int_0^{\infty} \Phi(t) \left\{ \sum_{k=1}^{p_1} \bar{a}_{2\nu}^{1k} \cdot t^{k-1} \cdot e^{-\bar{\alpha}_1 t} + \sum_{k=1}^{\nu} \bar{a}_{2\nu}^{2k} \cdot t^{k-1} \cdot e^{-\bar{\alpha}_2 t} \right\} dt = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, p_2)$$

ovvero

$$\sum_{k=1}^{p_1} \bar{a}_{2\nu}^{1k} (-1)^{k-1} \cdot \varphi^{(k-1)}(\bar{\alpha}_1) + \sum_{k=1}^{\nu} \bar{a}_{2\nu}^{2k} (-1)^{k-1} \cdot \varphi^{(k-1)}(\bar{\alpha}_2), \quad (\nu = 1, 2, \dots, p_2).$$

Tenuto conto di (6₁), da queste equazioni si ricava:

$$(6_2) \quad \varphi^{(k-1)}(\bar{\alpha}_2) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, p_2)$$

ossia che la *trasformata* $\varphi(s)$ ha nel punto $\bar{\alpha}_2$ uno zero di ordine p_2 .

Così procedendo fino all'equazione (4_{m-1}), si deduce analogamente che i punti $\bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4, \dots, \bar{\alpha}_{m-1}$, sono per $\varphi(s)$ degli zeri coi rispettivi ordini p_3, p_4, \dots, p_{m-1} .

Veniamo infine alla (4_m), che si può scrivere:

$$\int_0^\infty \Phi(t) \left\{ \sum_{h=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{p_h} \bar{a}_{mv}^{hk} \cdot t^{k-1} e^{-\bar{\alpha}_h t} + \sum_{k=1}^v \bar{a}_{mv}^{mk} \cdot t^{k-1} e^{-\bar{\alpha}_m t} \right\} dt = \begin{cases} 0, & (v=1, 2, \dots, \mu-1) \\ 1, & (v=\mu) \end{cases}$$

ovvero:

$$\sum_{h=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{p_h} \bar{a}_{mv}^{hk} (-1)^{k-1} \cdot \varphi^{(k-1)}(\bar{\alpha}_h) + \sum_{k=1}^v \bar{a}_{mv}^{mk} (-1)^{k-1} \cdot \varphi^{(k-1)}(\bar{\alpha}_m) = \begin{cases} 0, & (v=1, 2, \dots, \mu-1) \\ 1, & (v=\mu). \end{cases}$$

Tenuto conto dei risultati precedenti, da questa uguaglianza segue intanto:

$$(6_m) \quad \varphi^{(k-1)}(\bar{\alpha}_m) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, \mu-1)$$

cioè che $\varphi(s)$ ha in $\bar{\alpha}_m$ uno zero di ordine $\mu-1$, ed inoltre che deve essere

$$(7) \quad (-1)^{\mu-1} \cdot \bar{a}_{m\mu}^{m\mu} \cdot \varphi^{(\mu-1)}(\bar{\alpha}_m) = 1.$$

Possiamo pertanto scrivere che la trasformata $\varphi(s)$ è necessariamente del tipo:

$$(8) \quad \varphi(s) = C \frac{(s - \bar{\alpha}_1)^{p_1} (s - \bar{\alpha}_2)^{p_2} \dots (s - \bar{\alpha}_{m-1})^{p_{m-1}} (s - \bar{\alpha}_m)^{\mu-1}}{(s + \alpha_1)^{p_1} (s + \alpha_2)^{p_2} \dots (s + \alpha_{m-1})^{p_{m-1}} (s + \alpha_m)^\mu}$$

ove C è una costante che va determinata in modo che valga la (7). A tale scopo osserviamo che dalla (5) segue facilmente:

$$a_{m\mu}^{m\mu} = \lim_{s \rightarrow -\alpha_m} \left[\frac{(s + \alpha_m)^\mu}{(\mu-1)!} \cdot \varphi(s) \right]$$

e quindi per la (8)

$$(9) \quad a_{m\mu}^{m\mu} = \frac{(-1)^{\mu-1}}{(\mu-1)!} \cdot C \cdot \frac{(\alpha_m + \bar{\alpha}_1)^{p_1} (\alpha_m + \bar{\alpha}_2)^{p_2} \dots (\alpha_m + \bar{\alpha}_{m-1})^{p_{m-1}}}{(\alpha_m - \alpha_1)^{p_1} (\alpha_m - \alpha_2)^{p_2} \dots (\alpha_m - \alpha_{m-1})^{p_{m-1}}} \cdot (\alpha_m + \bar{\alpha}_m)^{\mu-1}.$$

D'altra parte dalla stessa (8) con facile calcolo si trae:

$$(10) \quad \varphi^{(\mu-1)}(\bar{\alpha}_m) = (\mu-1)! \cdot C \cdot \frac{(\bar{\alpha}_m - \bar{\alpha}_1)^{p_1} (\bar{\alpha}_m - \bar{\alpha}_2)^{p_2} \dots (\bar{\alpha}_m - \bar{\alpha}_{m-1})^{p_{m-1}}}{(\bar{\alpha}_m + \alpha_1)^{p_1} (\bar{\alpha}_m + \alpha_2)^{p_2} \dots (\bar{\alpha}_m + \alpha_{m-1})^{p_{m-1}}} \cdot \frac{1}{(\bar{\alpha}_m + \alpha_m)^\mu}$$

e perciò, tenuto conto delle (9), (10), la (7) si riduce semplicemente alla

$$|C|^2 = \alpha_m + \bar{\alpha}_m = 2 R(\alpha_m).$$

Questa determina solo il *modulo* di C e ciò è ben naturale giacché, come è noto, le funzioni (3) non sono univocamente determinate. Si può per esempio assumere C reale e positivo ⁽¹⁾; deve allora essere $C = \sqrt[2]{R(\alpha_m)}$, onde sostituendo nella (8) si ottiene in definitiva ⁽²⁾:

$$(11) \quad \varphi_{p_1+p_2+\dots+p_{m-1}+\mu}(s) = \\ = \sqrt[2]{R(\alpha_m)} \cdot \frac{(s-\bar{\alpha}_1)^{p_1}(s-\bar{\alpha}_2)^{p_2}\dots(s-\bar{\alpha}_{m-1})^{p_{m-1}}(s-\bar{\alpha}_m)^{\mu-1}}{(s+\alpha_1)^{p_1}(s+\alpha_2)^{p_2}\dots(s+\alpha_{m-1})^{p_{m-1}}(s+\alpha_m)^{\mu}}.$$

In un prossimo lavoro saranno esposte le applicazioni della (11) agli accennati problemi sui circuiti elettrici, e saranno sviluppati degli esempi numerici.

Matematica. — *Sull'ordine di un gruppo finito risolubile somma dei suoi sottogruppi di Sylow.* Nota di GIOVANNI ZACHER, presentata ^(*) dal corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

In questa Nota (n. 1) dimostro che se un gruppo risolubile G d'ordine finito è la somma (nel senso della teoria degli insiemi) dei suoi sottogruppi di Sylow, esso ha l'ordine del tipo $p^\alpha q^\beta$ con p e q numeri primi, eventualmente coincidenti. Nel n. 2 espongo qualche considerazione complementare sulla struttura del gruppo G .

1. Sia G un gruppo d'ordine finito siffatto che:

α) i periodi dei singoli elementi di G siano potenze di numeri primi, variabili eventualmente da elemento a elemento; evidentemente questa condizione α) equivale a supporre che G sia somma dei suoi sottogruppi di Sylow. I sottogruppi ed i gruppi fattoriali di G godono allora della stessa proprietà α); il centro di G , se G non è un p -gruppo, dovrà essere identico.

Supponiamo inoltre che il gruppo G sia risolubile. L'ordine g di G sia divisibile per almeno due fattori primi distinti. Nelle nostre ipotesi il gruppo G contiene un sottogruppo normale minimo N , che risulta un p -gruppo abeliano elementare. In virtù dei noti teoremi di Hall, esiste un sottogruppo H_p di G il cui indice coincide coll'ordine di S_p , di guisa che risulti anche $G = H_p S_p$, $H_p \cap S_p = 1$.

(1) Si badi che questa scelta non coincide in generale con quella usualmente adottata, di assumere reali e positivi i coefficienti $a_{m\mu}^{m\mu}$ (che figurano all'ultimo posto nelle varie combinazioni lineari (3)).

(2) La formula (11), nel caso particolare $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$ è già stata dimostrata da W. H. HUGGINS e da W. H. KAUTZ (ved. *Transient Synthesis in the time domain* di W. H. KAUTZ, «Transactions of the I.R.E. Professional Group on Circuit Theory», settembre 1954).

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

Preso un qualunque elemento non identico h di H_p , indichiamo con τ_h l'automorfismo di N individuato dalla trasformazione $n \rightarrow hnh^{-1}$. La corrispondenza univoca $h \rightarrow \tau_h$ è notoriamente un omomorfismo di H_p in un sottogruppo K del gruppo totale degli automorfismi A_N di N ; e se \bar{C} è l'intersezione di H e del centralizzante C_N di N in G , K è isomorfo ad H_p/\bar{C}_N .

Consideriamo il gruppo K . Notiamo anzitutto che \bar{C}_N coincide col sottogruppo identico I di G ; infatti se H_p contenesse un elemento (non identico) permutabile con un elemento di N , G conterrebbe elementi con periodo divisibile per almeno due fattori primi distinti, poiché H_p ed N hanno ordini primi tra loro. Pertanto H_p e K sono isomorfi: $H_p \simeq K$. Ogni elemento τ_h di K è un automorfismo regolare nel senso che la sostituzione sugli elementi di N , escluso l'elemento identico, individuata da τ_h è una sostituzione regolare. Infatti se $(\tau_h)^\gamma$ (γ intero positivo) lascia fermo un elemento n di N , l'elemento h^γ è permutabile con n , in virtù dell'isomorfismo $h \rightarrow \tau_h$; quindi $h^\gamma = I$, e $(\tau_h)^\gamma = \tau_{h^\gamma}$ lascia fermi tutti gli elementi di N . Abbiamo pertanto che:

La corrispondenza $h \rightarrow \tau_h$ dà luogo ad un isomorfismo tra il gruppo H_p ed un sottogruppo K di automorfismi regolari del gruppo A .

Proviamo ora il seguente

TEOREMA. - *Se G è un gruppo d'ordine finito, risolubile, che gode della proprietà α), l'ordine g di G è divisibile al più per due fattori primi distinti.*

Dimostrazione. - Se $q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_t^{\beta_t}$ è l'ordine di H_p scomposto nei suoi fattori primi distinti, in H_p consideriamo t sottogruppi abeliani elementari L_1, L_2, \dots, L_t cogli ordini rispettivi $q_1^{v_{i_1}}, q_2^{v_{i_2}}, \dots, q_t^{v_{i_t}}$: L_1 è un sottogruppo normale minimo di H_p ; L_2 è un sottogruppo normale minimo in un fissato sottogruppo d'ordine $q_2^{\beta_{i_2}} q_3^{\beta_{i_3}} \dots q_t^{\beta_{i_t}}$ di H_p, \dots ; L_t è un sottogruppo abeliano elementare in un conveniente sottogruppo di Sylow di H_p d'ordine $q_t^{\beta_{i_t}}$. Allora l'unione $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_t$ è un gruppo d'ordine $q_1^{v_1} q_2^{v_2} \dots q_t^{v_t}$ a sottogruppi di Sylow tutti abeliani. Nel gruppo L ogni sottogruppo a centro non identico risulta abeliano in quanto gli unici sottogruppi di L a centro non identico sono i p -gruppi. Per l'isomorfismo $H \simeq K$, L è isomorfo ad un sottogruppo M di K . Il gruppo M risulta pertanto un gruppo di automorfismi regolari di un p -gruppo abeliano elementare, ed in M ogni sottogruppo a centro non identico è abeliano. Ciò basta in virtù di un teorema di Burnside-Zassenhaus-Itô⁽¹⁾, per concludere che M e quindi L deve essere ciclico. Ma allora L , poiché gode della proprietà α), deve essere un p -gruppo ciclico. Poiché $v_i > 0$ per $i = 1, 2, \dots, t$, concludiamo che $t = 1$ e quindi l'ordine di G è del tipo $p^\alpha q^\beta$ con $\beta \geq 0$ e p, q numeri primi distinti.

(1) N. ITÔ, *On finite groups with given conjugate types I*, «Nagoya Math. Jour.», vol. 6, p. 24.

Il teorema dimostrato equivale ad affermare che:

Ogni gruppo risolubile il cui ordine sia divisibile per almeno tre fattori primi distinti contiene un elemento il cui ordine è divisibile per almeno due fattori primi distinti.

2. Nel ragionamento svolto è implicito che il gruppo di Sylow S_q può contenere un solo sottogruppo d'ordine q . Pertanto S_q risulta un gruppo ciclico oppure un gruppo generalizzato dei quaternioni. Ambedue le circostanze possono presentarsi. La prima è ovvia. Per realizzare la seconda, consideriamo il gruppo abeliano elementare F d'ordine 3^2 . Il gruppo lineare speciale $SL(2, 3)$ contiene il sottogruppo di Sylow S d'ordine 8 isomorfo al gruppo dei quaternioni, ed ogni elemento di S è un automorfismo regolare di F . L'olomorfo di F rispetto ad S fornisce l'esempio cercato.

Dimostriamo ora il seguente

TEOREMA. — *Se G è un gruppo d'ordine $p^\alpha q^\beta$ (p, q primi distinti) somma dei suoi sottogruppi di Sylow, se p^γ ($\gamma > 0$) è l'ordine di un sottogruppo normale minimo di G , il sottogruppo di Sylow S_p d'ordine p^α è certamente normale se $p > q$, oppure se S_p è abeliano.*

Infatti, se $p > q$, il normalizzante $\mathfrak{N}(S_q)$ di un sottogruppo di Sylow, S_q , d'ordine q^β coincide con S_q stesso, altrimenti $\mathfrak{N}(S_q)$ conterrebbe due sottogruppi normali d'ordini primi tra loro, quindi permutabili elemento per elemento, essendo S_q un gruppo ciclico o un gruppo generalizzato dei quaternioni e pertanto contenente in ogni caso un sottogruppo normale di $\mathfrak{N}(S_q)$ d'ordini q . Ora se $\mathfrak{N}(S_q) = S_q$, G contiene p^α coniugati di S_q . Inoltre se S'_q e S''_q sono due tali coniugati, $S'_q \cap S''_q = 1$ perché in caso contrario $S'_q \cup S''_q$ conterrebbe un sottogruppo d'ordine q normale in S'_q ed S''_q e quindi anche nel non- q -gruppo $S'_q \cup S''_q$. Pertanto il numero t degli elementi di G d'ordine primo con q soddisfa all'uguaglianza $t + p^\alpha(q^\beta - 1) = p^\alpha q^\beta$, ossia è $t = p^\alpha$, vale a dire S_p è normale.

Se $p < q$ ed S_p è abeliano, $\mathfrak{N}(S_p)$ contiene propriamente S_p , altrimenti per un teorema di Burnside ⁽²⁾, S_q è normale. Se $\mathfrak{N}(S_p)$ fosse un sottogruppo proprio di G , detto N il massimo sottogruppo normale di G contenuto in S_p , il gruppo fattoriale $\mathfrak{N}(S_p)/N$ conterrebbe un sottogruppo normale d'ordine q ; il che è manifestamente assurdo, perché allora $\mathfrak{N}(S_p)/N$ conterrebbe due sottogruppi normali d'ordine primi tra loro.

Osservazione. — Se $p < q$ il teorema ora dimostrato non è più vero, in generale: un esempio è fornito dal gruppo totale su 4 oggetti: esso è d'ordine 24, contiene un sottogruppo normale d'ordine 4 mentre i suoi sottogruppi di Sylow non sono normali.

Dimostriamo finalmente il seguente

TEOREMA. — *Se G è un gruppo d'ordine finito somma dei suoi sottogruppi di Sylow e contiene un sottogruppo di Sylow normale, esso è risolubile.*

Dimostreremo che nelle nostre ipotesi è assurdo supporre l'ordine di G divisibile per più di due fattori primi distinti. Procediamo per induzione, supponendo che ogni sottogruppo proprio di G , se contiene un sottogruppo

di Sylow normale, abbia ordine divisibile per due fattori primi distinti al più. Sia S_p il sottogruppo di Sylow normale di G . I gruppi di Sylow d'ordini primo con p , o son ciclici, o generalizzati dei quaternioni. Sia q un divisore primo, diverso da 2 e p , dell'ordine g di G . I sottogruppi di Sylow il cui ordine è potenza di q sono ciclici: fissatone uno, S_q , consideriamone il normalizzante $\mathfrak{N}(S_q)$. Se $\mathfrak{N}(S_q) = S_q$, esiste per un teorema di Burnside ⁽²⁾, un complemento normale H_q . Ora $H_q \supset S_p$, quindi, per l'ipotesi induttiva, H_q è risolubile, quindi H_q ha ordine divisibile soltanto per due fattori primi distinti. Ma allora $H_q \cup S_p = G$ è pure risolubile. Se $\mathfrak{N}(S_q) \supset S_q$, risulta $\mathfrak{N}(S_q) \cap S = 1$, perché $\mathfrak{N}(S_q)$ non può contenere due sottogruppi normali di ordini primi tra loro.

Pertanto $\mathfrak{N}(S_q)$ ha ordine primo con p . L'ordine di $\mathfrak{N}(S_q)$, per l'ipotesi induttiva è divisibile esattamente per due fattori primi distinti. Ma allora il gruppo $\mathfrak{N}(S_q) \cup S_p$ è risolubile ed ha ordine divisibile per tre fattori primi distinti, il che è assurdo. Donde la conclusione.

Teoria delle funzioni. — *Teoremi e formule integrali nelle algebre di Clifford.* Nota di GIOVANNI BATTISTA RIZZA, presentata ^(*) dal Socio B. SEGRE.

1. Tra le ricerche tendenti ad estendere la teoria delle funzioni di ordinaria variabile complessa al caso di funzioni nelle algebre ipercomplesse possono distinguersi vari indirizzi.

Uno dei più noti è stato aperto intorno al 1931 da alcuni lavori di Gr. C. Moisil e R. Fueter, dedicati allo studio di particolari funzioni, dette regolari, nell'algebra dei quaternioni e, più in generale, nelle algebre di Clifford.

In seguito, la teoria delle funzioni regolari è stata sviluppata con riferimento ad un'algebra qualunque e risultano ormai acquisiti teoremi integrali generali di tipo Cauchy.

Al contrario, il problema della determinazione di corrispondenti formule integrali è tuttora insoluto. Sono noti al riguardo soltanto alcuni risultati relativi all'algebra dei quaternioni ed alle algebre di Clifford. In quest'ultimo caso, però, il problema è stato risolto sotto ipotesi assai restrittive.

Nella presente Nota riassumo risultati da me recentemente conseguiti in questo indirizzo di ricerche ⁽¹⁾.

Precisamente, al n. 4, stabilisco una formula integrale generale per le funzioni regolari nelle algebre di Clifford. Essa è determinata soltanto da condizioni di validità di natura topologica e, sebbene di struttura più complessa, conserva i caratteri essenziali dell'ordinaria formula integrale di

(2) H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Teubner 1937, p. 133.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Essi appariranno per esteso nel lavoro dal titolo *Funzioni regolari nelle algebre di Clifford* di prossima pubblicazione nei « Rend. Mat. », Roma, al quale rinvio per le dimostrazioni e la bibliografia.

Cauchy. In questo senso il risultato ottenuto può riuscire indicativo nei riguardi del problema delle formule integrali in un'algebra generale.

Una seconda formula integrale, con le stesse caratteristiche della precedente, si riferisce invece ad una particolare classe di funzioni regolari, indicata con \mathfrak{R}^* (n. 4).

Entrambe le formule, che provengono da corrispondenti teoremi integrali (n. 3), si semplificano notevolmente, sia per una scelta opportuna delle varietà di integrazione, sia nel caso di funzioni appartenenti ad una sottoclasse di \mathfrak{R}^* , denotata con \mathfrak{R}^0 .

Infine, i teoremi e le formule integrali di cui sopra, relativi alle algebre di Clifford, si riflettono in teoremi e formule integrali per le funzioni regolari di più variabili quaternione, le quali, prima d'ora, non risultano essere state oggetto di studio.

2. Indichiamo con C_n ($n \geq 2$) l'algebra di Clifford d'ordine $v = 2^n$ e con $[I, i_{j_1}, i_{j_1 j_2}, \dots, i_{j_1 \dots j_n}]$ la relativa base, dove $j_1 < j_2 < \dots < j_n$ sono interi qualunque scelti tra $1, \dots, n$ e sussistono le relazioni:

$$i_{j_h}^2 = -I \quad , \quad i_{j_h} i_{j_k} + i_{j_k} i_{j_h} = 0 \quad , \quad i_{j_1} \dots i_{j_s} = i_{j_1 \dots j_s} \quad (1 \leq s \leq n)$$

In un precedente lavoro ho dimostrato per le algebre di Clifford un teorema di struttura che si traduce nella relazione di somma diretta: $C_n = Q^{(1)} + \dots + Q^{(\mu)}$, essendo $\mu = 2^{n-2}$ e le $Q^{(h)}$ algebre dei quaternioni. Potremo perciò assumere come base in C_n quella costituita dalle μ quaterne $u_0^{(h)}, u_1^{(h)}, u_2^{(h)}, u_3^{(h)}$, ciascuna quaterna essendo formata dalle ordinarie unità quaternione di $Q^{(h)}$ ($h = 1, \dots, \mu$).

L'ipercomplesso generico di C_n è dunque $x = \sum_1^\mu x^{(h)}$, con le $x^{(h)} = \sum_0^3 x^p u_p^{(h)}$ in $Q^{(h)}$, e può rappresentarsi nello spazio cartesiano ortogonale S_v , prodotto dei μ spazi coordinati $S_4^{(h)}(x_0^{(h)}, x_1^{(h)}, x_2^{(h)}, x_3^{(h)})$ relativi alle singole componenti $x^{(h)}$ ($h = 1, \dots, \mu$).

I divisori dello zero di C_n costituiscono la varietà

$$\omega_{v+4} = \sum_1^\mu \Omega_{v-4}^{[h]} = \sum_1^\mu S_4^{(1)} \times \dots \times S_4^{(h-1)} \times S_4^{(h+1)} \times \dots \times S_4^{(\mu)},$$

alla quale appartiene anche la varietà $J_{\mu-1}$, contorno della varietà prodotto dei semiassi positivi $x_0^{(h)}$ ($h = 1, \dots, \mu$).

Nel seguito interverranno anche le varietà $S_4^{(h)}(\xi)$, $\omega_{v-4}(\xi)$, $\Omega_{v-4}^{[h]}(\xi)$, $J_{\mu-1}(\xi)$ parallele, per un generico punto ξ di S_v , ad $S_4^{(h)}$, ω_{v-4} , $\Omega_{v-4}^{[h]}$, $J_{\mu-1}$ rispettivamente.

Insieme alle algebre $Q^{(h)}$ ($h = 1, \dots, \mu$), componenti di C_n , converrà considerare anche l'algebra dei quaternioni $Q^{(0)}$ con ordinarie unità $u_p^{(0)}$ ($p = 0, 1, 2, 3$). Si dirà poi *isomorfismo canonico* tra $Q^{(r)}$ e $Q^{(s)}$ ($r, s = 0, \dots, \mu$) quello nel quale si corrispondono ordinatamente le unità delle basi. Indi-

cheremo infine con $x^{(s)}$ l'ipercomplesso di $Q^{(s)}$ corrispondente alla variabile $x^{(h)}$ di $Q^{(h)}$ ($h = 1, \dots, \mu$; $s = 0, \dots, \mu$).

Un esame preliminare mostra che la classe delle *funzioni regolari a destra* rispetto alla base $[1, i_{j_1}, \dots, i_{j_1} \dots j_n]$, indicata con \mathfrak{R}_d , coincide con quella delle funzioni regolari a destra rispetto alla base $[u_p^{(h)}]^{(2)}$. Ciò permette di ricondurre all'ordinaria regolarità a destra dell'algebra dei quaternioni la corrispondente nozione relativa alle algebre di Clifford.

Precisamente, una funzione $y = \sum_1^\mu y^{(h)}$ di C_n appartiene alla classe \mathfrak{R}_d se ogni componente $y^{(h)}$ è funzione regolare a destra della variabile quaternionica $x^{(h)}$.

In particolare diremo che y appartiene alla classe \mathfrak{R}_d^* , se le $y^{(h)}$ sono funzioni regolari a destra di ciascuna $x^{(h)}$ (più esattamente, di ciascuna $x^{(h)}$).

Infine, le y di \mathfrak{R}_d con le $y^{(h)}$ funzioni della sola $x^{(h)}$ costituiscono la classe \mathfrak{R}_d^0 . Risulta manifestamente $\mathfrak{R}_d \supset \mathfrak{R}_d^* \supset \mathfrak{R}_d^0$.

3. Ricordiamo ora che nella formula integrale relativa all'algebra dei quaternioni $Q^{(h)}$ intervengono come nucleo ed elemento differenziale di integrazione le espressioni:

$$(I) \quad \mathfrak{U}^{(h)}(x^{(h)}, \xi^{(h)}) = \frac{\bar{x}^{(h)} - \bar{\xi}^{(h)}}{[(x^{(h)} - \xi^{(h)})(\bar{x}^{(h)} - \bar{\xi}^{(h)})]^2} \quad ; \quad dX^{(h)} = -(dx^{(h)})^* ;$$

la sopralineatura indicando il coniugio e l'asterisco l'aggiunzione (con riguardo alle variabili $x^{(h)}$).

Nel seguito sarà utile considerare anche le somme $\mathfrak{U}(x, \xi) = \sum_1^\mu \mathfrak{U}^{(h)}(x^{(h)}, \xi^{(h)})$ ($\xi = \sum_1^\mu \xi^{(h)}$) e $dX = \sum_1^\mu dX^{(h)}$ e le espressioni più generali $\mathfrak{U}^{(s)}(x^{(s)}, \xi^{(s)})$ (brevemente $\mathfrak{U}^{(s)}$) e $dX^{(s)}$, ottenute dalle (I) mediante l'isomorfismo canonico tra $Q^{(h)}$ e $Q^{(s)}$ ($h = 1, \dots, \mu$; $s = 0, \dots, \mu$).

Ci varremo inoltre delle forme $dw^{(h)} = \prod_k dX^{(h)}$, $dW^{(h)} = \prod_k dX^{(h)} \mathfrak{U}^{(h)}$, $dw = \sum_1^\mu dw^{(h)}$, $dW = \sum_1^\mu dW^{(h)}$, il simbolo \prod_k indicando prodotto esterno rispetto all'indice k percorrente nell'ordine gli interi $h, \dots, \mu, 1, \dots, h-1$.

Poniamo infine $d_h y^{(s)} = \sum_0^3 \frac{\partial y^{(s)}}{\partial x^p} dx^p$ e $d_{[h]} y^{(s)} = dy^{(s)} - d_h y^{(s)}$ ed osserviamo esplicitamente che $\Omega_{v-4}^{[h]}(\xi)$, $\omega_{v-4}(\xi)$ sono *varietà singolari* per $\mathfrak{U}^{(s)}$ ed $\mathfrak{U}(x, \xi)$ rispettivamente ($h = 1, \dots, \mu$; $s = 0, \dots, \mu$).

Ciò premesso, diamo l'enunciato di due teoremi integrali ai quali vanno associate le formule integrali del prossimo numero.

Siano y una funzione di C_n della variabile x di C_n , regolare a destra in una regione H_v di S_v e $\Delta_4, \Delta_{3\mu+1}$ arbitrarie varietà di H_v di contorni posi-

(2) Nel seguito ci riferiremo costantemente al caso delle funzioni regolari a destra. L'altro caso è del tutto analogo.

tivi $\Gamma_3, \Gamma_{3\mu}$ (brevemente $\Delta_4 \rightarrow \Gamma_3, \Delta_{3\mu+1} \rightarrow \Gamma_{3\mu}$). Sussistono allora i *teoremi integrali*:

$$(2) \quad \int_{\Gamma_3} y dX = \sum_1^{\mu} \int_{\Delta_4} d_{[h]} y^{(h)} \wedge dX^{(h)},$$

$$(3) \quad \int_{\Gamma_{3\mu}} y dw = \sum_1^{\mu} \int_{\Delta_{3\mu+1}} d_{[h]} y^{(h)} \wedge dw^{(h)},$$

il segno \wedge indicando prodotto esterno.

4. Sia ora ξ un punto di H_v e $\Gamma_3, \Gamma_{3\mu}$ *arbitrari cicli soddisfacenti alle condizioni*:

$$I) \quad \Gamma_3, \Gamma_{3\mu} \subset H_v - \omega_{v-4}(\xi) \quad ; \quad II) \quad \Gamma_3, \Gamma_{3\mu} \approx 0 \text{ in } H_v - \omega_{v-4}(\xi) + \xi.$$

La situazione topologica di allacciamento di $\Gamma_3, \Gamma_{3\mu}$ con la varietà singolare $\omega_{v-4}(\xi)$ viene caratterizzata dagli interi $N^{(h)} = \text{All}(\Gamma_3, \Omega_{v-4}^{[h]}(\xi))$ ($h = 1, \dots, \mu$), $N = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2} + 1} \text{All}(\Gamma_{3\mu}, J_{\mu-1}, (\xi))$.

Si dimostra poi l'esistenza, in $H_v - \Omega_{v-4}^{[h]}(\xi)$, $H_v - \omega_{v-4}(\xi)$ rispettivamente, di varietà $V_4^{(h)} \rightarrow \eta(\Gamma_3 - N^{(h)} \gamma_3^{*(h)})$, $V_{3\mu+1} \rightarrow \eta^*(\Gamma_{3\mu} - N \gamma_{3\mu}^*)$, essendo $\gamma_3^{*(h)}$ un qualunque ciclo di $H_4^{(h)}(\xi) = H_v \cap S_4^{(h)}(\xi)$, soddisfacente alle condizioni:

$$I^{(h)} \quad \gamma_3^{*(h)} \subset H_4^{(h)}(\xi) - \xi \quad ; \quad II^{(h)} \quad \gamma_3^{*(h)} \sim 0 \text{ in } H_4^{(h)}(\xi) \quad ; \quad III^{(h)} \quad \text{All}(\gamma_3^{*(h)}, \xi) = 1;$$

($h = 1, \dots, \mu$), $\gamma_{3\mu}^* = \gamma_3^{*(1)} \times \dots \times \gamma_3^{*(\mu)}$ ed η, η^* gli ordini dei cicli $\Gamma_3, \Gamma_{3\mu}$.

Le varietà $V_4, V_{3\mu+1}$ si diranno *varietà congiungenti*, in quanto permettono di collegare i cicli assegnati $\Gamma_3, \Gamma_{3\mu}$ con gli spazi $S_4^{(h)}(\xi)$ e le varietà di tipo μ -torico $\gamma_{3\mu}^*$, evitando le varietà singolari $\Omega_{v-4}^{[h]}(\xi)$, $\omega_{v-4}(\xi)$ ⁽³⁾.

Ciò premesso, nelle ipotesi I, II su Γ_3 , per ogni funzione y di C_n della variabile x di C_n , regolare a destra in H_v , sussiste la *formula integrale generale*:

$$(4) \quad 2\pi^2 \left(\sum_1^{\mu} N^{(h)} u_o^{(h)} \right) y(\xi) = - \int_{\Gamma_3} y(x) dX \mathfrak{O}(x, \xi) + \\ + \frac{1}{\eta} \sum_1^{\mu} \int_{V_4^{(h)}} d_{[h]} y^{(h)} \wedge dX^{(h)} \mathfrak{O}^{(h)}(x^{(h)}, \xi^{(h)}).$$

In particolare, se y appartiene in H_v alla classe \mathbb{R}_d^* , per un qualunque ciclo $\Gamma_{3\mu}$ soddisfacente alle condizioni I, II, si ottiene la *formula integrale*:

$$(5) \quad (-2\pi^2)^{\mu} N y(\xi) = \int_{\Gamma_{3\mu}} y(x) dW - \frac{1}{\eta^*} \sum_1^{\mu} \int_{V_{3\mu+1}} d_{[h]} y^{(h)} \wedge dW^{(h)}.$$

(3) Nel lavoro cit. in (1) il termine « varietà congiungente » è usato in una accezione lievemente più generale.

È immediato rilevare nelle (4), (5) le proprietà segnalate al n. 1. Notiamo inoltre che, per $\mu = 1$, entrambe le formule si riducono alla formula integrale di R. Fueter dell'algebra dei quaternioni.

Se in luogo di $\Gamma_3, \Gamma_{3\mu}$ si considerano le varietà $\bar{\Gamma}_3 = \sum_i^\mu N^{(h)} \gamma_3^{*(h)}, \gamma_{3\mu}^*$, gli integrali sulle varietà congiungenti $V_4^{(h)}, V_{3\mu+1}$ svaniscono. Lo stesso avviene, nelle ipotesi generali sulle varietà d'integrazione, quando si supponga γ appartenente alla classe \mathfrak{R}_d^0 . Analoghe semplificazioni hanno luogo per i teoremi integrali del n. 3.

5. Consideriamo infine nell'algebra dei quaternioni $Q^{(o)}$ la classe R_d^μ costituita dalle *funzioni $y^{(o)}$ di $Q^{(o)}$ regolari a destra rispetto alle μ variabili quaternione $x^{(o)}$* (n. 2) ⁽⁴⁾.

Si rileva facilmente che l'isomorfismo canonico tra $Q^{(o)}$ e $Q^{(h)}$ fa corrispondere alla classe R_d^μ di $Q^{(o)}$ una sottoclasse di \mathfrak{R}_d^* , precisamente quella delle funzioni di \mathfrak{R}_d^* appartenenti a $Q^{(h)}$.

Di conseguenza, con semplici cambiamenti formali, dalle (4), (5) derivano immediatamente, per le funzioni $y^{(o)}$ di R_d^μ , le *formule integrali*:

$$(6) \quad 2 \pi^2 N^{(h)} y^{(o)} (\xi_i^{(o)}, \dots, \xi_\mu^{(o)}) = - \int_{\bar{\Gamma}_3} y^{(o)} (x_i^{(o)}, \dots, x_\mu^{(o)}) dX^{(o)} \mathfrak{R}^{(o)} + \\ + \frac{1}{\eta} \int_{V_4^{(h)}} d_{[h]} y^{(o)} \wedge dX^{(o)} \mathfrak{R}^{(o)}$$

$$(7) \quad (-2 \pi^2)^\mu N y^{(o)} (\xi_i^{(o)}, \dots, \xi_\mu^{(o)}) = \int_{\Gamma_{3\mu}} y^{(o)} (x_i^{(o)}, \dots, x_\mu^{(o)}) dW^{(o)} - \\ - \frac{1}{\eta^*} \int_{V_{3\mu+1}} d_{[h]} y^{(o)} \wedge dW^{(o)}$$

in corrispondenti condizioni di validità, con ovvio significato dei simboli ed $h = 1, \dots, \mu$.

In modo analogo si possono ottenere i relativi teoremi integrali ed anche formule integrali di struttura più semplice, che rientrano nelle (6), (7) come casi particolari.

Alle stesse conclusioni si può anche pervenire sfruttando l'isomorfismo canonico tra $Q^{(o)}$ e la sottoalgebra diagonale D_n di C_n .

(4) A questo caso ($\mu = 2^n - 2$) ci si può sempre ricondurre, qualunque sia il numero delle variabili.

Geometria. — *Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione.* Nota I di DAVID KIRBY, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Il presente lavoro ⁽¹⁾ — diviso in tre Note — è un approfondimento e una estensione dello studio degli anelli « canonici » di serie formali di potenze in una indeterminata, iniziato da Cahit Arf ⁽²⁾. È però preferibile di cambiare — come qui faremo — la terminologia introdotta da questo A., onde poter mettere in evidenza qualche invariante che ivi non appare esplicitamente.

L'analisi di C. Arf è strettamente algebrica. Noi qui preferiamo invece seguire una via geometrica; e ciò rende necessaria la dimostrazione di certi teoremi preliminari, che enunceremo nei primi due numeri. L'ultimo numero di questa Nota I tratta della definizione dei nuovi invarianti summenzionati e introduce la nuova terminologia.

Nella Nota II ripeteremo — con opportune modificazioni — alcuni risultati dell'Arf, esponendo le prime proprietà degli anelli e dei semigruppî canonici. Ivi ci interesseremo inoltre dell'interpretazione geometrica dei risultati suddetti, sebbene gli invarianti introdotti non sembrino avere un significato geometrico semplice.

La Nota III è dedicata allo studio dell'effetto di una proiezione su di un ramo. Mostreremo più precisamente in qual guisa vengano cambiati mediante proiezione gli invarianti dianzi definiti. Da tale studio deriveranno, in modo naturale, due tipi di classificazione dei centri di proiezione, dai quali dedurremo due sistemi invarianti di spazi associati ad un ramo, ciascuno costituente un « nido » (n. 7).

Le dimostrazioni complete dei teoremi enunciati vengono omesse per brevità. Tale dimostrazioni hanno carattere algebrico diretto, e si trovano, per la maggior parte, nei lavori già citati. Le considerazioni della terza parte seguono da alcuni accenni di P. Du Val ⁽³⁾.

§ I. ALCUNI INVARIANTI DI UN RAMO ALGEBROIDE.

1. Sia K un corpo algebricamente chiuso, o, più particolarmente, il corpo dei numeri complessi ⁽⁴⁾. Designiamo con $K\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ l'anello delle serie formali di potenze in N indeterminate x_1, x_2, \dots, x_N a coefficienti

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Sunto della prima parte di una tesi — tuttora inedita — intitolata: *The application of formal power series to the study of singularities*, la quale è stata approvata (nel giugno 1955) dall'Università di Londra per il grado di « Doctor of Philosophy ».

(2) Cfr. *Une interprétation algébrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algébrique*, « Proc. L. M. S. », ser. 2^a, 50 (1948) 256. In seguito richiameremo questo lavoro come C. A.

(3) Cfr. *A note on Cahit Arf's 'Une interprétation algébrique de la suite des ordres de multiplicité d'une branche algébrique'*, « Proc. L. M. S. », ser. 2^a, 50 (1948) 288.

(4) Molti dei risultati qui ottenuti si estendono tosto a corpi più generali; ad esempio, il corpo iniziale di C. A. è scelto arbitrariamente.

in K . In seguito si intende che tutte le serie sono formali, sicché non interverranno condizioni di convergenza.

È chiaro che, con definizioni ovvie ⁽⁵⁾, possiamo passare da ciascun elemento di $K\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ad un elemento di $K\{y_1, y_2, \dots, y_M\}$ mediante una sostituzione del tipo

$$(1) \quad x_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_M) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

ove $f_1(y), f_2(y), \dots, f_N(y)$ sono elementi di $K\{y_1, y_2, \dots, y_M\}$ di ordini positivi. Inoltre, se la sostituzione (1) viene eseguita sugli elementi di un sottoanello di $K\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, otteniamo gli elementi di un sottoanello di $K\{y_1, y_2, \dots, y_M\}$. Questo procedimento, nel caso $M = 1$, apparirà molto importante nello studio di rami algebroidi.

Consideriamo ora il caso di un anello di serie formali di potenze in una sola indeterminata, $K\{t\}$. Denotiamo con $H(t)$ un sottoanello di $K\{t\}$. L'insieme degli ordini degli elementi di $H(t)$ può scriversi nella forma $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$, ove $v_i < v_j$ per $i < j$. Si vede subito che, essendo $H(t)$ un anello, quest'insieme di ordini è un *semigrupp*o additivo d'interi non negativi, il quale contiene il simbolo ∞ ; simbolo che, convenzionalmente, designa l'ordine dello zero di K , considerato come elemento di $K\{t\}$. Chiameremo $\{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ il *semigrupp*o di $H(t)$, e lo designeremo con $W(H)$; quando un tale semigrupp

La trasformazione regolare

$$(2) \quad t = \alpha(t'),$$

ove $\alpha(t')$ denoti un elemento di $K\{t'\}$ di ordine 1, muta gli elementi di $H(t)$ in elementi di $K\{t'\}$; questi alla loro volta costituiscono un sottoanello, $H'(t')$, di $K\{t'\}$, il quale contiene K . Diremo allora che $H'(t')$ è associato a $H(t)$. Si vede facilmente che questa associazione è una relazione d'equivalenza; ne consegue che i sottoanelli di $K\{t\}$ si aggruppano in classi d'equivalenza; e si tratta di studiare le proprietà degli anelli $H(t)$ che risultano invarianti rispetto a tale associazione. Una prima proprietà è che:

*Due sottoanelli associati di $K\{t\}$ posseggono lo stesso semigrupp*o.

Un teorema importante, dimostrato in C. A., è il

TEOREMA I. - Se $\{0, v_1, v_2, \dots\}$ è il semigrupp

$$v_{r+s} = v_r + v_s \quad (s = 0, 1, 2, \dots),$$

ove v è il massimo comun divisore degli interi v_1, v_2, \dots, v_{r+1} . Inoltre esiste un anello, associato a $H(t)$, il quale è un sottoanello di $K\{t^v\}$.

Supporremo che l'intero v del Teor. I sia il massimo comun divisore di tutti gli interi di $W(H)$.

(5) Cfr. BOCHNER e MARTIN, *Several Complex Variables*, Princeton (1948) p. 4.

DEFINIZIONE I. — a) Sia W un semigruppò di interi non negativi che contenga lo zero. Se il massimo comun divisore degli elementi di W risulta 1, diremo che W è un *semigruppò unitario*.

b) Diremo che $H(t)$ è un *anello unitario*, quando il suo semigruppò risulta unitario.

È chiaro, dal Teor. I, che, se $H(t)$ non risulta unitario, esiste un anello associato a $H(t)$ che, pensato come sottoanello $H'(T)$ di $K\{T\}$, ove $T = t^n$, risulta unitario. Le proprietà della classe d'equivalenza contenente $H(t)$, si deducono subito dalle proprietà della classe d'equivalenza che contiene $H'(T)$; e questa contiene *soltanto anelli unitari*.

Passiamo ora ad una seconda distinzione importante fra due tipi di anelli.

DEFINIZIONE II. — Sia $R_1(t), R_2(t), \dots$ una qualunque successione di elementi di $H(t)$ scelta in modo che la successione degli ordini $O\{R_1(t)\}, O\{R_2(t)\}, \dots$ tenda all'infinito. Chiameremo $H(t)$ *completo*, se la somma formale

$$R_1(t) + R_2(t) + \dots$$

risulta un elemento di $H(t)$. Altrimenti diremo che $H(t)$ è *incompleto*.

La completezza è evidentemente una proprietà conservata dall'associazione.

Il lemma seguente fornisce una distinzione più semplice fra anelli completi e incompleti.

LEMMA I. — Sia $\{0, v_1, v_2, \dots\}$ il semigruppò di $H(t)$, e siano $P_0(t), P_1(t), P_2(t), \dots$ elementi di $H(t)$ aventi ordini rispettivamente $0, v_1, v_2, \dots$. Affinché $R(t)$ sia un elemento di $H(t)$ è necessario che esistano elementi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ di K tali che

$$R(t) = \alpha_0 P_0(t) + \alpha_1 P_1(t) + \alpha_2 P_2(t) + \dots$$

Ebbene, questa condizione risulta sufficiente se, e soltanto se, $H(t)$ è completo.

La necessità della condizione suddetta deriva dal fatto che gli elementi $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ possono venire definiti in modo ricorrente.

Se $H(t)$ è completo, la sufficienza è una conseguenza immediata della Def. II.

Se $H(t)$ è incompleto, esiste un elemento $R(t)$ di $K\{t\}$, ma non di $H(t)$, il quale si può scrivere nella forma

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) + \dots,$$

ove $R_1(t), R_2(t), \dots$ sono elementi di $H(t)$ di ordini tendenti all'infinito. Allora quell'elemento si scrive anche nella forma

$$R(t) = \alpha_0 P_0(t) + \alpha_1 P_1(t) + \dots,$$

ove $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ sono elementi di K . Così la condizione enunciata non è sufficiente quando $H(t)$ è incompleto.

Notiamo, inoltre, che la rappresentazione di $R(t)$ nella forma $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i P_i(t)$ risulta unica, fissate che siano le $P_0(t), P_1(t), P_2(t), \dots$.

Altre proprietà degli anelli completi, già rilevate in C. A. sono:

se $P(t)$ è un elemento di $H(t)$ di ordine nullo, l'inverso di $P(t)$ è un elemento di $H(t)$, e le radici r -esime di $P(t)$ sono elementi di $H(t)$, per ogni intero r .

2. Ciò premesso, ci proponiamo di approfondire lo studio dei rami algebroidi. Sia Γ un ramo algebroide di uno spazio affine, A_N , di dimensione N . Scegliamo le coordinate (x_1, x_2, \dots, x_N) in A_N in modo che l'origine, O , di Γ sia l'origine delle coordinate. Supponiamo che una rappresentazione parametrica di Γ sia

$$(3) \quad x_i = P_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

sicché le $P_i(t)$ risultano elementi di $K\{t\}$ di ordini positivi. Poggiando sul secondo capoverso del n. 1, possiamo riguardare le relazioni (3) come una sostituzione delle x_i su tutti gli elementi di $K\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$; e così Γ fornisce un sottoanello di $K\{t\}$ che denoteremo con $K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}$. Diremo che l'insieme $P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)$ genera $K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}$, ed anche che Γ genera $K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}$.

DEFINIZIONE III. - Se un anello, $H(t)$, risulta identificabile con l'anello $K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}$ per qualche insieme di serie di potenze $P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)$, ove l'ordine di ciascuna $P_i(t)$ sia positivo, si dice che $H(t)$ è generato finitamente, ed anche che l'insieme $P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)$ è un insieme generatore di $H(t)$.

È chiaro che ogni anello generato finitamente contiene il corpo fondamentale K .

Osserviamo che la parametrizzazione (3) certamente non è unica, causa l'arbitrarietà nella scelta del parametro t . Avuto riguardo al Teor. I ed alle osservazioni che seguono l'enunciato di questo, si vede che il parametro può venir scelto in modo che $K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}$ sia unitario; si ha inoltre che Γ definisce una classe unica di anelli unitari. Quindi, nel seguito, sceglieremo sempre il parametro in modo che l'anello, generato da Γ , risulti unitario. Vogliamo ora studiare le proprietà degli anelli unitari invarianti rispetto all'associazione; in base al teorema seguente, ci potremo limitare al solo studio degli anelli completi.

TEOREMA II. - Un anello $H(t)$ è generato finitamente se, e soltanto se, è completo.

La dimostrazione del teorema suddetto è piuttosto lunga, ma non molto interessante dal punto di vista geometrico; sicché, per brevità, qui l'ometteremo.

La proprietà di generazione finita fornisce un altro carattere, di un anello $H(t)$, che risulta manifestamente invariante rispetto all'associazione. Ogni insieme generatore di $H(t)$ definisce un intero, il numero di elementi nell'insieme. Designiamo come *dimensione, l , dell'anello $H(t)$* il più piccolo dei numeri così associati ai vari insiemi generatori di $H(t)$. Pertanto, se l'insieme $P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)$ genera $H(t)$, risulta evidentemente $N \geq l$. Possiamo stabilire che:

Ogni insieme generatore di $H(t)$ contiene un sottoinsieme di l elementi generante $H(t)$.

Sia $P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)$ un insieme generatore di $H(t)$. Se $N = l$, il risultato è senz'altro chiaro. Se $N > l$, sia $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_l(t)$ un insieme generatore di $H(t)$ contenente, quindi, l elementi. Si avrà allora

$$(4) \quad P_i(t) = \sum_{j=1}^l a_{ij} Q_j(t) + \sum_{(i)} \alpha_{i_1 \dots i_l}^{(i)} Q_1^{i_1}(t) \dots Q_l^{i_l}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

e

$$(5) \quad Q_j(t) = \sum_{i=1}^N b_{ji} P_i(t) + \sum_{(j)} \beta_{j_1 \dots j_N}^{(j)} P_1^{j_1}(t) \dots P_N^{j_N}(t) \quad (j = 1, 2, \dots, l),$$

ove, nella seconda somma della (4) e della (5), le i e le j sono interi non negativi soddisfacenti alle $i_1 + i_2 + \dots + i_l \geq 2$, e $j_1 + j_2 + \dots + j_N \geq 2$. Poiché $N > l$, esistono elementi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ di K , non tutti nulli, tali che

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i a_{ij} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, l).$$

Pertanto

$$(6) \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i P_i(t) = \sum_{(i)} \gamma_{i_1 \dots i_N} P_1^{i_1}(t) \dots P_N^{i_N}(t),$$

ove nel secondo membro si somma rispetto agli interi i non negativi soddisfacenti alla $i_1 + i_2 + \dots + i_N \geq 2$. Poiché le λ_i non sono tutte nulle, non è restrittivo supporre che sia $\lambda_N \neq 0$; si può dunque risolvere formalmente la relazione

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i = \sum_{(i)} \gamma_{i_1 \dots i_N} x_1^{i_1} \dots x_N^{i_N}$$

rispetto alla x_N , ottenendo una serie formale di potenze in x_1, x_2, \dots, x_{N-1} . La (6) mostra allora che $P_N(t)$ è un elemento di $K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_{N-1}(t)\}$; ne consegue la

$$K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\} = K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_{N-1}(t)\},$$

sicché $P_1(t), P_2(t), \dots, P_{N-1}(t)$ è un insieme generatore di $H(t)$. Applicando opportunamente questo procedimento $N - l$ volte, otteniamo il risultato richiesto.

Poggiando sul risultato suddetto, e sulle osservazioni fatte alla fine del lavoro C. A., si può stabilire il teorema seguente.

TEOREMA III. — *Siano O e O' rispettivamente le origini dei rami algebroidi Γ e Γ' negli spazi affini A_N e A_M , di dimensioni N e M ($N \geq M$). Γ e Γ' generano anelli associati se, e soltanto se, A_M può immergersi in un A'_N in modo che esista una trasformazione T , di A_N in A'_N , che muti O in O' e sia biregolare negli intorni di questi punti.*

Ne risulta che ciascuna proprietà di un anello completo, invariante rispetto all'associazione, è altresì una proprietà dei rami algebroidi invariante rispetto alle trasformazioni regolari. Diremo che due rami sono *regolarmente equivalenti* quando essi generano anelli associati.

3. Abbiamo visto nel n. 1 che il semigruppato di un anello risulta invariante rispetto all'associazione; ciò fornisce un insieme di interi che porge una classificazione degli anelli.

DEFINIZIONE IV. - Sia $W = \{0, \nu_1, \nu_2, \dots\}$ un semigruppato di interi non negativi. Posto $\eta_1 = \nu_1$, si denoti con η_i il più piccolo elemento di W che non possa scriversi nella forma $\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \eta_j$, ove le α_i siano interi non negativi. Gli interi η_1, η_2, \dots , così definiti, si chiameranno i *caratteri di W* ⁽⁶⁾. Se Γ genera $H(t)$ i caratteri di $W(H)$ si diranno i *caratteri di $H(t)$* , ed anche i *caratteri di Γ* .

Osserviamo che il *numero dei caratteri di W risulta finito, e non maggiore di ν_1* ; inoltre, se il semigruppato W ha k caratteri, esso consiste precisamente degli interi della forma $\sum_{j=1}^k \alpha_j \eta_j$, ove le α_j designano interi non negativi.

Applicando ad un anello $H(t)$ un procedimento analogo a quello della Def. 4, giungeremo alla

DEFINIZIONE V. - Sia $W(H) = \{0, \nu_1, \nu_2, \dots\}$ il semigruppato di $H(t)$. Si definisce allora una successione di elementi, $P_1(t), P_2(t), \dots$, di $H(t)$ nel modo seguente. $P_1(t)$ sia anzitutto un qualunque elemento avente ordine $\chi_1 = \nu_1$; in guisa ricorrente, $P_i(t)$ denoti un elemento di ordine χ_i , ove χ_i sia il primo elemento di $W(H)$ che non appartenga a $W(K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_{i-1}(t)\})$. L'insieme di elementi $P_1(t), P_2(t), \dots$ verrà detto una *base di $H(t)$* .

Si vede, senza difficoltà, che *gli ordini degli elementi di una base di $H(t)$ risultano sempre caratteri di $H(t)$* . Il numero di elementi di una base è quindi finito, e non maggiore di $\nu_1 = \chi_1$. Si può inoltre mostrare che *il numero di elementi di una base di un anello uguaglia la dimensione dell'anello*. Vale anzi il seguente più profondo

TEOREMA IV. - *Gli ordini degli elementi di una base di $H(t)$ non dipendono dalla base.*

Ne risulta che ogni base di $H(t)$ fornisce uno stesso insieme di ordini; e ne deriva un nuovo insieme di numeri, associato ad un anello a norma della seguente

DEFINIZIONE VI. - Se $P_1(t), P_2(t), \dots, P_l(t)$ denota una qualunque base di $H(t)$, posto $O\{P_i(t)\} = \chi_i$, diremo che $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l$ sono i *caratteri base di $H(t)$* . Del pari, se Γ è un ramo generante $H(t)$, chiameremo $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l$ i *caratteri base di Γ* .

Notiamo che, se $H(t)$ e $H'(t)$ sono associati, se $P_1(t), P_2(t), \dots, P_l(t)$ è una base di $H(t)$ e $P'_i(t)$ è l'immagine di $P_i(t)$ in $H'(t)$, allora $P'_1(t), P'_2(t), \dots, P'_l(t)$ risulta una base di $H'(t)$. Ne consegue che *i caratteri base di $H(t)$ risultano invarianti rispetto all'associazione*, e che *i caratteri base di Γ risultano invarianti rispetto all'equivalenza regolare*.

(6) Questi caratteri, ed i caratteri base della Def. VI, differiscono da quelli introdotti in C. A. sotto tali nomi; questi ultimi appariranno nel n. 5 della Nota II, coi nomi di caratteri canonici e caratteri base canonici.

Geometria. — *Sui ricoprimenti finiti della superficie sferica.*
Nota di DAVIDE CARLO DEMARIA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Sia R_n un ricoprimento della sfera ⁽¹⁾ mediante n insiemi chiusi (n intero positivo qualunque), chiamiamo $\text{diam } R_n$ il massimo μ della distanza sferica — assunto il raggio unitario — tra due punti godenti della proprietà di appartenere ad uno stesso insieme del ricoprimento R_n ($0 < \delta \leq \pi$).

B. Segre, detta C_n la classe dei ricoprimenti R_n , ha posto — nel corso di lezioni tenuto nell'anno accademico 1954-55 presso l'« Istituto Nazionale di Alta Matematica » — il problema di determinare il numero $\vartheta(n)$, estremo inferiore di μ , allorché R_n descriva la classe C_n ⁽²⁾.

Il problema stesso è stato risolto (da B. Segre) per i seguenti valori particolari di n ⁽³⁾:

$$\vartheta(1) = \vartheta(2) = \vartheta(3) = \pi \quad ; \quad \vartheta(4) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);$$

cui si devono ora aggiungere quelli stabiliti nel n. 6 della presente Nota:

$$\vartheta(5) = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \vartheta(6) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \quad ; \quad \vartheta(8) = \frac{\pi}{2}.$$

A tal fine, pogeremo sul seguente teorema (dimostrato nei nn. 1-4), in certa guisa analogo al noto teorema di Lusternik-Schnirelmann-Borsuk nel caso della sfera ordinaria e non privo in sé di qualche interesse:

Sia R_n (n intero qualunque) un ricoprimento della sfera mediante n insiemi chiusi; allora o esiste almeno un punto P appartenente a tre insiemi distinti, o esiste almeno un insieme di R_n contenente una coppia di punti antipodali.

Rileviamo che, per la validità del teorema, è essenziale che il ricoprimento sia formato da un numero finito di insiemi chiusi. Infatti esistono ricoprimenti della sfera mediante un'infinità numerabile di insiemi chiusi a tre a tre disgiunti e privi di coppie di punti antipodali, come mostra l'esempio seguente.

Sia R_4 il ricoprimento che si ottiene proiettando dal centro della sfera sulla superficie sferica le facce del tetraedro regolare inscritto, i cui vertici denotiamo con P_1, P_2, P_3, P_4 . Ognuna delle quattro facce senza il contorno può venir ricoperta con una infinità numerabile di insiemi chiusi a tre a tre non aventi punti in comune; se si considerano inoltre i due insiemi chiusi

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Qui ed in seguito diciamo brevemente sfera invece di superficie sferica.

(2) Cfr. B. SEGRE, *Forme differenziali II*, in corso di stampa, Roma, n. 109; B. SEGRE, *Recouvrements de sphères et correspondances entre variétés topologiques*, « C.B.R.M. », Liège, 1955, n. 1. Il prof. Segre trattò pure analogo problema per una qualunque r -sfera.

(3) B. SEGRE, *Forme differenziali II*, n. 112.

formati dai lati $P_1 P_2, P_1 P_3, P_1 P_4$ e dai lati $P_2 P_3, P_3 P_4, P_4 P_2$, si ottiene un ricoprimento soddisfacente alle condizioni volute.

I valori di $\mathfrak{D}(n)$ sopra riportati sono ottenuti, nel n. 6, usufruendo inoltre di questa semplice idea (che già trovasi nelle ricerche di B. Segre ⁽⁴⁾): se per ogni ricoprimento R_n vi è almeno una coppia di punti appartenenti ad uno stesso insieme ed aventi distanza d , allora risulta $\mathfrak{D}(n) \geq d$.

1 ⁽⁵⁾. Sia R_n (n intero positivo qualunque) un ricoprimento della sfera ordinaria mediante gli insiemi chiusi I_1, I_2, \dots, I_n ; tale che:

$$I_i \cap I_j \cap I_k = \emptyset \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n; i \neq j \neq k);$$

ad esso associamo il ricoprimento \bar{R} che si ottiene dal precedente decomponendo ogni insieme I_k in ogni sua componente connessa: $I_{k\alpha}, I_{k\beta}, \dots$ ⁽⁶⁾.

PROPRIETÀ DEL RICOPRIMENTO \bar{R} .

A_1 : Ogni insieme $I_{r\lambda}$ è chiuso e connesso, e $fI_{r\lambda} \subset fI_r$.

A_2 : $I_x \cap I_y \cap I_z = \emptyset$ ($x, y, z = 1\alpha, 1\beta, \dots; 2\alpha, 2\beta, \dots; n\alpha, n\beta, \dots; x \neq y \neq z$).

Infatti, se i primi indici delle I sono tutti e tre diversi, la A_2 è ovvia; se vi sono due dei primi indici uguali, la A_2 segue dalla definizione di \bar{R} .

A_3 : Se $P \in fI_{r\lambda}$, P appartiene a due e due soli insiemi distinti.

Infatti $P \in I_r$, per la A_1 , e $P \in I_1 \cup \dots \check{I}_r \dots \cup I_n$, perché P è punto della frontiera di I_r e perché l'insieme $I_1 \cup \dots \check{I}_r \dots \cup I_n$ è chiuso.

Inoltre, per la A_2 , P non può appartenere a tre insiemi distinti.

A_4 : Se $P \in fI_{r\lambda}$, per la A_3 $P \in I_{s\mu}$ ($s \neq r$), e se C è la componente di $fI_{r\lambda}$ connessa con P , allora $C \subset I_{s\mu}$.

Esistano, per assurdo, dei punti Q , tali che $Q \in C, Q \in I_s$.

Potremo allora dividere i punti $P \in C$ nei due insiemi C_1 e C_2 :

$$P \in C_1, \quad \text{se } P \in I_s;$$

$$P \in C_2, \quad \text{se } P \in I_1 \cup \dots \check{I}_r \dots \check{I}_s \dots \cup I_n.$$

(4) B. SEGREG, *Forme differenziali II*, n. 109.

(5) In questo numero e nei successivi useremo le seguenti notazioni:

fI = frontiera dell'insieme I ,

cI = insieme complementare dell'insieme I ,

P' = antipodo del punto P ,

I' = immagine antipodale dell'insieme I (vale a dire insieme dei punti P' tali che $P \in I$),

\emptyset = insieme vuoto,

$I_1 \cup \dots \check{I}_r \dots \cup I_n = I_1 \cup I_2 \dots \cup I_{r-1} \cup I_{r+1} \cup I_n$.

(6) Il ricoprimento \bar{R} è univocamente determinato da R_n , in quanto un insieme chiuso (della sfera) può decomporre in un solo modo nelle sue componenti connesse a due a due disgiunte, vale a dire in continui e punti isolati. Cfr. U. RICHARD, *Teoria delle funzioni*, Cap. 3, 41; « Ist. Mat. Politecnico », Torino.

C_1 e C_2 sono insiemi non vuoti e chiusi, e perciò non disgiunti; esisterà dunque un punto $R \in C_1 \cap C_2$, onde seguirà l'assurdo:

$$R \in I_{r\lambda} \quad , \quad R \in I_s \quad , \quad R \in I_x \quad (x=1, 2, \dots, n; x \neq r \neq s).$$

Quindi $C = C_1 \subset I_s$. Inoltre, poiché C è connesso, non possono esistere in C punti $Q \in I_{s\lambda} \neq I_{s\mu}$; epperò:

$$C \subset I_{s\mu} \quad (c. d. d.).$$

A_5 : Se $P, Q \in I_{r\lambda}$, $P \in I_{s\mu}$, $Q \in I_{s\mu}$; allora esisterà almeno un punto R tale che:

$$R \in fI_{s\mu} \quad , \quad R \in I_{r\lambda}.$$

Consideriamo i due insiemi chiusi e non vuoti:

$$A = I_{r\lambda} \cap I_{s\mu} \quad , \quad B = I_{r\lambda} \cap (fI_{s\mu} \cup cI_{s\mu}).$$

Per essi risulta $A \cap B = I_{r\lambda} \cap fI_{s\mu}$.

D'altra parte $A \cap B \neq \emptyset$, perché $A \cup B = I_{r\lambda}$ ed inoltre $I_{r\lambda}$ è connesso.

OSSERVAZIONE. — Per la validità della A_5 , basta che $I_{r\lambda}$ sia un qualunque insieme chiuso connesso e $I_{s\mu}$ un insieme chiuso qualsiasi.

A_6 : Per ogni punto P della sfera si può definire un insieme chiuso $S(P)$, riunione di opportuni $I_{r\lambda}$, tale che P risulti interno a questo.

Sono soltanto possibili i due casi seguenti:

a) P appartiene al solo insieme $I_{r\lambda}$.

Posto $S(P) = I_{r\lambda}$, P è punto interno in forza della A_3 .

b) P appartiene ad $I_{r\lambda}$ ed a $I_{s\mu}$.

Assunto $S(P)$ eguale alla componente connessa di $I_r \cup I_s$ contenente P , il punto P è interno ad $S(P)$, perché altrimenti P sarebbe pure punto di accumulazione di un I_h ($h \neq r \neq s$) ed apparterrebbe perciò a tre insiemi. Questo è assurdo (A_2).

OSSERVAZIONI:

A_6' : Nel caso b) si ha $fS(P) \subset I_1 \cup \dots \checkmark_r \dots \checkmark_s \dots \cup I_n$, in quanto $fS(P) \subset f(I_r \cup I_s)$.

A_6'' : Se $P, Q \in I_{r\lambda} \cap I_{s\mu}$, si ha $S(P) = S(Q)$.

Perciò si potrà definire $S(I_{r\lambda} \cap I_{s\mu}) = S(P)$, e tutti i punti di $I_{r\lambda} \cap I_{s\mu}$ saranno punti interni di $S(P)$.

2. Sia A un insieme chiuso e connesso di diametro $d < \pi$, e sia \mathfrak{A} la componente connessa di cA , contenente P' , antipodo di $P \in A$, chiameremo copertura di A l'insieme $A^* = c\mathfrak{A}$.

L'insieme \mathfrak{A} e quindi A^* sono univocamente determinati da A , in quanto $\mathfrak{A} \supseteq A'$: infatti $A' \subseteq cA$ ed A' è connesso.

PROPRIETÀ DELLA COPERTURA A^* DELL'INSIEME A .

B_1 : A^* è un insieme chiuso.

B_2 : $A^* \supseteq A$.

Infatti $\mathcal{A} \subseteq cA$.

B_3 : $fA^* \subseteq fA$.

Infatti $fA^* = f\mathcal{A} \subseteq fcA = fA$.

B_4 : $\text{diam } A^* < \pi$.

Se in A^* vi fossero, per assurdo, coppie di punti antipodali, allora in A^* vi sarebbe pure la coppia P, P' tale che $P \in fA^* \subseteq fA \subset A$, $P' \in A'$.

Questo è assurdo, perché $A' \cap A^* = \emptyset$.

B_5 : $\text{diam } A^* = \text{diam } A = d$.

Dalla B_2 si ha $\text{diam } A^* \geq \text{diam } A$, e dalla B_4 $\text{diam } A^* = \text{diam } fA^*$; ne consegue l'asserto, in quanto dalla B_3 si deduce $\text{diam } fA^* \leq \text{diam } fA = \text{diam } A$.

B_6 : A^* è connesso.

Basta osservare che due punti $P, Q \in fA^* \subseteq fA$, sono concatenati in A , e quindi anche in A^* .

B_7 : fA^* è connessa.

Altrimenti, essendo \mathcal{A} connesso, sarebbe possibile dividere A^* in due insiemi chiusi disgiunti.

B_8 : Se $fA \subseteq B$ ed inoltre $(\text{diam } A, \text{diam } B) < \pi$, allora $A^* \subseteq B^*$.

Altrimenti per A_5 esisterebbe un punto $R \in fA^*$, tale che $R \notin B^*$; e questo è assurdo, essendo $R \in fA^* \subseteq fA \subseteq B \subseteq B^*$.

B_9 : $(A^*)^* = A^*$.

Dalla B_2 si trae $A^* \subseteq (A^*)^*$; poiché $fA^* \subseteq fA \subseteq A$, dalla B_8 si ha $(A^*)^* \subseteq A^*$.

B_{10} : $[f(A^*)]^* = A^*$.

Poiché $f[f(A^*)] \subset A$, si ottiene $[f(A^*)]^* \subseteq A^*$; poiché $f(A^*) = fA^*$, risulta $(A^*)^* = A^* \subset (fA^*)^*$.

3. Consideriamo ora la copertura degli insiemi $I_{r\lambda}$ tali che $\text{diam } I_{r\lambda} < \pi$.

Valgono i seguenti lemmi:

LEMMA 1. - Se $P \in I_{r\lambda}^*$ e $P \in fI_{s\mu}^*$, allora $I_{s\mu}^* \subseteq I_{r\lambda}^*$.

Infatti:

a) Se $fI_{r\lambda}^* \cap fI_{s\mu}^* = \emptyset$, per le B_7 e A_5 si ottiene $fI_{s\mu}^* \subset I_{r\lambda}^*$; e per le B_8 e B_9 risulta $I_{s\mu}^* \subset I_{r\lambda}^*$.

b) Se $fI_{r\lambda}^* \cap fI_{s\mu}^* \neq \emptyset$, per le A_4 e B_7 si trae $fI_{r\lambda}^* \subset I_{s\mu}^*$, $fI_{s\mu}^* \subset I_{r\lambda}^*$; e quindi per le B_8 e B_9 si ha $I_{r\lambda}^* = I_{s\mu}^*$.

LEMMA 2. - Se $I_{r\lambda}^* \cap I_{s\mu}^* \neq \emptyset$, o $I_{r\lambda}^* \subseteq I_{s\mu}^*$ o $I_{s\mu}^* \subseteq I_{r\lambda}^*$.

In quanto per la A_5 esisterà un punto della frontiera di un insieme appartenente all'altro insieme.

Passando alla copertura degli $S(P)$, occorre distinguere i due casi:

a) $S(P) = I_{r\lambda}$.

Se $\text{diam } I_{r\lambda} < \pi$, allora è ovvio che: $S^*(P) = I_{r\lambda}^*$.

b) $S(P) \equiv$ componente connessa di $I_r \cup I_s$ contenente P .

Se $(\text{diam } I_r, \text{diam } I_s) < \pi$, allora $S^*(P) = I_{x\varphi}^*$, ove $I_{x\varphi}$ è un ben determinato insieme appartenente a $S(P)$.

Cominciamo col mostrare che, nelle suddette condizioni, si ha:

$$\text{diam } S(P) < \pi.$$

Esista in $S(P)$, per assurdo, una coppia X, X' di punti antipodali, sicché per esempio $X \in I_{r\lambda}, X' \in I_{s\mu}$. Poiché $X \in I_{r\lambda} \subseteq I_{r\lambda}^*, X \in I_{s\mu}^* \subseteq I_{s\mu}^*$, si ha $I_{r\lambda} \cap I_{s\mu}^* \neq \emptyset$.

Ora, se $fI_{r\lambda}^* \cap fI_{s\mu}^* \neq \emptyset$, esisterà un punto R tale che:

$$R \in fI_{r\lambda}^* \subseteq fI_{r\lambda}, \quad R \in fI_{s\mu}^* \subseteq I_{s\mu}'.$$

Se, invece, $fI_{r\lambda}^* \cap fI_{s\mu}^* = \emptyset$, sarà per la A_5 o $fI_{r\lambda}^* \subseteq I_{s\mu}^*$ o $fI_{s\mu}^* \subseteq I_{r\lambda}^*$; a seconda che si abbia per $Q \in fI_{r\lambda}^*$, o $Q \in I_{s\mu}^*$ o $Q \in I_{s\mu}^*$.

Sia, ad esempio, $fI_{r\lambda}^* \subseteq I_{s\mu}^*$. Innanzitutto $X \in I_{r\lambda} \subseteq I_{r\lambda}^*, X \in I_{s\mu}^*$; inoltre esisterà un punto Y tale che $Y \in I_{r\lambda}^*, Y \in fI_{s\mu}^* \subseteq I_{s\mu}'$; quindi per la A_5 , anche in questo caso, esisterà un punto R :

$$R \in fI_{r\lambda}^* \subseteq fI_{r\lambda}, \quad R \in I_{s\mu}'.$$

Per la A_4 , $fI_{r\lambda}^* \subseteq I_z$ ($z = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n$); facciamo vedere che tutti e due i casi possibili $z = s, z \neq s$ conducono ad assurdo.

a) $z = s$.

In questo caso si avrebbe $R \in I_s, R' \in I_s$; contro l'ipotesi $\text{diam } I_s < \pi$.

b) $z \neq s$.

Costruiamo l'insieme $S(fI_{r\lambda}^*) \subseteq I_r \cup I_z$.

Per l' $A_{6'}$, si ha $\text{dist}(I_{r\lambda}^*, I_s \cap fI_{r\lambda}^*) > 0$, e d'altra parte gli insiemi $I_{r\psi} \subseteq S(fI_{r\lambda}^*)$ ed $I_{r\lambda}$ sono a due a due disgiunti; ne segue che $I_{r\lambda}$ e $I_{s\mu}$ appartengono a parti tra loro non concatenate dell'insieme $I_r \cup I_s$, contro la definizione di $S(P)$. Si ha pertanto che l'ipotesi fatta è assurda, epperò $\text{diam } S(P) < \pi$.

Il risultato precedentemente stabilito ci permette di costruire $S^*(P)$. Osservando che $f[S^*(P)] \subseteq f(I_r \cup I_s)$, per la A_4 si ha:

$$f[S^*(P)] \subseteq I_{x\varphi} \subseteq S(P) \quad (\text{o } x=r, \text{ o } x=s);$$

e per il Lemma 1 si ottiene:

$$I_{x\varphi}^* = S^*(P) \quad (\text{c. d. d.}).$$

Inoltre l'insieme $I_{x\varphi}$ è unico per la $A_{6'}$.

OSSERVAZIONE. — $\text{diam } S^*(P) = \text{diam } I_{x\varphi} \leq \max(\text{diam } I_r, \text{diam } I_s)$.

4. TEOREMA. — Sia R_n (n intero positivo) un ricoprimento della sfera ordinaria tale che:

$$I_i \cap I_j \cap I_k = \emptyset \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n; i + j + k = n);$$

allora esisterà un I_r contenente almeno una coppia di punti antipodali.

Sia, per assurdo, $\max (\text{diam } I_1, \text{diam } I_2, \dots, \text{diam } I_n) = d < \pi$. Possiamo allora associare ad ogni punto P della sfera l' $S^*(P)$ ($\text{diam } S^*(P) \leq d$); abbiamo in tal modo una copertura della sfera, in quanto ogni $S^*(P)$ contiene un aperto contenente P .

Per il teorema di Borel, si può estrarre un numero finito di insiemi S^* : $S_1^*, S_2^*, \dots, S_m^*$ ricoprenti la sfera.

Osservando che nessuna delle S_i^* precedenti è disgiunta da tutte le altre, per il lemma 2, esisterebbe una S_h^* ricoprente tutta la sfera; ma questo è assurdo, perché $\text{diam } S_h^* \leq d < \pi$.

COROLLARIO. - *Se un ricoprimento R_n della sfera ha diametro minore di π , allora deve esistere almeno un punto comune a tre insiemi distinti.*

5. **TEOREMA.** - *Siano P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 3$) n punti distinti della sfera, e sia $d(n) = \min (P_r P_s)$ ($r, s = 1, 2, \dots, n$; $r \neq s$); allora $\vartheta(n+2) \geq d(n)$.*

Innanzitutto $d(n) \leq 2\pi/3$, perché $\text{ext sup } d(n) \leq \text{ext sup } d(3) = 2\pi/3$ ⁽⁷⁾.

Poiché $d(n) < \pi$, così - a norma del corollario del num. 4 - basterà considerare ricoprimenti R_{n+2} in cui esista un punto P comune a tre insiemi.

Sia $P_i P_j = d(n)$; ruotiamo la sfera sino a far coincidere P_i con P e consideriamo la frontiera della calotta C di centro P e di raggio $d(n)$, si ha:

$$\text{diam } fC = d' \geq d(n);$$

infatti:

$$\text{a) se } d(n) \leq \pi/2, \quad d' = 2d(n) > d(n);$$

$$\text{b) se } \pi/2 < d(n) \leq 2\pi/3, \quad d' = 2(\pi - d(n)) \geq 2\pi/3 \geq d(n).$$

Pertanto, se fC appartiene ad un solo insieme I_h del ricoprimento R_{n+2} , si ottiene:

$$\text{diam } R_{n+2} \geq \text{diam } I_h \geq d' \geq d(n).$$

Se, invece, fC è ricoperto da due o più insiemi, esisterà un punto $Q \in fC$, comune a due insiemi, ed allora con una rotazione lasciando fisso P , si potrà far coincidere P_j con Q .

Ma, in questo caso, esisterà una coppia di punti distinti P_r e P_s , appartenente ad uno stesso insieme I_x , in quanto degli $n+2$ insiemi, tre contengono P_i , due contengono P_j ed i punti P sono in numero di n . Perciò si ha:

$$\text{diam } R_{n+2} \geq \text{diam } I_x \geq d(n).$$

Queste considerazioni valgono per ogni R_{n+2} , il cui diametro sia minore di π , epperò:

$$\vartheta(n+2) \geq d(n) \quad (\text{c. d. d.}).$$

(7) Il massimo valore di $d(3)$ si ha quando P_1, P_2, P_3 sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio massimo della sfera.

COROLLARIO. — Se indichiamo con $\delta(n)$, l'estremo superiore della classe limitata dei numeri $d(n)$ ($0 < d(n) \leq 2\pi/3$), abbiamo:

$$\vartheta(n+2) \geq \delta(n).$$

Per $n = 3$, e per n eguale al numero dei vertici dei poliedri regolari, si può assumere per $d(n)$ la lunghezza sferica del lato del poliedro regolare corrispondente ed il teorema precedente fornisce i seguenti confini inferiori di $\vartheta(n+2)$:

$$\vartheta(5) \geq \frac{2\pi}{3}$$

$$\vartheta(6) \geq \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\vartheta(8) \geq \frac{\pi}{2}$$

$$\vartheta(10) \geq \arccos \frac{1}{3}$$

$$\vartheta(14) \geq \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\vartheta(22) \geq \arccos \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

6. Stabiliremo ora un confine superiore per $\vartheta(n)$ nei primi tre casi; all'uopo premettiamo un'osservazione.

Consideriamo il fuso sferico U (i cui vertici denotiamo con P e P') di ampiezza $\pi/2$ e la calotta V di centro P e di raggio $\rho \geq \pi/2$; chiamiamo Q ed R i punti d'intersezione tra i due lati del fuso U e la frontiera della calotta V .

Vogliamo mostrare che *il diametro dell'insieme* $A = U \cap V$ *è uguale a* ρ . Basterà calcolare il diametro di fA , formato dai tre archi \widehat{PQ} , \widehat{QR} , \widehat{RP} ; cioè valutare il massimo della distanza ST , essendo S, T punti distinti qualunque di fA .

a) S, T siano punti appartenenti ad uno stesso arco.

Allora $\max ST = \max(PQ, QR, RP) = \rho$.

b) $S \in \widehat{PQ}$, $T \in \widehat{PR}$.

Sia $PS = a$ ($0 \leq a \leq \rho$), $PT = b$ ($0 \leq b \leq \rho$); allora $ST = \arccos[\cos a \cos b]$. La funzione a secondo membro, quando a e b variano nel dominio indicato, raggiunge il massimo per $a = 0, b = \rho$; oppure per $a = \rho, b = 0$; ed in tal caso si ha $ST = \rho$.

c) $S \in \widehat{PQ}$, $T \in \widehat{QR}$.

Sia $PS = a$ ($0 \leq a \leq \rho$), $\widehat{SPT} = \gamma$ ($0 \leq \gamma \leq \pi/2$); allora si ottiene $ST = \arccos(\cos \rho \cos a + \sin \rho \sin a \cos \gamma)$.

La funzione a secondo membro è massima, variando a e γ negli intervalli indicati, per $a = 0, \gamma$ a piacere; ed in tal caso si ha $ST = \rho$. Pertanto:

$$\text{diam } A = \text{diam } fA = \rho \quad (\text{c. d. d.}).$$

Stabiliamo ora un confine inferiore per $\vartheta(5)$, $\vartheta(6)$, $\vartheta(8)$.

I) Fissata una coppia di punti antipodali O, O' , conduciamo per essi due cerchi massimi mutuamente ortogonali; abbiamo diviso, in tal modo, la superficie sferica in quattro fusi di vertici O, O' e di ampiezza $\pi/2$. Consideriamo il seguente R_5 :

I_1, I_2, I_3, I_4 siano i quattro insiemi ottenuti intersecando la calotta di centro O e di raggio $2\pi/3$, con i quattro fusi sferici testè costruiti; I_5 sia la calotta di centro O' e di raggio $\pi/3$.

Per quanto visto precedentemente si ricava:

$$\text{diam } I_1 = \text{diam } I_2 = \dots = \text{diam } I_5 = \frac{2\pi}{3};$$

e perciò:

$$\vartheta(5) \leq \frac{2\pi}{3}.$$

II) $L'R_6$ sia ottenuto proiettando sulla sfera le facce del cubo inscritto. Osservando che la calotta circoscritta ad ogni faccia ha diametro eguale alla distanza tra due vertici opposti di una stessa faccia e che tali punti sono pure vertici di un tetraedro regolare inscritto nella sfera, si ha:

$$\text{diam } I_1 = \text{diam } I_2 = \dots = \text{diam } I_6 = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right);$$

epperò:

$$\vartheta(6) \leq \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

III) Partendo dall'ottaedro regolare inscritto (cfr. II), si ha per l'osservazione precedente:

$$\text{diam } I_1 = \text{diam } I_2 = \dots = \text{diam } I_8 = \frac{\pi}{2};$$

eppertanto:

$$\vartheta(8) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Confrontando i risultati di questo numero con quelli del precedente si ottiene:

$$\vartheta(5) = \frac{2\pi}{3},$$

$$\vartheta(6) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right),$$

$$\vartheta(8) = \frac{\pi}{2}.$$

Inoltre, per il corollario del n. 5, si ha:

$$\delta(4) = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right),$$

$$\delta(6) = \frac{\pi}{2}.$$

Geometria. — *Alcune osservazioni sopra le varietà i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati.* Nota di DIONISIO GALLARATI ^(*), presentata dal Socio B. SEGRE.

1. In questa Nota mi occupo delle varietà V_k dello spazio S_r , i cui S_k tangenti segano su alcuni spazi assegnati degli spazi di dimensione superiore a quella che si ha per una V_k generica.

Tra i casi speciali di siffatte varietà, già esaminati da vari Autori, ci sono le superficie i cui piani tangenti si appoggiano ad una retta fissa, le quali si identificano con le superficie costituite da ∞^1 curve piane situate in piani passanti per quella retta; esse godono di molteplici interessanti proprietà che sono state rilevate da E. Bompiani ⁽¹⁾, G. Scorza ⁽²⁾, B. Segre ⁽³⁾, A. Terracini ⁽⁴⁾. In particolare, le superficie suddette appartenenti ad un S_4 sono state considerate incidentalmente da G. Gherardelli ⁽⁵⁾, il quale, ricercando i sistemi lineari di curve algebriche appartenenti ad una superficie algebrica per i quali avvenga che le jacobiane delle reti estratte costituiscano da sole un sistema lineare, è stato condotto al problema della determinazione delle superficie di S_r i cui piani tangenti appartengano al massimo numero possibile di complessi lineari linearmente indipendenti di piani di S_r . Egli osserva che queste superficie — con successive proiezioni da punti appartenenti ad esse — si proiettano in superficie F di S_4 i cui piani tangenti appartengono ad una rete di complessi lineari di piani contenente almeno un complesso lineare speciale; e cioè, appunto, i piani tangenti di F devono essere incidenti ad una retta fissa ⁽⁶⁾.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) E. BOMPIANI, *Sistemi coniugati sulle superficie degli iperspazi*, « Rend. Palermo », XLVI, pp. 91-104 (1921).

(2) G. SCORZA, *Un problema sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Rend. Ist. Lombardo » (2), 41, pp. 913-920 (1908).

(3) B. SEGRE, *Una proprietà di certi spazi di Veblen ed alcune estensioni al campo differenziale della nozione di birapporto*, « Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari », Pavia, pp. 5-26 (1936).

(4) A. TERRACINI, *Su due problemi, concernenti la determinazione di alcune classi di superficie, considerati da G. Scorza e da F. Palatini*, « Atti Soc. Naturalisti e Matematici di Modena », serie V, vol. VI (1921); *Sulle superficie i cui spazi osculatori presentano particolari incidenze con i piani tangenti o fra loro*, id., 1922.

(5) G. GHERARDELLI, *Sul sistema jacobiano di un sistema lineare di curve sopra una superficie algebrica*, « Rend. Acc. d'Italia », (7), 3 (1942).

(6) Delle V_k di S_r i cui S_k tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari linearmente indipendenti di S_k di S_r , mi sono occupato in una Nota recente (« Rend. Lincei » (8), 15, pp. 11-15 (1953); ma solo dopo la pubblicazione di tale Nota sono venuto a conoscenza della Memoria di G. Gherardelli. Ed anzi, mentre io non sono riuscito ad ottenere che risultati parziali, G. Gherardelli, limitatamente al caso $k=2$, spinge più innanzi la ricerca determinando tutte le superficie appartenenti al massimo numero di complessi lineari, linearmente indipendenti, di piani.

Le superficie di S_4 i cui piani tangenti si appoggiano a due rette sghembe si incontrano ad esempio nella rappresentazione del piano complesso sull' S_4 reale: è ben noto che condizione necessaria e sufficiente affinché una superficie di S_4 - avente in ogni punto piano tangente - sia una superficie caratteristica, è che i suoi piani tangenti siano piani caratteristici; e cioè siano piani le cui rette improprie appartengano ad una congruenza lineare ellittica K dell'iperpiano all'infinito dell' S_4 ⁽⁷⁾.

Altre questioni che in qualche modo rientrano in tale ordine di idee sono state trattate da U. Morin ⁽⁸⁾, L. Muracchini ⁽⁹⁾, G. Scorza ⁽¹⁰⁾.

I risultati che qui ottengo sull'argomento troveranno applicazione in una Nota successiva dedicata alle superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggiano ad alcuni piani assegnati. In vista di ciò, ho anche qui incluso alcune semplici osservazioni relative alle superficie di S_4 i cui piani tangenti sono incidenti a rette date.

2. È noto che ⁽¹¹⁾: *condizione necessaria e sufficiente affinché gli S_k tangenti di una V_k di S_r si appoggino ad un dato S_b secondo spazi S_a , è che V_k consti di $\infty^{k-a-1} V_{a+1}$ contenute in spazi lineari di dimensione $b+1$ passanti pel dato S_b .*

Osserviamo allora che:

1° È immediato constatare che il teorema ora enunciato è equivalente alla seguente proposizione: *Il cono proiettante una V_k differenziabile di un S_r proiettivo da un S_b di S_r ($b \leq r$) ha la stessa dimensione dello spazio congiungente tale S_b col generico S_k tangente di V_k .*

2° Sia V_k una varietà i cui S_k tangenti abbiano a comune un S_a con un dato S_b ($-1 \leq a \leq b$), e denotiamo con Σ la congruenza (d'indice positivo) costituita dalle V_{a+1} esistenti su V_k ed appartenenti a spazi S_{b+1} passanti per l' S_b , e con W_{k+b-a} il cono proiettante V_k dall' S_b . Gli S_k tangenti a V_k nei punti di una delle V_{a+1} di Σ sono contenuti in uno stesso S_{k+b-a} ,

(7) B. SEGRE, *Sobre algunas representaciones del plano complejo*, « Revista Hispano-Americana », 1928, p. 137; cfr. anche: B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, Corsi dell'Ist. Naz. di Alta Matem., Docet, Edizioni Universitarie, Roma 1951; F. SEVERI, *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*, « Rend. Sem. Matem. Univ. Roma » (1930-31); E. MARTINELLI, *Sulle funzioni poligene di due variabili complesse*, « Mem. Acc. d'Italia », 8, pp. 65-124 (1937).

(8) U. MORIN, *Sui sistemi di piani a due a due incidenti*, « Atti Ist. Veneto », 89, Parte II; pp. 907-926 (1929-30).

(9) L. MURACCHINI, *Le varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria*, « Boll. U.M.I. », (3), 6, pp. 97-103 (1951); *Le varietà V_5 i cui spazi tangenti ricoprono una varietà W di dimensione inferiore all'ordinaria*, « Rivista Matem. Univ. Parma », 2, pp. 435-462 (1951); 3, pp. 75-89 (1952).

(10) G. SCORZA, *Determinazione delle varietà a tre dimensioni di S_r ($r \geq 7$) i cui S_3 tangenti si incontrano a due a due*, « Rend. Palermo », 25, pp. 193-204 (1908); *Sulle varietà a quattro dimensioni di S_r ($r \geq 9$) i cui S_4 tangenti si tagliano a due a due*, ibid., 27, pp. 148-178 (1909).

(11) F. SEVERI, e B. SEGRE, *L'involuppo di un sistema più volte infinito di curve piane*, « Ann. di Matem. » (4), 8, pp. 173-199 (1930).

quello che tocca W_{k+b-a} lungo l' S_{b+1} contenente V_{a+1} : essi pertanto si segano a due a due in uno spazio avente dimensione $\geq k-b+a$.

3° Se riferiamo i punti di S_r ad un sistema di coordinate proiettive ed omogenee x_0, x_1, \dots, x_r scelto in guisa che le equazioni dell' S_b siano:

$$(1) \quad x_0 = x_1 = \dots = x_{r-b-1} = 0,$$

V_k potrà essere rappresentata con equazioni della forma:

$$(2) \quad \begin{cases} \rho x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_{k-a-1}) & (i=0, 1, \dots, r-b-1) \\ \rho x_j = \varphi_j(u_1, u_2, \dots, u_{k-a-1}, u_{k-a}, \dots, u_k) & (j=r-b, r-b+1, \dots, r); \end{cases}$$

e viceversa è immediato controllare che tutti gli S_k tangenti di ogni V_k avente equazioni della forma (2) hanno a comune un S_a con lo spazio S_b avente le equazioni (1).

3. Detto $\{S_a\}$ il sistema degli S_a segati su di un dato S_b dagli S_k tangenti di V_k , consideriamo il cono $S_{b-\varepsilon}V_k$ che proietta V_k da un generico $S_{b-\varepsilon}$ di S_b , con la condizione che l' $S_{b-\varepsilon}$ ed un generico S_a di $\{S_a\}$ non siano contenuti in uno spazio di dimensione minore di b (sicché sarà: $\varepsilon \leq a+1$). Poiché l' $S_{b-\varepsilon}$ è scelto genericamente in S_b , esso segnerà il generico S_k tangente di V_k in uno spazio $S_{a-\varepsilon}$, e quindi la dimensione del cono $S_{b-\varepsilon}V_k$ è: $k + (b - \varepsilon) - (a - \varepsilon) = k + b - a$, ossia coincide con quella del cono S_bV_k proiettante V_k dall' S_b .

In particolare, quando $\varepsilon = a+1$, si ha che proiettando V_k dall' S_b oppure da un S_{b-a-1} di S_b che non si appoggi a tutti gli S_a di $\{S_a\}$ si ottengono coni aventi la stessa dimensione.

Tale circostanza è particolarmente interessante quando V_k sia una varietà algebrica irriducibile. Il cono S_bV_k è in tal caso algebrico e si compone di un cono $\Gamma^{(b)}$ algebrico ed irriducibile da contarsi un conveniente numero λ_1 di volte:

$$S_bV_k = \lambda_1 \Gamma^{(b)};$$

similmente il cono $S_{b-a-1}V_k$ è algebrico e si compone di un cono $\Gamma^{(b-a-1)}$ algebrico ed irriducibile da contarsi un conveniente numero λ_2 di volte:

$$S_{b-a-1}V_k = \lambda_2 \Gamma^{(b-a-1)}.$$

D'altra parte S_bV_k contiene $\Gamma^{(b-a-1)}$ ed ha la sua stessa dimensione; ciò porta di conseguenza che $\Gamma^{(b)}$ e $\Gamma^{(b-a-1)}$ coincidono, sicché S_b — che sta in $\Gamma^{(b)}$ — giace in $\Gamma^{(b-a-1)}$. Ciò implica che l' S_b deve segare V_k in una varietà la cui dimensione è almeno a ; gli spazi tangenti alle V_a contenute in questa varietà appartengono ovviamente al sistema $\{S_a\}$, ma non è detto che lo esauriscano.

Il caso più interessante, che è poi anche il caso generale, è quello in cui l' S_b abbia a comune con V_k una V_a .

L'ordine del cono $S_{b-a-1} V_k$ è uguale all'ordine n di V_k ; invece, detto m l'ordine della V_a sezione di V_k con l' S_b , il cono $S_b V_k$ ha soltanto l'ordine $n - m$. Pertanto, denotando con μ l'ordine del cono $\Gamma^{(b)} \equiv \Gamma^{(b-a-1)}$, si ha:

$$(3) \quad n - m = \lambda_1 \mu, \quad n = \lambda_2 \mu;$$

e quindi $\lambda_2 > \lambda_1$; ne segue $\lambda_2 \geq 2$.

Si conclude col seguente teorema: *se tutti gli S_k tangenti di una V_k algebrica ed irriducibile segano secondo spazi S_a un dato spazio S_b contenente soltanto una V_a di V_k , la V_k è proiettata multiplamente da ogni S_{b-a-1} contenuto in S_b , non incontrante V_k e non appoggiato a tutti i suoi S_k tangenti.*

Eliminando μ dalle (3) si ottiene: $n(\lambda_2 - \lambda_1) = m\lambda_2$; e ciò implica $m\lambda_2 \equiv 0 \pmod{n}$ (ed inoltre $m < n$); e poiché m non può essere divisibile per n , ne segue che λ_2 deve essere divisibile per un qualche fattore di n .

Ad esempio, se V_k è una superficie di Veronese ed S_b un suo generico piano tangente, si trova che: *ogni piano che seghi in una retta un piano tangente di una superficie F^4 di Veronese, senza passare per il relativo punto di contatto, e che contenga un punto della F^4 , sega la F^4 in un punto ulteriore.*

Supponiamo ora che la V_a sezione di V_k con l' S_b si riduca ad un solo S_a . Poiché la proiezione di V_k da un generico S_{b-a-1} di S_b è multipla, la V_a deve ridursi a quell' S_a contato un conveniente numero di volte ($\geq \lambda_2 > 1$). Ogni generico S_{r-k+a} passante per l' S_b sega V_k in una V_a^* di cui fa parte l' S_a contato almeno λ_2 volte; e pertanto se l' S_a non è luogo di punti multipli per V_k , l' S_b è tangente a V_k lungo l' S_a , e presenta con V_k , lungo l' S_a , un contatto d'ordine $\geq \lambda_2 - 1$.

Passiamo ora al caso, che è da riguardarsi come eccezionale, in cui l' S_b abbia a comune con V_k^n una $V_{a+\eta}^m$, con $\eta \geq 1$. Mentre il generico S_k tangente di V_k^n sega S_b in un S_a , ci sono degli S_k tangenti di V_k^n , quelli che toccano V_k^n nei punti di $V_{a+\eta}^m$, i quali segano l' S_b in spazi $S_{a+\eta}$; e questi ultimi hanno a comune un $S_{\eta-1}$ con ogni generico S_{b-a-1} contenuto in S_b . Questi $S_{\eta-1}$ sono gli spazi tangenti della $V_{\eta-1}^m$ sezione di $V_{a+\eta}^m$, e quindi anche di V_k^n , con l' S_{b-a-1} .

Un generico $S_{r-\eta+1}$ di S_r sega V_k in una $V_{k-\eta+1}$ che si appoggia in m punti allo spazio $S_{b-a-\eta}$ sezione di S_{b-a-1} con l' $S_{r-\eta+1}$; gli m punti in cui la $V_{\eta-1}^m$ è segata dall' $S_{r-\eta+1}$. Pertanto il cono $S_{b-a-1} V_k$ è segato dall' $S_{r-\eta+1}$ in un cono di (dimensione $b - a - \eta + k + 1$ ed) ordine $n - m$. Sicché $n - m$ è anche l'ordine di $S_{b-a-1} V_k$. In tal caso si ha dunque $\lambda_1 = \lambda_2$.

4. Consideriamo la varietà W ricoperta dagli spazi S_m appoggiati ad $m + 1$ varietà $V_{a_0}, V_{a_1}, \dots, V_{a_m}$ contenute in spazi indipendenti. Essa ha dimensione $a + m$ ($a = a_0 + a_1 + \dots + a_m$) ed appartiene allo spazio S_{b+m} che congiunge gli spazi S_{b_i} contenenti le V_{a_i} ($i = 0, 1, \dots, m$; $b = b_0 + b_1 + \dots + b_m$). Si riconosce in modo immediato che se A è un punto gene-

rico di W , ed A_0, A_1, \dots, A_m sono gli $m+1$ punti in cui l' S_m generatore di W che passa per A si appoggia a $V_{a_0}, V_{a_1}, \dots, V_{a_m}$, lo spazio tangente a W nel punto A è quello che congiunge gli spazi tangenti alle V_{a_i} nei punti A_i , e quindi non varia quando A percorre l' $S_m: A_0 A_1 \dots A_m$ ⁽¹²⁾.

Viceversa, consideriamo una W_{a+m} i cui S_{a+m} tangenti abbiano a comune un S_{a_i} con S_{b_i} ($i=0, 1, \dots, m$), e denotiamo con $S^{(b_i)}$ lo spazio che congiunge $S_{b_0}, S_{b_1}, \dots, S_{b_{i-1}}, S_{b_{i+1}}, \dots, S_{b_m}$; esso ha dimensione $b-b_i+m-1$, ed è segato dagli spazi tangenti di W_{a+m} in spazi $S^{(a_i)}$ aventi dimensioni $a-a_i+m-1$; la dimensione del cono $\Delta^{(i)}$ che proietta W_{a+m} da $S^{(b_i)}$ è allora:

$$a+m+(b-b_i+m-1)-(a-a_i+m-1)=m+b+a_i-b_i,$$

e pertanto la sezione di $\Delta^{(i)}$ con S_{b_i} è una $V_{a_i}^*$. Se A è un punto generico di W_{a+m} la proiezione di A da $S^{(b_i)}$ su S_{b_i} è un punto A_i di $V_{a_i}^*$, e lo spazio $S_m: A_0 A_1 \dots A_m$ esaurisce l'intersezione degli $m+1$ spazi generatori dei coni $\Delta^{(i)}$ passanti per A : ne segue che W_{a+m} è contenuto come parte nella varietà W_{a+m}^* ricoperta dagli S_m appoggiati a $V_{a_0}^*, V_{a_1}^*, \dots, V_{a_m}^*$ (ed eventualmente coincide con essa).

5. Sia ora W_k una varietà di S_{b+m} i cui spazi tangenti seghino $m+1$ spazi dati: $S_{b_0}, S_{b_1}, \dots, S_{b_m}$, tra loro indipendenti e congiunti dall' S_{b+m} (sicché $b=b_0+b_1+\dots+b_m$), in spazi le cui dimensioni siano ordinatamente a_0, a_1, \dots, a_m . Ciò implica $k \geq a+m$. Lo spazio $S^{(b_i)}$ che congiunge $S_{b_0}, S_{b_1}, \dots, S_{b_{i-1}}, S_{b_{i+1}}, \dots, S_{b_m}$ (che ha dimensione $b-b_i+m-1$) è segato dagli spazi tangenti di V_k in spazi aventi dimensioni $a-a_i+m-1$ ($a=a_0+a_1+\dots+a_m$); la dimensione del cono $\Delta^{(i)}$ che dall' $S^{(b_i)}$ proietta V_k è allora:

$$k+(b-b_i+m-1)-(a-a_i+m-1)=k+b-b_i-a+a_i,$$

e pertanto la sezione di $\Delta^{(i)}$ con S_{b_i} è una varietà $V_{a_i}^*$ con:

$$a_i^*=(k+b-b_i-a+a_i)+b_i-(b+m)=k-a+a_i-m (\geq a_i).$$

Ne segue che V_k appartiene alla W_{a+m}^* ($a^*=a_0^*+a_1^*+\dots+a_m^*$) luogo degli S_m appoggiati alle $m+1$ $V_{a_i}^*$ la quale, come sappiamo, ha lungo ciascuno dei suddetti S_m uno spazio tangente fisso, coincidente con l' S_{a+m}^* che congiunge gli spazi che toccano le $V_{a_i}^*$ nei punti A_i in cui esse incontrano l' S_m ; pertanto: se A è un punto generico di V_k e se A_0, A_1, \dots, A_m sono i punti in cui si appoggia a $V_{a_0}^*, V_{a_1}^*, \dots, V_{a_m}^*$ l' S_m generatore di W_{a+m}^* che passa per A , l' S_k tangente a V_k nel punto A sega lo spazio S_{b_i} ($i=0, 1, \dots, m$) in un S_{a_i} appartenente all' $S_{a_i}^*$ tangente a $V_{a_i}^*$ nel punto A_i .

(12) Cfr. C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, «Circ. Matem. di Palermo», XXX, pp. 87-121 (2° sem. 1910).

6. Il caso delle superficie dello spazio a quattro dimensioni si presenta di scarso interesse e non offre alcuna difficoltà; ad esso accenno rapidamente, soffermandomi su alcuni risultati che saranno utili per ulteriori applicazioni.

Sia F una superficie di S_4 . Se i suoi piani tangenti passano per un punto fisso, essa è un cono; se i suoi piani tangenti segano in rette un piano fisso, il cono proiettante F da tale piano ha dimensione *tre*, e quindi F si compone di parti ciascuna delle quali appartiene ad un S_3 passante per quel piano. I soli casi che possono presentare qualche interesse son dunque quelli in cui i piani tangenti di F si appoggiano, in punti variabili, ad una o più rette a due a due sghembe.

Se tutti i piani tangenti di F si appoggiano ad una retta a , il cono aF ha dimensione *tre*, e su F esiste un sistema $\Sigma \infty^1$ di curve piane appartenenti a piani passanti per a . Qualora il sistema di riferimento per le coordinate proiettive ed omogenee x_i sia scelto in guisa tale che le equazioni di a siano: $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, ogni falda di F , non contenuta nell' S_3 $x_0 = 0$, può essere rappresentata con equazioni della forma:

$$(4) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \varphi_1(u) : \varphi_2(u) : \varphi_3(u, v) : \varphi_4(u, v);$$

e viceversa tutti i piani tangenti d'una superficie di S_4 rappresentabile parametricamente con equazioni come le (4) si appoggiano alla retta di equazioni: $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.

7. Consideriamo ora una superficie F di S_4 i cui piani tangenti si appoggino a due rette a, b , che supporremo tra loro sghembe, per non ricadere nei due casi ovvi di cui s'è detto poc'anzi. Si tratta cioè di una superficie i cui piani tangenti taglino un dato S_3 secondo rette di una congruenza lineare K , eventualmente speciale.

Se K è una congruenza lineare generale, F contiene due sistemi ∞^1 di curve piane: Σ costituito di curve appartenenti a piani passanti per a , Σ' costituito da curve giacenti in piani passanti per b ; se $\Sigma \equiv \Sigma'$ ogni linea di Σ appartiene ad un piano passante per a e ad un piano passante per b , e quindi F è una rigata contenuta in K , e perciò immersa nell' $S_3 : ab$. Se F non appartiene ad un S_3 , i due sistemi Σ e Σ' son dunque distinti.

È immediato scrivere delle equazioni parametriche per F , supponendo che le rette a, b abbiano equazioni: $a) x_0 = x_1 = x_2 = 0$; $b) x_0 = x_3 = x_4 = 0$.

Per ciò basta notare che la condizione necessaria e sufficiente affinché tutti i piani tangenti della superficie (4), già appoggiati ad a , incontrino la retta b è

$$\frac{\partial(\varphi_3, \varphi_4)}{\partial(u, v)} \equiv 0;$$

e cioè che $\varphi_3(u, v)$ e $\varphi_4(u, v)$ siano funzioni di una stessa funzione $g(u, v)$; e dev'essere: $\partial g / \partial v \neq 0$, se no $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sarebbero funzioni di un solo pa-

rametro essenziale. Assumendo allora come nuovi parametri u e $g(u, v)$ si giunge a rappresentare F con equazioni della forma:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : \varphi_1(u) : \varphi_2(u) : \theta_3(v) : \theta_4(v).$$

È anche assai facile determinare le superficie F dello spazio S_4 i cui piani tangenti segano un dato S_3 secondo rette d'una congruenza lineare speciale K , o, ciò che fa lo stesso, secondo rette tangenti ad una quadrica Q dell' S_3 , non specializzata, in punti d'una sua generatrice assegnata g .

Se l' S_3 ha equazione: $x_0 = 0$, e se le equazioni di Q sono: $x_0 = x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$, si può supporre che g abbia equazioni: $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, e che quindi F sia rappresentata parametricamente con equazioni della forma (4). Affinché la retta:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 0 : \lambda \varphi'_1(u) : \lambda \varphi'_2(u) : \lambda \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} + \mu \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} : \lambda \frac{\partial \varphi_4}{\partial u} + \mu \frac{\partial \varphi_4}{\partial v},$$

intersezione dell' S_3 con il piano tangente ad F nel suo punto generico $P(u, v)$, sia tangente a Q , occorre e basta, come subito visto, che: $\frac{\partial \varphi_4}{\partial v} = \frac{\varphi'_2(u)}{\varphi'_1(u)} \frac{\partial \varphi_3}{\partial v}$; e cioè:

$$\varphi_4(u, v) = (\varphi'_2(u)/\varphi'_1(u)) \varphi_3(u, v) + \theta(u),$$

$\theta(u)$ essendo un'arbitraria funzione di u . Assumendo, com'è lecito, quali nuovi parametri $\varphi_1(u)$ e $\varphi_3(u, v)$, le equazioni di F divengono:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 1 : u : \alpha(u) : v : [v\alpha'(u) + \beta(u)];$$

e si controlla subito che viceversa ogni superficie di S_4 rappresentata da equazioni di tal forma, con $\alpha(u)$ e $\beta(u)$ funzioni arbitrarie, soddisfa alle condizioni volute. Il risultato è che: *le superficie di S_4 i cui piani tangenti tagliano un dato S_3 secondo rette appartenenti ad una congruenza lineare speciale K , sono tutte rigate aventi come direttrice rettilinea la retta singolare di K .*

8. La discussione dei vari casi possibili di superficie di S_4 i cui piani tangenti si appoggino a *tre* rette a due a due sghembe, è molto semplice; mi limito perciò ad enunciare i risultati:

a) Le superficie di S_4 i cui piani tangenti s'appoggiano a tre rette a due a due sghembe ma contenute in un medesimo S_3 , o sono superficie appartenenti all' S_3 oppure si compongono di piani seganti ciascuno l' S_3 in una retta appoggiata alle tre rette date.

b) Le superficie di S_4 i cui piani tangenti si appoggiano a tre rette a due a due sghembe e *non* contenute in uno stesso S_3 , sono composte di piani appoggiati alle tre rette e di coni appartenenti allo spazio di due di quelle rette ed aventi il vertice sull'altra.

c) Una superficie F di S_4 i cui piani tangenti seghino un dato S_3 secondo rette di una congruenza lineare speciale K (di direttrice g) e si appoggino inoltre ad una retta r sghemba con g , si compone di piani passanti per una retta di K ed appoggiati ad r , e di coni aventi il vertice su g ed appartenenti all' $S_3 : rg$.

Geometria. — *Sulle relazioni a tre termini fra le coordinate di Grassmann.* Nota I di LUCILLA BASSOTTI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

La totalità delle relazioni quadratiche fra le coordinate di Grassmann relative agli spazi subordinati S_k — di dimensione k — di uno spazio proiettivo S_n , individua, com'è noto, la varietà di Grassmann $G(n, k)$ rappresentativa degli spazi S_k di S_n ($1 \leq k \leq n-2$). Le relazioni quadratiche a tre termini — che sono le più semplici fra quelle — costituiscono un sottoinsieme proprio della totalità suddetta, non appena si supponga $1 < k < n-2$.

Vari autori (1) hanno tuttavia ritenuto che le sole relazioni a tre termini fossero sufficienti ad individuare la varietà di Grassmann: ma, come ha osservato B. Segre ([7], pp. 137), questo fatto non si verifica per nessun valore di k soddisfacente alle limitazioni $1 < k < n-2$.

Il presente lavoro, diviso in due Note, è dedicato allo studio delle varietà algebriche $F(n, k) (\supset G(n, k))$ rappresentate dal sistema formato dalle relazioni a tre termini: nella prima Nota esporremo i risultati ottenuti (nn. 1-4), mentre la seconda (nn. 5-7) conterrà le argomentazioni dimostrative.

Poggiando su di una proposizione preliminare di E. Bompiani (2), stabiliremo anzitutto (n. 1) alcune proprietà generali delle $F(n, k)$. Successivamente (nn. 2, 3, 5, 6), approfondiremo lo studio del caso più semplice $k=2$, pervenendo alla classificazione delle singole componenti di $F(n, 2)$, di cui preciseremo l'ordine, la dimensione e, sulla base di considerazioni di carattere grupale, il numero complessivo. Infine, nei nn. 4 e 7, esamineremo sommariamente il caso $k > 2$ allo scopo soprattutto di rilevare alcuni fatti nuovi rispetto al caso $k=2$; in particolare mostreremo come, mentre $G(n, 2)$ è, per $k=2$, la componente di dimensione massima di $F(n, k)$, ciò non è più vero qualora sia $k > 2$ ed n risulti sufficientemente grande rispetto a k .

1. Le relazioni quadratiche fra le coordinate di Grassmann $p^{i_0 \dots i_k}$ (3) relative agli S_k di S_n , rappresentano, com'è ben noto, in uno spazio S_N ($N = \binom{n+1}{k+1} - 1$) in cui si pensino $p^{i_0 \dots i_k}$ coordinate omogenee di punto, la varietà di Grassmann $G(n, k)$; le relazioni quadratiche a tre termini

$$P(i_2 \dots i_k; i_0 i_1 j_0 j_1) = p^{i_0 i_1 i_2 \dots i_k} p^{j_0 j_1 i_2 \dots i_k} - p^{j_0 i_1 i_2 \dots i_k} p^{i_0 j_1 i_2 \dots i_k} + \\ + p^{j_1 i_1 i_2 \dots i_k} p^{i_0 j_0 i_2 \dots i_k} = 0 \quad (4)$$

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Cfr. [5], § 5; [1] pp. 69-77; [2] pp. 46-47. I numeri fra [] rinviano alla bibliografia.

(2) Cfr. [3], pp. 22-28 o [4], pp. 329-333.

(3) $i_0 \dots i_k$ denota una combinazione semplice di classe $k+1$ dei numeri $0, \dots, n$. Per le generalità sulle coordinate di Grassmann, le relazioni quadratiche, la varietà di Grassmann, cfr. ad esempio [8], pp. 89-96, [2], pp. 40-47, [7], pp. 129-138.

(4) $i_0 i_1 i_2 \dots i_k j_0 j_1$ denotano $k+3$ indici distinti.

rappresentano in S_N una varietà $F(n, k)$ la quale, a norma di un'osservazione già richiamata di B Segre e come vedremo più circostanziatamente in seguito, contiene propriamente $G(n, k)$ se $2 \leq k \leq n-3$ (ciò che implica $n \geq 5$).

Osserviamo anzitutto che non è restrittivo supporre

$$(1) \quad n \geq 2k + 1$$

in quanto potremo sempre ridurci a quest'ipotesi per dualità.

Notiamo inoltre che:

Fissati comunque m indici distinti ($1 \leq m \leq n-k$) fra $0, \dots, n$, la sezione completa di $F(n, k)$ con lo spazio fondamentale di S_N ottenuto annullando le coordinate contenenti almeno uno di quegli indici, è una $F(n-m, k)$.

Divisi — per ogni intero r tale che $0 \leq r \leq k-2$ — gli indici $0, \dots, n$ in quattro insiemi disgiunti

$$(2) \quad \begin{cases} c = (c_1, \dots, c_r) & ; & a = (a_0, \dots, a_{k-r}) & ; \\ b = (b_0, \dots, b_{k-r}) & ; & d = (d_1, \dots, d_{n-2k+r-1}) \end{cases}$$

(convenendo che, se $r=0$, il primo insieme abbia ad essere vuoto), il risultato di E. Bompiani, al quale dianzi si è alluso, può enunciarsi nel modo seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto $(p^{i_1 \dots i_k})$ di $F(n, k)$ non appartenga a $G(n, k)$, è che, essendo

$$p^{c_1 \dots c_r a_0 \dots a_{k-r}} \cdot p^{c_1 \dots c_r b_0 \dots b_{k-r}} \neq 0,$$

siano nulle tutte le coordinate

$$(I_{n,k}) \quad p^{c_1 \dots c_r a_0 \dots a_{k-r-2} \beta_0 \beta_1} (\alpha_j \in a ; \beta_i \in b ; j=0, \dots, k-r-2 ; i=0, 1).$$

Poiché $G(n, k)$ appartiene a S_N , ne segue che $F(n, k)$ contiene come componente $G(n, k)$, e che le altre componenti sono tutte da ricercarsi fra le varietà immerse negli spazi fondamentali di S_N ottenuti annullando le $(I_{n,k})$.

Lo studio di $F(n, k)$ è così ricondotto a quello dei sistemi dei $k-1$ tipi

$$(2_{n,k}) \quad \begin{cases} P(i_2 \dots i_k ; i_0 i_1 j_0 j_1) = 0 & (i_0, i_1, i_2, \dots, i_k, j_0, j_1 = 0, \dots, n) \\ p^{c_1 \dots c_r a_0 \dots a_{k-r-2} \beta_0 \beta_1} = 0 & (\alpha_j \in a ; \beta_i \in b ; j=0, \dots, k-r-2 ; i=0, 1), \end{cases}$$

ottenuti per $r=0, \dots, k-2$, sotto la condizione

$$(3_{n,k}) \quad p^{c_1 \dots c_r a_0 \dots a_{k-r}} \cdot p^{c_1 \dots c_r b_0 \dots b_{k-r}} \neq 0.$$

2. Nel caso particolare $k=2$ la (1) fornisce $n \geq 5$. Essendo ora necessariamente $r=0$, le (2) riduconsi a:

$$a = (a_0, a_1, a_2) ; \quad b = (b_0, b_1, b_2) ; \quad d = (d_1, \dots, d_{n-5}),$$

sicch  i $k - 1$ sistemi $(2_n, k)$ e la relazione $(3_n, k)$ danno rispettivamente l'unico sistema

$$(2_n, 2) \quad \begin{cases} P(i_2; i_0 i_1 j_0 j_1) = 0 & (i_0, i_1, i_2, j_0, j_1 = 0, \dots, n), \\ p^{a_i b_i b_j} = 0 & (l, i, j = 0, 1, 2), \end{cases}$$

e la relazione

$$(3_n, 2) \quad p^{a_0 a_1 a_2} \cdot p^{b_0 b_1 b_2} \neq 0.$$

Fissato un intero h tale che $0 \leq h \leq n - 5$, consideriamo la variet  $F^*(n - h - 3, 2)$ sezione della $F(n, 2)$ con lo spazio fondamentale ottenuto annullando le coordinate e e contengono almeno un indice $b_0, b_1, b_2, d_1, \dots, d_h$, e la variet  $F^*(h + 2, 2)$ sezione della $F(n, 2)$ con quello ottenuto annullando le coordinate che contengono almeno un indice $a_0, a_1, a_2, d_{h+1}, \dots, d_{n-5}$. Vale allora il

TEOREMA I. 2. - *Le componenti irriducibili di $F(n, 2)$, distinte dalla $G(n, 2)$, sono tutte e sole le componenti irriducibili delle variet  $K^{(h)}$, generate dalle rette che si appoggiano a due variet  $F^*(n - h - 3, 2)$ e $F^*(h + 2, 2)$, univocamente determinate dall'intero h , qualora si fissi la suddivisione (2).*

Allo scopo di approfondire lo studio delle componenti suddette, operiamo, per ogni intero m tale che $1 \leq m \leq (n + 1)/3$, una partizione τ degli indici $0, \dots, n$ in m insiemi disgiunti I_t ($t = 1, \dots, m$), di $h_t + 1$ elementi ciascuno ($h_t \geq 2$), sicch  ovviamente $\sum_{t=1}^m h_t = n - m + 1$. Consideriamo lo

spazio fondamentale di S_N ottenuto annullando tutte le coordinate aventi qualche indice non appartenente ad un dato I_t : in tale spazio, le relazioni quadratiche fra le coordinate rimanenti rappresentano una $G_\tau(h_t, 2)$: al variare di t si ottengono in tal modo m grassmanniane $G_\tau(h_1, 2), \dots, G_\tau(h_m, 2)$, determinate univocamente - a prescindere dall'ordine - dalla partizione τ e appartenenti a spazi fondamentali fra loro indipendenti.

Considerata poi, in corrispondenza ad ogni τ , la variet  W_τ generata dagli S_{m-1} che si appoggiano in un punto a ciascuna delle $G_\tau(h_1, 2), \dots, G_\tau(h_m, 2)$ ⁽⁵⁾, possiamo enunciare i seguenti teoremi:

TEOREMA II. 2. - *Le componenti irriducibili di $F(n, 2)$ sono tutte e sole le variet  W_τ corrispondenti a tutte le possibili partizioni τ degli indici $0, \dots, n$ del tipo dianzi specificato.*

TEOREMA III. 2. - *La dimensione di una componente W_τ di $F(n, 2)$   uguale a*

$$3n - 8m + 2$$

ed   quindi funzione soltanto di n e del numero m delle grassmanniane $G_\tau(h_1, 2), \dots, G_\tau(h_m, 2)$ definiti W_τ .

TEOREMA IV. 2. - *L'ordine di una W_τ   uguale al prodotto degli ordini delle suddette grassmanniane $G_\tau(h_1, 2), \dots, G_\tau(h_m, 2)$.*

Dal teorema III. 2 discende facilmente che:

(5) Se $m = 1$, a τ corrisponde il solo insieme I_1 di tutti gli indici e $W_\tau \equiv G(n, 2)$.

La $G(n, 2)$ è, qualunque sia n , la componente di dimensione massima di $F(n, 2)$; fra le altre componenti, quelle di dimensione più elevata si ottengono per $m = 2$ e sono generate dalle rette che si appoggiano a due grassmanniane $G_r(h_1, 2)$ e $G_r(h_2, 2)$, ove $h_1 + h_2 = n - 1$: esse hanno dimensione di 8 unità inferiore a quella di $G(n, 2)$.

Si ha inoltre che:

Le componenti di $F(n, 2)$ di dimensione minima si ottengono per il valore massimo di m , e cioè per $m = [(n + 1)/3]$.

3. Determiniamo ora il gruppo delle omografie dell' S_N in sé che lasciano fissa la varietà $F(n, 2)$, la conoscenza del quale ci permetterà di stabilire il numero complessivo delle componenti irriducibili di $F(n, 2)$. Sussiste in proposito il seguente:

TEOREMA I. 3. — *Le omografie dell' S_N in sé che lasciano fissa $F(n, 2)$ si distribuiscono in $(n + 1)!$ sistemi continui distinti; le omografie di ciascun sistema corrispondendo⁽⁶⁾ alle omografie di un S_n in sé che operano una medesima sostituzione sui punti fondamentali delle coordinate.*

Uno solo di quei sistemi — quello corrispondente alla sostituzione identica — è un gruppo; questo risulta sottogruppo invariante dell'insieme formato dalle omografie dei suddetti $(n + 1)!$ sistemi continui, il quale è un gruppo; il relativo gruppo quoziente risulta chiaramente isomorfo al gruppo totale delle sostituzioni su $n + 1$ lettere.

Indichiamo ora con Ψ il gruppo delle omografie dell' S_N in sé che lasciano fissa $F(n, 2)$ e con Φ_h il sottogruppo di Ψ costituito dalle omografie che lasciano fissa una varietà $K^{(h)}$ (cfr. n. 2). Il sottogruppo Φ_h determina una suddivisione delle omografie di Ψ in classi laterali, in modo che tutte e sole le omografie di una classe mutano una varietà $K^{(h)}$ in un'altra $\bar{K}^{(h)}$; l'indice del sottogruppo Φ_h in Ψ uguaglia dunque il numero (certamente finito) delle varietà $K^{(h)}$. A norma del teorema I. 2 se ne trae il seguente teorema, il quale fornisce per ricorrenza il numero delle componenti di $F(n, 2)$.

TEOREMA II. 3. — *Il numero v_n delle componenti irriducibili di $F(n, 2)$ soddisfa alla relazione:*

$$v_n = \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{n-5} \binom{n+1}{h+3} v_{h+2} \cdot v_{n-h-3} + 1.$$

4. Accenniamo ora ad alcune proprietà di $F(n, k)$ per $k \geq 3$, le quali mostrano come il caso $k = 2$ si differenzi essenzialmente dai successivi.

Consideriamo anzitutto la più semplice varietà $F(n, k)$ non riconducibile in modo immediato alla $F(n, 2)$, ossia la $F(7, 3)$. Riprendendo le notazioni del n. 1, osserviamo che r può attualmente assumere soltanto i valori 0 e 1, in corrispondenza ai quali le (2) divengono rispettivamente

$$(3) \quad a = (a_0, a_1, a_2, a_3) \quad , \quad b = (b_0, b_1, b_2, b_3);$$

$$(4) \quad c = (c_1) \quad , \quad a = (a_0, a_1, a_2) \quad , \quad b = (b_0, b_1, b_2) \quad , \quad d = (d_1).$$

(6) Cfr. [6], pp. 310-311.

Dall'esame dei sistemi $(2_{7,3})$ sotto condizioni $(3_{7,3})$ si trae allora il
TEOREMA I. 4. - *Le componenti della $F(7, 3)$ sono:*

a) la varietà $G(7, 3)$, la quale è componente di dimensione massima $(= 16)$;

b) gli S_9 congiungenti i punti fondamentali ⁽⁷⁾

$$A^{c_1 a_0 a_1 a_2} A^{c_1 a_i a_j d_1} A^{a_0 a_1 a_2 d_1} A^{c_1 b_0 b_1 b_2} A^{b_0 b_1 b_2 d_1} A^{b_0 b_1 b_2 a_i} \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

corrispondenti alle varie suddivisioni (4);

c) i coni proiettanti da un punto fondamentale $A^{c_1 a_0 a_1 a_2}$ la varietà sezione della $G(7, 3)$ con lo spazio ad essa tangente nel punto fondamentale $A^{b_0 b_1 b_2 d_1}$, in corrispondenza a tutte le coppie di quaterne di indici distinti $(c_1 a_0 a_1 a_2)$, $(b_0 b_1 b_2 d_1)$.

Dal precedente esempio appare già come le componenti di $F(n, k)$, per $k \geq 3$, non si ottengano necessariamente quali varietà generate da S_{m-1} appoggiati ad m grassmanniane. Si verifica tuttavia quanto segue. Si consideri una partizione τ degli indici $0, \dots, n$ in m ($1 \leq m \leq [(n+1)/(k+1)]$) insiemi I_t ($t = 1, \dots, m$), ciascuno contenente $h_t + 1$ ($h_t \geq k$) indici; per un dato t , e, nello spazio fondamentale di S_N ottenuto annullando le coordinate aventi almeno un indice non contenuto in I_t , resta allora definita la varietà, che designeremo con $G_\tau(h_t, k)$, rappresentata dalle relazioni quadratiche fra le coordinate rimanenti.

Ebbene, per ogni τ , la varietà generata dagli S_{m-1} che si appoggiano in almeno un punto a ciascuna delle $G_\tau(h_1, k), \dots, G_\tau(h_m, k)$ appartiene ad $F(n, k)$.

Già il caso della $F(7, 3)$, mostra però come le varietà precedenti (che per $n = 7$ e $k = 3$ si riducono a particolari rette fondamentali) possano risultare sottovarietà proprie di componenti irriducibili di $F(n, k)$.

Si ha infine il seguente

TEOREMA II. 4. - *Per ogni $k \geq 3$ e per ogni $n \geq k(k+2)$, esistono componenti di $F(n, k)$ la cui dimensione supera quella di $G(n, k)$.*

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. B. ANTONELLI, *Sulle relazioni indipendenti tra le coordinate di una forma fondamentale*, «Ann. Sc. Norm. Pisa» (6), 3, 69-77 (1883).
- [2] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Messina, Principato (1923).
- [3] E. BOMPIANI, *Lezioni di geometria differenziale*, litografie, Roma (1952-53).
- [4] E. BOMPIANI, *Sulle coordinate di Grassmann*, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (8), 13, 329-335 (1952).
- [5] E. D'OVIDIO, *Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari*, «Atti Acc. Sc. Torino», 12, 334-349 (1876-77).
- [6] W. V. D. HODGE e D. PEDOE, *Methods of algebraic geometry*, vol. II, Cambridge, The University Press (1947).
- [7] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I, Bologna, Zanichelli (1948).
- [8] F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare*, «Ann. di Mat.» (3), 24, 89-120 (1915).

(7) Con $A^{i_0 \dots i_k}$ intendiamo il punto fondamentale per le coordinate in S_N avente nulle tutte le coordinate tranne la $p^{i_0 \dots i_k}$.

Scienza delle costruzioni. — *Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico.* Nota I di LEO FINZI, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

§ 1. INTRODUZIONE. — Tra l'integrale generale delle equazioni indefinite di-equilibrio e le condizioni di congruenza si può rilevare una stretta analogia formale che appare bene evidente quando si scrivano le une accanto alle altre, in un riferimento generale, le formule che traducono tali circostanze fisiche, tanto che si può stabilire una regola molto semplice per passare dalle une alle altre.

In questa Nota faccio innanzitutto tale constatazione nel caso piano, nel generico caso tridimensionale e nel caso delle membrane tese su superfici a curvatura costante.

Ma qual'è il significato intimo di tale analogia?

Mostro qui che il significato dell'analogia risiede nei due aspetti che è possibile dare al principio dei lavori virtuali: come rivelatore dell'equilibrio e come rivelatore della congruenza.

Per questa via mi si presenta naturale una interpretazione fisica, che non mi risulta nota, sia degli enti χ analoghi alla funzione di Airy, che danno gli sforzi equilibrati, sia di quelli Ω che si annullano in condizioni di congruenza. Secondo tale interpretazione gli enti χ , analoghi alla funzione di Airy, che danno gli sforzi equilibrati e che chiamo *funzione o tensore di equilibrio*, rappresentano il fattore intensivo nella densità di energia di deformazione, gli enti Ω , che si annullano in condizioni di congruenza, e che chiamo brevemente *funzione o tensore di congruenza*, rappresentano il fattore estensivo nella precedente densità di energia.

Naturalmente, se in luogo dell'energia di deformazione si considera la seconda energia potenziale termodinamica, l'ufficio intensivo ed estensivo dei due fattori χ ed Ω viene scambiato.

Particolarmente significativa mi sembra l'interpretazione data all'ente Ω che uguagliato a zero dà le condizioni di congruenza, e ciò per l'uso comunissimo di tali condizioni in tutta la Scienza delle costruzioni. Non ho creduto perciò inutile dare di Ω una ulteriore interpretazione geometrica: Ω è la derivata seconda, relativa a due direzioni ortogonali, dello scorrimento ad esse connesso che si deve aggiungere alla deformazione originaria per renderla congruente.

Il legame fra integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio e condizioni di congruenza viene esteso anche ad un continuo genericamente vincolato, come tipicamente sono le membrane tese su supporti indeformabili assegnati (problema della determinazione degli stati di coazione nei rivestimenti).

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

Il problema viene risolto nella sua generalità e se ne fa applicazione pervenendo alla determinazione dell'integrale generale delle equazioni intrinseche di equilibrio in una membrana tesa su una generica superficie di rotazione, completando così quanto è noto per le membrane tese su superfici sviluppabili o a curvatura costante.

§ 2. CONSTATAZIONE DEL LEGAME NEL CASO PIANO. - Le equazioni indefinite di equilibrio di un corpo continuo soggetto a sforzi piani, in assenza di forze di massa, sono le seguenti:

$$(1) \quad F^i \equiv p_{|k}^{ik} = 0 \quad (i = 1, 2)$$

dove p^{ik} ($i, k = 1, 2$) sono le componenti del tensore degli sforzi in un riferimento generico, la derivazione tensoriale è contrassegnata da un indice preceduto da una sbarretta ed è sottinteso il segno di sommatoria rispetto all'indice saturato, che nel caso piano (bidimensionale) assume i valori 1 e 2.

L'integrale generale di queste equazioni è il seguente:

$$(2) \quad p^{ik} = \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \chi_{|rs} \quad (i, k = 1, 2)$$

dove ε_{ir} è il tensore di Ricci nel piano (in coordinate cartesiane ortogonali, ad esempio, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$) e χ è la funzione degli sforzi *a priori* arbitraria, la funzione di Airy.

La condizione che assicura la congruenza della deformazione ($i, k = 1, 2$) nel caso piano è notoriamente la seguente:

$$(3) \quad \Omega \equiv \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \xi_{ik|rs} = 0.$$

È manifesta l'analogia formale fra i secondi membri della (2) e della (3). Precisamente si passa dal secondo membro della (2), esprime l'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio, al secondo membro della (3), la quale traduce la congruenza della deformazione, ponendo al posto della funzione arbitraria χ , che dà gli sforzi, il tensore di deformazione ξ_{ik} .

§ 3. CONSTATAZIONE DEL LEGAME NEL CASO TRIDIMENSIONALE. - L'analogia precedente si estende immediatamente al caso tridimensionale. In questo caso infatti, se p^{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) è il tensore degli sforzi, le equazioni di equilibrio, in assenza di forze di massa, sono del tutto analoghe alle (1):

$$(4) \quad F^i \equiv p_{|k}^{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

e il loro integrale generale è il seguente:

$$(5) \quad p^{ik} = \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} \chi_{|hj|rs} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

dove ε^{irh} è il tensore di Ricci nello spazio e χ_{hj} è un tensore doppio simmetrico, funzione *a priori* arbitraria del posto.

Le tre componenti di χ_{hj} a indici diversi sono le funzioni di Morera e quelle a indici uguali le funzioni di Maxwell.

Le condizioni di congruenza sono invece le seguenti:

$$(6) \quad \Omega^{ik} \equiv \epsilon^{irh} \epsilon^{ksj} \xi_{hj|rs} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

ed è ben noto che esse si riducono a sole tre distinte perché fra di esse sussistono le tre identità:

$$(7) \quad \Omega_{|k}^{ik} \equiv \epsilon^{irh} \epsilon^{ksj} \xi_{hj|rsk} \equiv 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Si passa dal secondo membro della (5), esprimente l'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio (in assenza di forze di massa), al secondo membro della (6), esprimente la congruenza delle deformazioni, ponendo al posto del tensore arbitrario χ_{hj} , mediante le cui derivate seconde si esprimono gli sforzi, il tensore di deformazione ξ_{hj} .

§ 4. — CONSTATAZIONE DEL LEGAME NEL CASO DELLE MEMBRANE A CURVATURA COSTANTE. — Anche nel caso delle membrane tese su di una superficie a curvatura totale K costante è possibile constatare il legame di cui si è detto precedentemente.

Le equazioni indefinite di equilibrio sono ancora le (1), dove però non è possibile riferirsi a coordinate cartesiane ortogonali è quindi la derivazione tensoriale non coincide con quella ordinaria e presuppone la conoscenza in ogni punto del tensore fondamentale a_{ik} che dà la metrica della superficie ⁽¹⁾.

L'integrale generale di queste equazioni, sempre in assenza di forze di massa, è il seguente:

$$(8) \quad p^{ik} = \epsilon^{ir} \epsilon^{ks} \chi_{|rs} + K \chi a^{ik} \quad (i, k = 1, 2).$$

La condizione che assicura la congruenza delle deformazioni è invece:

$$(9) \quad \Omega \equiv \epsilon^{ir} \epsilon^{ks} \xi_{ik|rs} + K \xi_{ik} a^{ik} = 0^{(2)}.$$

La (8) e la (9) generalizzano rispettivamente le (2) e la (3), alle quali si riducono per $K = 0$, come avviene nel caso piano e più generalmente per una membrana tesa su una superficie sviluppabile. Ancor qui si passa dal secondo membro della (8) al secondo membro della (9) ponendo al posto della funzione arbitraria χ , che dà gli sforzi, il tensore di deformazione ξ_{ij} .

(1) Si tenga presente che, sia il tensore fondamentale che il tensore di Ricci, pur non avendo componenti costanti, hanno derivata tensoriale nulla in uno spazio qualsivoglia.

(2) Una membrana tesa su superficie prestabilita non può essere soggetta a deformazioni funzioni qualsivoglia del posto, perché le tre componenti di deformazione debbono ottenersi per derivazione dalle due componenti di uno spostamento tangenziale. Le tre componenti di deformazione devono dunque ubbidire ad una condizione di congruenza. Per una membrana libera non esistono invece condizioni di congruenza perché le tre componenti di deformazione possono sempre esprimersi mediante le derivate delle tre componenti dello spostamento spaziale.

§ 5. - GENESI DEL LEGAME. - Il legame constatato nel caso piano, nel caso tridimensionale e per le membrane tese su di una superficie a curvatura costante, può trovare la sua spiegazione e la sua genesi nel principio dei lavori virtuali applicato nella sua forma originaria e nella forma duale di Danusso ⁽³⁾.

Consideriamo dapprima per semplicità il caso piano.

Scriviamo il principio dei lavori virtuali in forma diretta:

$$(10) \quad \delta^* \mathcal{L} = \int_C p^{ik} \delta \xi_{ik} dC = 0.$$

Nella (10) $\delta \xi_{ik}$ rappresenta una generica deformazione infinitesima congruente, soluzione cioè della (3) e corrispondente a spostamenti nulli al contorno del campo C.

È noto come la (10) sia in grado di fornire le equazioni indefinite di equilibrio (1) quando al posto di $\delta \xi_{ik}$ si ponga la sua espressione fornita dall'integrale generale della (3):

$$(11) \quad \delta \xi_{ik} = \frac{1}{2} (\delta s_{i|k} + \delta s_{k|i})$$

nella quale δs_i rappresenta uno spostamento arbitrario infinitesimo, nullo al contorno.

Ponendo infatti la (11) nella (10), integrando per parti e ricordando che al contorno del campo C è $\delta s_i = 0$, si ha:

$$(12) \quad \begin{aligned} \delta^* \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \int_C p^{ik} (\delta s_{i|k} + \delta s_{k|i}) dC = \int_C p^{ik} \delta s_{i|k} dC = \\ &= - \int_C p^{ik}_{|k} \delta s_i dC \equiv - \int_C F^i \delta s_i dC = 0. \end{aligned}$$

Poiché questa relazione deve essere vera qualunque sia δs_i , essa fornisce tosto la (1).

Come dall'integrale generale (11) della condizione di congruenza si sono tratte le equazioni indefinite di equilibrio (1), valendosi del principio dei lavori virtuali nella forma diretta (10), così dall'integrale generale (2) delle equazioni indefinite di equilibrio è possibile trarre le condizioni di congruenza, valendosi del principio dei lavori virtuali nella forma duale.

La forma duale del principio dei lavori virtuali è la seguente:

$$(13) \quad \int_C \xi_{ik} \delta p^{ik} dC = 0.$$

(3) A. DANUSSO, *Scienza delle costruzioni*, Milano 1946.

Nella (13) δp^{ik} rappresenta un generico stato di sforzo equilibrato, soluzione cioè delle (1) e corrispondente a forze nulle distribuite sul contorno del campo C. La (13) è in grado di fornire la condizione di congruenza (3) quando al posto di δp^{ik} si ponga la sua espressione fornita dall'integrale generale (2) delle (1):

$$(14) \quad \delta p^{ik} = \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \delta \chi_{|rs}.$$

Ponendo infatti la (14) nella (13), integrando due volte per parti e ricordando che al contorno del campo C (se n è il versore normale a tale contorno) è $\delta p^{ik} n_k = 0$, si ha ⁽⁴⁾:

$$(15) \quad \int_C \xi_{ik} \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \delta \chi_{|rs} dC = \int_C \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \xi_{ik|rs} \delta \chi dC \equiv \int_C \Omega \delta \chi dC = 0.$$

Poiché questa relazione deve essere verificata qualunque sia $\delta \chi$, essa fornisce tosto la (3).

A risultati del tutto analoghi si perviene riferendosi a un continuo tridimensionale generico o a una membrana a curvatura costante. Mi limito ad indicare la successione di passaggi che permette di ottenere le condizioni di congruenza nei due casi, ponendo nella (13) l'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio espresso rispettivamente dalla (5) e dalla (8).

Per un continuo tridimensionale si ha:

$$(16) \quad \int_C \xi_{ik} \delta p^{ik} dC = \int_C \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} \xi_{ik} \delta \chi_{hj|rs} dC = \int_C \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} \xi_{ik|rs} \delta \chi_{hj} dC \equiv \\ \equiv \int_C \Omega^{hj} \delta \chi_{hj} dC = 0.$$

Per una membrana tesa su una superficie a curvatura costante si ha invece:

$$(17) \quad \int_C \xi_{ik} \delta p^{ik} dC = \int_C \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \xi_{ik} \delta \chi_{|rs} dC + K \int_C a^{ik} \xi_{ik} \delta \chi dC = \\ = \int_C (\varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \xi_{ik|rs} + K a^{ik} \xi_{ik}) \delta \chi dC \equiv \int_C \Omega \delta \chi dC = 0.$$

Scrivendo che la (16) è verificata qualunque sia l'elemento arbitrario $\delta \chi_{hj}$ che in essa compare, si ottengono le condizioni di congruenza (6); scrivendo che la (17) è verificata qualunque sia l'elemento arbitrario $\delta \chi$ che in essa compare, si ottiene la condizione di congruenza (9).

Dunque il legame constatato fra l'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio e le condizioni di congruenza trova la sua genesi nella

(4) P. LOCATELLI, *Sulla congruenza delle deformazioni*, « Rend. Ist. Lomb. Scienze e Lettere », 1940.

dualità tra sforzi e deformazioni insita nel principio dei lavori virtuali: come dall'integrale generale delle condizioni di congruenza si possono sempre trarre le equazioni indefinite di equilibrio, valendosi del principio dei lavori virtuali in forma diretta, e scrivendo che esso è soddisfatto qualunque siano gli elementi arbitrari che in esso compaiono, così dall'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio è possibile trarre le condizioni di congruenza valendosi del principio dei lavori virtuali in forma duale e scrivendo che esso è soddisfatto qualunque siano gli elementi arbitrari di sforzo che in esso compaiono (funzione di Airy, di Maxwell, di Morera, ecc.).

§ 6. FUNZIONI DI EQUILIBRIO, FUNZIONI DI CONGRUENZA E LORO SIGNIFICATO ENERGETICO. - Riferendoci per semplicità al caso piano, osserviamo che nella (10) il lavoro virtuale $\delta^*\mathcal{Q}$ ha come densità il prodotto di due fattori: un fattore intensivo costituito dal tensore degli sforzi p^{ik} e un fattore estensivo costituito dal tensore di deformazione $\delta\xi_{ik}$. Nella (12) il fattore intensivo è il primo membro F^i delle equazioni indefinite di equilibrio e il fattore estensivo è lo spostamento δs_i .

Quando esiste una energia di deformazione (1^a energia potenziale termodinamica) A , è $\delta^*\mathcal{Q} = -\delta A$ e la densità di tale variazione di energia è opposta al prodotto del fattore intensivo p^{ik} per il fattore estensivo $\delta\xi_{ik}$, oppure è uguale al prodotto del fattore intensivo F^i (risultante per unità di campo delle forze agenti sul contorno di ogni elemento) per il fattore estensivo δs_i di spostamento.

Ma quando esiste una prima energia potenziale termodinamica A , esiste pure una seconda energia potenziale termodinamica F , il cui differenziale è opposto al primo membro della (13) che interviene nella forma duale del principio dei lavori virtuali.

In tal caso la densità di δF è opposta al prodotto del fattore intensivo ξ_{ik} per il fattore estensivo δp^{ik} .

Riferendoci invece alla (15), riconosciamo che δF è opposto al prodotto di un fattore intensivo Ω , che uguagliato a zero dà la condizione di congruenza, per un fattore estensivo che è la variazione $\delta\chi$ della funzione di Airy, mediante la quale si esprimono gli sforzi equilibrati.

Quanto si è detto nel caso piano sussiste inalterato nel caso di una membrana tesa su di una superficie a curvatura costante e sussiste sostanzialmente anche nel caso di un continuo tridimensionale. Qui però il fattore intensivo è il tensore doppio simmetrico Ω^{hj} , che uguagliato a zero dà le condizioni di congruenza e il fattore estensivo è la variazione $\delta\chi_{hj}$ del tensore doppio simmetrico che riassume tutti gli elementi arbitrari corrispondenti a sforzi equilibrati.

Le precedenti osservazioni ci consentono di dare una espressiva interpretazione fisica agli elementi arbitrari χ , analoghi alla funzione di Airy, e agli enti Ω che uguagliati a zero danno le condizioni di congruenza: diremo i primi *funzione o tensore di equilibrio*, i secondi *funzione o tensore di congruenza*.

In Fisica l'energia, nelle sue varie forme meccaniche, termiche, elettriche, ecc. si presenta sempre come prodotto di due fattori: un fattore intensivo ed uno estensivo. Nello stesso modo si presentano le densità di energia e il passaggio dalla prima forma energetica alla seconda (duale) si ottiene semplicemente scambiando tra loro l'ufficio del fattore intensivo e del fattore estensivo.

Così ad esempio l'energia meccanica si presenta come prodotto di un fattore intensivo forza per un fattore estensivo spostamento, oppure di un fattore intensivo momento per un fattore estensivo angolo di rotazione, e più generalmente di un fattore intensivo componente Lagrangiana di una sollecitazione attiva per un fattore estensivo variazione della corrispondente coordinata; così il calore si presenta come prodotto del fattore intensivo temperatura assoluta per il fattore estensivo incremento di entropia; così l'energia elettrostatica si presenta come prodotto del fattore intensivo carica elettrica per il fattore estensivo incremento di potenziale elettrico, ecc. Fra la densità di energia si ricordi quella di un fluido, prodotto del fattore intensivo pressione per quello estensivo variazione di volume specifico, quella di un continuo deformabile generico, prodotto del fattore intensivo tensore degli sforzi per il fattore estensivo incremento di deformazione, quella di un dielettrico, prodotto del fattore intensivo campo elettrico per il fattore estensivo induzione elettrica, ecc.

Si noti poi che molte delle quantità fisiche precedenti trovano la loro più significativa e più appropriata definizione proprio nell'ufficio messo in luce.

Così dunque possiamo affermare che la funzione di equilibrio χ e più generalmente il tensore di equilibrio χ_{hj} rappresentano il fattore estensivo in una densità di seconda energia, mentre la funzione di congruenza Ω o più generalmente il tensore di congruenza Ω^{hj} ne rappresentano il corrispondente fattore intensivo.

Della funzione di Airy χ e del tensore di equilibrio χ_{hj} sono stati dati espressivi significati attraverso momenti⁽⁵⁾. Le considerazioni precedenti ce ne forniscono un altro altrettanto espressivo.

Nuovo invece mi risulta il significato dato alla Funzione e al Tensore di congruenza, che tanto comunemente intervengono, senza che se ne ravvisi il significato fisico, nei problemi della Meccanica dei continui deformabili in generale e della Scienza delle costruzioni in particolare.

(5) E. TREFFTZ, *Mathematische Elastizitätstheorie*, in *Handbuch der Physik*, VI, Berlin, 1928;

L. SOBRERO, *Del significato meccanico della funzione di Airy*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXI, 1935. « Ricerche di Ingegneria », III, 1935;

G. PERETTI, *Significato del tensore arbitrario che interviene nell'integrale generale delle equazioni della statica dei continui*, « Atti Sem. Mat. e Fis. dell'Univ. di Modena », vol. III, 1948;

L. FINZI, *Sulle equazioni di Pucher nell'equilibrio delle strutture a guscio*, « Rend. Ist. Lomb. Sc. e Lett. », vol. LXXXVIII, 1955.

Meccanica celeste. — *Piccoli movimenti in una massa gassosa stellare in evoluzione adiabatica.* Nota I di CATALDO AGOSTINELLI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Sono ben note le teorie dell'equilibrio adiabatico e dell'equilibrio radiativo di una massa gassosa stellare sferica, le quali, nell'ipotesi semplificativa di Eddington per la seconda, riconducono la determinazione della densità, della pressione e della temperatura in un punto interno alla risoluzione dell'equazione di Emden ⁽¹⁾. Ma è ben noto altresì come le masse gassose stellari non siano propriamente in equilibrio, avendosi delle oscillazioni, più o meno periodiche, dell'energia irradiata, della densità, della pressione e della temperatura, intorno ai loro valori medi, dovute a pulsazioni dell'astro. Questo fenomeno, come si sa, ha molta importanza nelle Cefeidi, che presentano variazioni di luminosità di moderata ampiezza e di breve periodo, ma di grande regolarità, per cui si rendono estremamente utili per la misura delle grandi distanze, essendo il periodo collegato con la luminosità.

Sotto questo punto di vista ho ritenuto non privo di interesse studiare i piccoli movimenti interni in una massa gassosa stellare e le conseguenti variazioni delle caratteristiche di densità, di pressione e di temperatura.

In questa prima Nota considero il caso dell'evoluzione adiabatica, riconducendo la questione alla determinazione della velocità delle particelle fluide mediante la risoluzione di un'equazione differenziale vettoriale del 2° ordine alle derivate parziali. Nel caso particolarmente importante di moto puramente radiale, con grandezze dipendenti soltanto dal raggio e dal tempo, si ha una sola equazione differenziale scalare del 2° ordine che ammette soluzioni sinusoidali rispetto al tempo, la cui ampiezza è definita da una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine suscettibile di integrazione numerica.

In una Nota successiva sarà studiato il caso dei piccoli movimenti della massa gassosa stellare nell'intorno delle condizioni di equilibrio radiativo.

2. Poiché una massa gassosa altamente ionizzata, com'è quella stellare, si può considerare come un fluido perfetto, se si indica con U il potenziale delle forze di mutua attrazione in punti interni, con p la pressione, con ρ la densità e con \mathbf{v} la velocità di una particella, trascurando la pressione della energia raggiante, l'equazione vettoriale indefinita che regge il movimento interno del fluido, scritta dal punto di vista euleriano, risulta notoriamente

$$(I) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{grad } (\mathbf{v}^2) = \text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *I fondamenti scientifici della astrofisica*, P. II, Cap. V (Hoepli, Milano, 1953).

alla quale va associata l'equazione di continuità

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

e, trattandosi di trasformazioni adiabatiche, tra la pressione e la densità si avrà la relazione

$$(3) \quad p = C \rho^\gamma$$

dove C è una costante e γ è il rapporto tra i calori specifici del gas a pressione costante e a volume costante. Inoltre tra la pressione p e la temperatura (assoluta) T si ha la relazione

$$(4) \quad p = \frac{R}{g} \rho T$$

essendo R la costante dei gas e g il peso molecolare.

In virtù delle (3), ponendo

$$(5) \quad \gamma = 1 + \frac{1}{\nu}$$

si ha

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = C (\nu + 1) \operatorname{grad} \rho^{\frac{1}{\nu}}$$

e quindi l'equazione (1) diventa

$$(6) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{rot} \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 = \operatorname{grad} \left[U - C (\nu + 1) \rho^{\frac{1}{\nu}} \right].$$

Tenendo conto inoltre dell'equazione di Poisson alla quale soddisfa il potenziale U in punti interni:

$$(7) \quad \Delta_2 U \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} U = -4 \pi f \rho,$$

se si prende la divergenza di ambo i membri della (6) si ottiene

$$(8) \quad \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \Delta_2 (v^2) + 4 \pi f \rho + C (\nu + 1) \Delta_2 \left(\rho^{\frac{1}{\nu}} \right) = 0.$$

La (8) e la (2) costituiscono due equazioni in cui figurano come incognite soltanto la densità ρ e la velocità \mathbf{v} delle particelle gassose. Determinate queste quantità avendo riguardo alle condizioni iniziali, e ad eventuali condizioni ai limiti, la (3) fornisce la pressione p in ogni punto interno alla massa gassosa, e la (4) la temperatura T .

3. Nel caso di piccoli movimenti interni, supponendo di poter trascurare i termini di ordine superiore al primo nella velocità \mathbf{v} , la (8) diventa

$$(9) \quad \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial t} + 4 \pi f \rho + C (\nu + 1) \Delta_2 \left(\rho^{\frac{1}{\nu}} \right) = 0.$$

Da questa, derivando ambo i membri rispetto a t , e tenendo conto della (2) e della (5), si ricava

$$(10) \quad \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - 4 \pi f \rho \mathbf{v} - C \gamma \operatorname{grad} \left[\rho^{\frac{1}{v}-1} \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \right] \right\} = 0,$$

da cui segue l'equazione

$$(10') \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - 4 \pi f \rho \mathbf{v} - C \gamma \operatorname{grad} \left[\rho^{\frac{1}{v}-1} \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \right] = \operatorname{rot} \mathbf{w}$$

con \mathbf{w} vettore arbitrario, funzione del punto e del tempo, eventualmente nullo.

Osserviamo ora che nel caso di una massa gassosa sferica in equilibrio adiabatico, e nell'ipotesi che la densità ρ vari solo con la distanza r dal centro, la (9) si riduce alla ben nota equazione di Emden

$$(9') \quad 4 \pi f \rho + C(v+1) \left(\frac{d^2 \rho^{\frac{1}{v}}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho^{\frac{1}{v}}}{dr} \right) = 0.$$

Trattandosi allora di piccoli movimenti nell'intorno di quello stato di equilibrio sferico, possiamo porre

$$(11) \quad \rho = \rho^*(r) [1 + \xi(P, t)],$$

essendo $\rho^*(r)$ la densità nel caso dell'equilibrio, soddisfacente alla (9'), e $\xi(P, t)$ una quantità dello stesso ordine di grandezza della velocità \mathbf{v} . Ne segue che se nella (10) e nella (10') trascuriamo i termini di ordine superiore al primo rispetto a \mathbf{v} e a ξ , esse diventano rispettivamente

$$(12) \quad \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - 4 \pi f \rho^* \mathbf{v} - C \gamma \operatorname{grad} \left[\rho^{*\frac{1}{v}-1} \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v}) \right] \right\} = 0$$

$$(12') \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - 4 \pi f \rho^* \mathbf{v} - C \gamma \operatorname{grad} \left[\rho^{*\frac{1}{v}-1} \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v}) \right] = \operatorname{rot} \mathbf{w},$$

dove nell'una, oppure nell'altra, è incognita la sola velocità \mathbf{v} , mentre $\rho^*(r)$ si intenderà nota dalla risoluzione dell'equazione (9') di Emden con la condizione che sia $d\rho^*/dr = 0$, per $r = 0$.

Nello stesso ordine di approssimazione la (2) porge

$$(13) \quad \rho^* \frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v}) = 0,$$

la quale, dopo aver determinato la velocità \mathbf{v} , con la condizione che sia $\mathbf{v} = 0$ per $r = 0$, fornirà con una quadratura rispetto al tempo la quantità ξ che definisce la variazione di densità.

Osserviamo ancora che in modo analogo la (6) nel caso dei piccoli movimenti si riduce alla

$$(14) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{grad} \left[U - C(v+1) \rho^{\frac{1}{v}} \right]$$

e da questa si deduce che, a meno di piccoli moti stazionari, esisterà un potenziale Φ di velocità funzione del punto P e del tempo t . Si potrà cioè porre

$$(15) \quad \mathbf{v} = \text{grad } \Phi(P, t)$$

e sostituendo nella (12) si ha per la determinazione del potenziale di velocità Φ l'equazione differenziale del 4° ordine

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \Delta_2 \Phi}{\partial t^2} - 4 \pi f \text{div} (\rho^* \text{grad } \Phi) - C_Y \Delta_2 \left[\rho^{*\frac{1}{v}-1} \text{div} (\rho^* \text{grad } \Phi) \right] = 0$$

essendo

$$(17) \quad \text{div} (\rho^* \text{grad } \Phi) = \rho^* \Delta_2 \Phi + \frac{d\rho^*}{dr} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Avendo riguardo all'equazione (9') cui soddisfa la $\rho^*(r)$, con facile calcolo la (16) si trasforma nella seguente

$$(16') \quad \frac{\partial^2 \Delta_2 \Phi}{\partial t^2} - C_Y \left\{ \rho^{*\frac{1}{v}} \Delta_2 \Delta_2 \Phi + \frac{d\rho^{*\frac{1}{v}}}{dr} \left[(v+2) \Delta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{4}{r} \Delta_2 \Phi - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4(v-1)}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2(v+2)}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] \right\} - 4 \pi f \rho^* \left(\frac{v-1}{v} \Delta_2 \Phi - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) = 0.$$

Se la funzione Φ si suppone rappresentabile con una serie di funzioni sferiche della forma

$$\Phi = \sum_n \Phi_n(r, t) Y_n(\vartheta, \varphi),$$

il cui secondo membro può ridursi ad un numero finito di termini, od anche ad uno solo, indicando con $\nabla_2^{(n)}$ l'operatore differenziale

$$\nabla_2^{(n)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2}$$

e ricordando l'equazione differenziale alla quale soddisfano le funzioni di Laplace $Y_n(\vartheta, \varphi)$, dalla (16') si ha per ciascuna Φ_n l'equazione

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \nabla_2 \Phi_n}{\partial t^2} - C_Y \left\{ \rho^{*\frac{1}{v}} \nabla_2^{(n)} \nabla_2^{(n)} \Phi_n + \frac{d\rho^{*\frac{1}{v}}}{dr} \left[(v+2) \nabla_2^{(n)} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} - \frac{4}{r} \nabla_2^{(n)} \Phi_n - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4(v-1)}{r} \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} + \frac{2(v+2)}{r^2} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \right] \right\} - 4 \pi f \rho^* \left(\frac{v-1}{v} \nabla_2^{(n)} \Phi_n - 2 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} \right) = 0.$$

Poiché la velocità deve essere nulla nel centro, le Φ_n andranno determinate con la condizione che ciascuna di esse si annulli per $r=0$ insieme alla derivata rispetto ad r .

Se della (17) si considerano ad esempio soluzioni sinusoidali rispetto al tempo di una data frequenza, da essa si elimina il tempo e si ha un'equazione differenziale ordinaria del 4° ordine in una funzione incognita della sola variabile r .

4. Un caso particolarmente importante è quello in cui la velocità è diretta radialmente ed è funzione soltanto di r e di t , si ha cioè pulsazione puramente radiale della massa gassosa stellare. In questo caso, riferendoci alla (12'), si riconosce facilmente che $\text{rot } \mathbf{w}$ deve essere nullo. Invero questo vettore dovendo essere diretto radialmente dovrebbe essere della forma

$$\text{rot } \mathbf{w} = F(r, t) \text{ grad } r,$$

da cui prendendo la divergenza di ambo i membri si deduce

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 F) = 0$$

e quindi

$$F = \frac{C(t)}{r^2},$$

con $C(t)$ funzione arbitraria del tempo. Ma la F dovrà essere finita per $r=0$, sarà quindi necessariamente $C=0$, $F=0$, $\text{rot } \mathbf{w}=0$. Allora, posto

$$\mathbf{v} = v(r, t) \text{ grad } r$$

la (12') dà luogo all'unica equazione scalare

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 4\pi f \rho^* v - C_Y \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \rho^{*\frac{1}{v}-1} \left[\frac{\partial (\rho^* v)}{\partial r} + \frac{2}{r} \rho^* v \right] \right\} = 0,$$

che, avendo riguardo all'equazione (9') cui soddisfa la ρ^* , si riduce alla seguente

$$(18) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - C_Y \left\{ \rho^{*\frac{1}{v}} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \left[(v+1) \frac{d\rho^{*\frac{1}{v}}}{dr} + \frac{2}{r} \rho^{*\frac{1}{v}} \right] \frac{\partial v}{\partial r} - \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{v-1}{r} \frac{d\rho^{*\frac{1}{v}}}{dr} + \frac{1}{r^2} \rho^{*\frac{1}{v}} \right) v \right\} = 0,$$

che è un'equazione differenziale del 2° ordine dalla quale la v va determinata con la condizione che si annulli per $r=0$.

Nel caso di pulsazioni sinusoidali rispetto al tempo di periodo $T = 2\pi/\Omega$, ponendo

$$v = V(r) \sin \Omega(t - t_0)$$

la (18) porge per la $V(r)$ l'equazione

$$(19) \quad \rho^{*\frac{1}{v}} \frac{d^2 V}{dr^2} + \left[(v+1) \frac{d\rho^{*\frac{1}{v}}}{dr} + \frac{2}{r} \rho^{*\frac{1}{v}} \right] \frac{dV}{dr} - \\ - 2 \left(\frac{v-1}{r} \frac{d\rho^{*\frac{1}{v}}}{dr} + \frac{1}{r^2} \rho^{*\frac{1}{v}} - \frac{\Omega^2}{2C_Y} \right) V = 0,$$

mentre, posto

$$\xi = \xi_1(r) \cos \Omega(t - t_0)$$

la (13) porge per la $\xi_1(r)$ il valore

$$\xi_1 = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{dV}{dr} + \left(\frac{d \log \rho^*}{dr} + \frac{2}{r} \right) V \right].$$

Con riferimento alla stella tipica di Emden, ponendo

$$(20) \quad \rho^* = l^v Y^v, \quad r = hX,$$

dove l è una costante che rappresenta il valore di $\rho^{*\frac{1}{v}}$ nel centro della stella ed h è un'altra costante definita dalla

$$(21) \quad h^2 = \frac{C(v+1)}{4\pi f l^{v-1}},$$

la (9') si riduce alla ben nota equazione

$$(22) \quad \frac{d^2 Y}{dX^2} + \frac{2}{X} \frac{dY}{dX} + Y^v = 0$$

della quale va considerato l'integrale tale che per $X=0$ sia $Y=1$ e $dY/dX=0$, integrale che come si sa è stato calcolato numericamente per diversi valori di v . In quanto alle costanti h ed l esse sono facilmente determinabili quando si conosce la massa M e il raggio della stella reale, od anche la massa e la densità media ⁽²⁾.

Considerando allora un moto puramente radiale e sinusoidale rispetto al tempo di pulsazione Ω , la (19) si trasforma nella seguente equazione

$$Y \frac{d^2 V}{dX^2} + \left[(v+1) \frac{dY}{dX} + \frac{2}{X} Y \right] \frac{dV}{dX} - 2 \left(\frac{v-1}{X} \frac{dY}{dX} + \frac{1}{X^2} Y - \frac{\Omega^2 h^2}{2C_Y l} \right) V = 0$$

il cui integrale che si annulli per $X=0$, mentre la derivata assuma un valore assegnato, è suscettibile di determinazione numerica.

Astronomia. — *Sulla stabilità degli ammassi globulari nella più generale ipotesi della distribuzione sferica della loro densità.* Nota I di MASSIMO CIMINO, presentata ^(*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Nell'ipotesi di omogeneità e simmetria sferica della distribuzione stellare in un ammasso globulare, la questione della stabilità delle orbite delle singole stelle dell'ammasso rispetto alle perturbazioni galattiche si può riattribuire ai classici lavori di G. Schiaparelli, C. L. Charlier e L. Picart sulla stabilità dei nuclei cometari sotto l'azione perturbatrice dell'attrazione solare ⁽¹⁾.

(2) Cfr. G. ARMELLINI, loco citato.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Cfr. per esempio F. TISSERAND, *Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, T. IV, 1896, Cap. XVI. Del problema della stabilità delle stelle interne ad un ammasso omogeneo si è occupato recentemente anche F. ZAGAR (in « Memorie della Soc. Astr. Ital. », vol. XXV, 1954, p. 75), giungendo — con procedimento del tutto differente — alla conclusione che, sotto l'azione della perturbazione galattica, le stelle *interne* all'ammasso *omogeneo* sono in parte stabili e in parte instabili. Tale conclusione non si accorda con quanto può dedursi dal lavoro dello CHARLIER, che è confermato nella presente Nota come caso particolare di uno più generale.

Possiamo distinguere due casi: il primo in cui l'orbita dell'ammasso globulare attorno al centro del sistema galattico [supposto anche esso a simmetria sferica] sia *circolare*; l'altro, invece, in cui l'orbita sia fortemente ellittica. Questo secondo caso - che, secondo alcune più recenti ricerche, sarebbe del più alto interesse anche per gli ammassi globulari ⁽²⁾ - non sarà però preso in esame, mentre nella presente Nota ci limiteremo soltanto al primo, del quale ora riassumiamo i principali risultati ottenuti dai citati autori.

Chiamiamo con m la massa totale dell'ammasso globulare *omogeneo*, M quella del sistema galattico, R il raggio dell'ammasso ed a la sua distanza dal centro galattico. Distinguiamo due casi: 1) l'orbita della stella [di cui si vuole studiare la stabilità] è totalmente *interna* all'ammasso; 2) l'orbita è, invece, totalmente *esterna*. Nel primo caso il moto imperturbato della stella è un moto ellittico armonico, nel secondo caso, un moto kepleriano. Dal citato lavoro dello Charlier si ha, per la *stabilità del moto interno*, la condizione:

$$(1) \quad a > \sqrt[3]{3 \frac{M}{m}} \cdot R,$$

mentre dal lavoro del Picart si ottiene, per la *stabilità del moto esterno*:

$$(2) \quad a > 3 \sqrt[3]{3 \frac{M}{m}} \cdot b,$$

essendo b il semi-grand'asse del moto kepleriano. Osserviamo che, essendo $fM = n^2 a^3$ e - per una stella *periferica* che si muova di moto *circolare* - $fm = w_p^2 R^3$ (con w_p sua velocità angolare), la (1) si può anche scrivere:

$$(1') \quad w_p > \sqrt[3]{3} \cdot n.$$

Come si vede dal confronto delle (1) e (2), nel passaggio dalle orbite interne a quelle esterne vi è, per così dire, una *brusca* diminuzione della stabilità. Inoltre, se la (1) è soddisfatta, *le orbite interne all'ammasso omogeneo sono tutte stabili*, mentre per la (2) la stabilità delle orbite *esterne* diminuisce col crescere del semi-grand'asse, fino a cessare del tutto per un valore di b sufficientemente grande.

Assumiamo, a titolo di esempio:

$$m = 10^5 \odot \quad ; \quad M = 11^{11} \odot \quad ; \quad R = 40 \text{ parsec}$$

e consideriamo una stella dell'ammasso che descriva un'orbita (imperturbata) circolare proprio alla periferia dell'ammasso. Se l'orbita è interna, dovrà essere, per la sua stabilità rispetto alla perturbazione galattica: $a > 6.900 \text{ parsec}$; se, invece, l'orbita è immediatamente esterna dovrà essere: $a > 20.700 \text{ parsec}$. Nel primo caso la stabilità dell'orbita è dunque probabile, mentre sembra

(2) Secondo queste ricerche di carattere statistico, dovute principalmente a Von Hoerner, gli ammassi globulari descriverebbero orbite fortemente ellittiche (quasi radiali) attorno al centro galattico, anziché orbite quasi circolari, come si riteneva fino ad oggi.

dubbia nel secondo ⁽³⁾. Tenendo allora presente l'incertezza che si ha nello stabilire il raggio R dell'ammasso e nella decisione circa la posizione interna od esterna delle stelle periferiche, ne risulta una notevole incertezza nella applicazione delle (1) e (2) – così come esse sono state ricavate dai citati autori – allo studio della stabilità degli ammassi globulari.

Ma sorgono, inevitabilmente, altre questioni. In realtà gli ammassi globulari posseggono una più o meno accentuata concentrazione centrale, la quale non può mancare dall'avere la sua influenza sulla stabilità dell'ammasso. È naturale allora domandarsi come si modifica la stabilità dell'ammasso al variare della sua concentrazione centrale. Inoltre, la (2) mostra che, per le stelle *esterne* all'ammasso [omogeneo], esiste una distanza limite b dal centro dell'ammasso, oltre la quale la traiettoria diviene instabile. Ora è evidente che la distinzione tra stelle interne ed esterne all'ammasso è, come l'ipotesi della omogeneità da cui deriva, artificiosa. È necessario eliminarle ambedue. Ne risulterà, spontaneamente, una condizione, che definirà anche essa una distanza limite per la stabilità; e questa distanza potrà essere considerata come il *massimo raggio* dell'ammasso, nell'interno del quale le stelle sono tutte stabili mentre sono instabili all'esterno e perciò definitivamente perdute dall'ammasso.

Nella presente Nota la questione della stabilità per le perturbazioni galattiche sarà ripresa nella ipotesi più generale possibile per la distribuzione stellare nell'ammasso, conservando solo la simmetria sferica. Le condizioni dello Charlier e del Picart risulteranno come casi particolari. In un altro lavoro, che comparirà in questi « Rendiconti », applicheremo le trovate condizioni generali di stabilità agli ammassi reali e risponderemo ai quesiti che ci siamo posti dianzi. Precisamente, vedremo che *la concentrazione centrale tende a favorire la stabilità*, mentre dalla limitazione che dà la distanza limite dal centro dell'ammasso delle stelle stabili risulterà per l'ammasso un *raggio massimo*, che, a parità di massa e di concentrazione, *può ritenersi con buona approssimazione proporzionale alla distanza dell'ammasso del centro galattico*, e ciò in conformità alle più recenti ricerche statistiche effettuate in questo campo ⁽⁴⁾.

2. Sia (fig. 1) una terna cartesiana $G(x, y, z)$ di assi inerziali, ancorata nel centro G del sistema galattico, col piano (x, y) coincidente con quello dell'orbita circolare attorno a G dell'ammasso globulare di centro O . Sia poi una terna mobile $O(\xi, \eta, \zeta)$, ancorata in O , col piano (ξ, η) coincidente anche esso con quello (x, y) ed asse delle ξ diretto, istante per istante, nella direzione \overrightarrow{GO} . Indichiamo infine con n la velocità angolare del moto circolare di O attorno a G , notoriamente legata al raggio a dell'orbita circolare dalla relazione:

$$(5) \quad fM = n^2 a^3$$

(3) Secondo i risultati più recenti, le distanze degli ammassi globulari dal centro galattico variano tra i 1.500 e i 65.000 *parsec* circa.

(4) Cfr. W. LOHMANN, « Zeitschrift für Astrophysik », 1953.

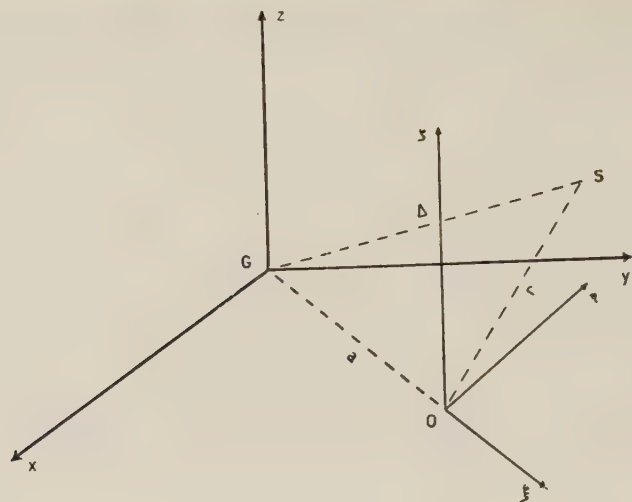


Fig. 1.

[f = coefficiente attrattivo; M = massa della Galassia supposta concentrata in G], e con $U(r)$ il potenziale newtoniano unitario - per il momento, generica funzione di r - generato dall'ammasso in un punto S situato alla distanza r da O . Come è noto ⁽⁵⁾ supponendo piccole le dimensioni dell'ammasso rispetto alla distanza dal centro galattico, le equazioni del *moto relativo* di una stella generica S dell'ammasso rispetto alla terna mobile $O(\xi, \eta, \zeta)$, sotto la duplice attrazione dell'ammasso e del centro galattico G , possono scriversi nella forma:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \xi}{dt^2} - 2n \frac{d\eta}{dt} - 3n^2 \xi = \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + 2n \frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + n^2 \zeta = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \end{array} \right.$$

(5) Cfr. per esempio F. TISSERAND, loc. cit.; oppure: C. L. CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, Von Veit, Leipzig 1907; Bd. II, p. 141. Si arriva alle (6) immediatamente calcolando le componenti $(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta})$ dell'accelerazione relativa con la nota formula del Coriolis, e tenendo presente che le componenti delle accelerazioni assolute, di trascinamento e complementari sono rispettivamente (rispetto agli assi mobili):

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\frac{fM}{\Delta^3} (a + \xi) + \frac{\partial U}{\partial \xi} & ; & -\frac{fM}{\Delta^3} \eta + \frac{\partial U}{\partial \eta} & ; & -\frac{fM}{\Delta^3} \zeta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \\ -n^2 (a + \xi) & ; & -n^2 \eta & ; & 0 \\ -2n\dot{\eta} & ; & +2n\dot{\xi} & ; & 0. \end{array} \right.$$

Si porrà poi, per la accennata approssimazione (che trascura rispetto ad a i termini del 2° ordine in ξ, η e ζ):

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{a^3} \left(1 - 3 \frac{\xi}{a} \right).$$

Lo studio di questo sistema, in vista della stabilità⁽⁶⁾ del moto relativo di S, si può effettuare con metodo classico. Moltiplicando rispettivamente le (6) per $2 \frac{d\xi}{dt}$, $2 \frac{d\eta}{dt}$, $2 \frac{d\zeta}{dt}$ e sommando, avremo facilmente:

$$d[V^2 - 3n^2\xi^2 + n^2\zeta^2] = 2dU(r)$$

[essendo V il modulo della velocità relativa di S], e quindi:

$$(7) \quad V^2 = 2U(r) + 3n^2\xi^2 - n^2\zeta^2 + 2E,$$

che altro non è che il ben noto *integrale* di Jacobi. Con la costante E si è indicata la energia totale di S, di *massa unitaria*, nel suo moto relativo all'ammasso.

È facile, a questo punto, assegnare le condizioni di stabilità [nel senso indicato] del moto di S: è necessario e sufficiente, per la stabilità, che la superficie: $V^2 = 0$, ossia:

$$(8) \quad 2U(r) + 3n^2\xi^2 - n^2\zeta^2 + 2E = 0,$$

presenti una falda *chiusa* attorno all'origine O, e che inoltre risulti positivo nell'interno di tale falda il primo membro della (8). In tal modo resta stabilita, evidentemente, una limitazione per l'energia totale E del moto relativo, limitazione che andiamo ora ad esplicitare.

Continuiamo a mantenerci nell'ipotesi più generale per il potenziale newtoniano $U(r)$; ammetteremo perciò, per la densità dell'ammasso, la più generale distribuzione a simmetria sferica [con massa totale finita]. Notoriamente, possiamo allora assumere $U(r)$ come una funzione positiva di r — e, perciò, *pari* di ξ, η, ζ —, continua con le sue derivate prime, regolare e nulla allo infinito. Essa avrà un massimo $U(0)$ per $r = 0$ e sarà funzione decrescente⁽⁷⁾ di r , tendente a zero per r infinito. Ciò posto, essendo anche il primo membro delle (8) una funzione *pari* di ξ, η, ζ , basta studiare il comportamento delle curve ottenute dall'intersezione di un ottante della superficie con i piani passanti per l'asse delle ζ . Ponendo allora:

$$\begin{cases} \xi = r \cos \psi \cos \varphi & ; & \eta = r \cos \psi \sin \varphi & ; & \zeta = r \sin \psi \\ 0 \leq \psi \leq \pi/2 & ; & 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \end{cases}$$

la (8) diviene:

$$(9) \quad 2[U(r) + E] = n^2 r^2 [\sin^2 \psi - 3 \cos^2 \psi \cos^2 \varphi],$$

(6) Con la parola *stabilità* noi intendiamo qui caratterizzare quei tipi di movimento nei quali la particella mobile rimane indefinitamente confinata in una regione *limitata* attorno al centro O.

(7) A tutto rigore, $U(r)$ potrebbe risultare costante in un tratto attorno all'origine nel caso (privo di interesse reale) che l'ammasso presenti una cavità al centro.

la quale, fissando un valore di φ , rappresenta anche - al variare di r e ψ - la cercata intersezione col piano passante per l'asse delle ζ . Distinguiamo allora due casi: 1° $\varphi = \pi/2$; 2° $0 \leq \varphi < \pi/2$. Nel primo caso l'intersezione giace sul piano $\xi = 0$; si vede subito che, essendo $U(r)$ positiva, decrescente con r e tendente a zero per r tendente all'infinito, le due curve (nelle variabili y ed r):

$$y = 2 [U(r) + E] \quad ; \quad y = n^2 \sin^2 \psi \cdot r^2$$

hanno, qualunque sia ψ , un punto comune al finito, purché per la E sia soddisfatta la limitazione:

$$(I) \quad 0 > E > -U(0), \quad [\text{essendo } U(0) > 0].$$

Nel secondo caso, invece, le due curve [y ed r variabili, φ e ψ parametri]:

$$y = 2 [U(r) + E] \quad ; \quad y = n^2 [\sin^2 \psi - 3 \cos^2 \psi \cos^2 \varphi] \cdot r^2,$$

posta già la condizione (I), ammetteranno pur esse un punto comune al finito qualunque siano φ e ψ , purché l'equazione:

$$(II) \quad 2 [U(r) + E] = -3 n^2 r^2$$

ammetta una radice r reale e positiva.

Le (I)-(II) rappresentano le condizioni cui deve soddisfare l'energia totale E della stella dell'ammasso affinché la superficie (8) di Jacobi abbia una falda chiusa attorno al centro O dell'ammasso. Poiché dalla (I) risulta anche $U(0) + E > 0$, ne consegue che il primo membro della (8) è positivo all'origine e tale rimarrà in tutto l'interno della falda chiusa, che rappresenta pertanto la zona di stabilità. È da osservare, inoltre, che *la vera e propria condizione di stabilità del moto delle stelle rispetto alle perturbazioni galattiche è la condizione (II)*, poiché le limitazioni (I) rispecchiano semplicemente le condizioni alle quali deve soddisfare l'energia del moto *imperturbato* della stella sotto l'attrazione dell'ammasso, affinché tale moto sia realmente possibile e si svolga tutto a distanza finita ⁽⁸⁾.

3. Facciamo ora vedere come dalle condizioni generali (I) e (II), si possano ricavare le condizioni (1) (2) già trovate da Charlier e Picart per gli ammassi omogenei. In questa ipotesi è [esprimendo il coefficiente attrattivo f per mezzo della (5)]:

$$U(0) = \frac{3}{2} \frac{fm}{R} = \frac{3}{2} \frac{n^2 a^3}{R} \cdot \frac{m}{M},$$

(8) Il moto *imperturbato* è, infatti, un moto centrale con forza dipendente dalla distanza dal centro. La condizione: $E < 0$ è necessaria per assicurare che l'orbita imperturbata si svolga tutta a distanza finita, mentre dall'integrale delle forze vive: $\frac{1}{2} v^2 - U(r) = E$ deve risultare, per la realtà di v , $E > -(\text{massimo valore di } U) = -U(0)$.

e la (I) si scriverà, intanto:

$$(10) \quad 0 > E > -\frac{3}{2} \frac{n^2 a^3}{R} \cdot \frac{m}{R}.$$

Distinguiamo ora i due sottocasi: 1° l'orbita imperturbata sia completamente *interna* all'ammasso omogeneo; 2° l'orbita sia completamente *esterna*. Nel primo caso la (II) si scriverà ⁽⁹⁾:

$$-\frac{n^2 a^3}{R} \cdot \frac{m}{M} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) + 3 n^2 r^2 + 2 E = 0$$

ed è facile verificare che, affinché questa equazione ammetta una radice r reale e positiva, deve essere [tenendo conto della (10)]:

$$(11) \quad \frac{m}{M} \cdot \left(\frac{a}{R} \right)^3 > 3,$$

che coincide con la (I). Nel secondo caso la (II) si scriverà invece:

$$2 \frac{n^2 a^3}{r} \cdot \frac{m}{M} + 3 n^2 r^2 + 2 E = 0,$$

ossia:

$$3 n^2 r^3 + 2 E r + 2 n^2 a^3 \frac{m}{M} = 0.$$

Tenendo presente che è $E < 0$, se questa equazione ammettesse una sola radice reale, questa sarebbe negativa. Perciò dobbiamo cercare la condizione affinché l'equazione ammetta tre radici reali, due delle quali saranno allora certamente positive. Deve dunque essere, per il discriminante dell'equazione cubica:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} a^3 \frac{m}{M} \right)^2 + \frac{1}{27} \left(\frac{2 E}{3 n^2} \right)^3 < 0 \quad ; \quad (E < 0),$$

da cui:

$$(12) \quad (2 E)^3 < -27 \cdot (3 n^2)^3 \cdot \left(\frac{a^3 m}{3 M} \right)^2.$$

Essendo, d'altra parte, la traiettoria tutta esterna all'ammasso, essa sarà una ellisse kepleriana di semi-grand'asse: $b = -\frac{f m}{2 E} = -n^2 a^3 \frac{m}{M} \frac{1}{2 E}$, onde la [12] si può scrivere:

$$(13) \quad \frac{m}{M} > 3 \left(\frac{3 b}{a} \right)^3,$$

che coincide con la (2).

Come ho detto al n. 1, in un'altra Nota, che comparirà in questi « Rendiconti », applicherò le condizioni generali (I) e (II) di stabilità al caso concreto degli ammassi globulari.

(9) Ricordiamo che il potenziale $U(r)$ interno alla distribuzione sferica omogenea può scriversi: $U(r) = \frac{f m}{2 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right).$

Astronomia. — *Sopra l'orbita della binaria π_2 Ursae Minoris* (ADS 9769). Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Tra i sistemi binari visuali più stretti, va annoverata la π_2 Ursae Minoris (ADS 9769; $\alpha = 15^h 42^m,3$ $\delta = + 80^\circ 08'$; eq. 1950). Infatti la distanza fra le componenti della coppia non raggiunge il secondo di arco, poiché all'apastro è di circa $0'',62$, mentre al periastro il raggio vettore è addirittura dell'ordine del centesimo di secondo d'arco.

Questo fatto influisce notevolmente sulla precisione delle misure e l'Aitken stesso, nel suo Catalogo, dichiara che le osservazioni sono molto difficili. Basta anzi dare uno sguardo alla serie di misure, che si iniziano nel 1832, per notare quanto divario vi sia, a volte, fra due misure contemporanee, sia per gli angoli di posizione ϑ che per i raggi vettori ρ .

Inoltre, dall'esame delle osservazioni, appare chiaro che l'orbita descritta dal satellite ha una forte eccentricità, poiché la sua velocità angolare è grandissima intorno al periastro (dal 1890 al 1910, il satellite ha percorso un arco di circa duecento novanta gradi) mentre diventa molto piccola dopo mezza rivoluzione, tanto che negli ultimi venti anni, l'arco percorso è di soli dieci gradi. Non è anzi da escludere che intorno al periastro, essendo la velocità angolare del satellite così elevata, sia possibile notare variazioni anche nello spettro del sistema ed in tal modo integrare con le misure spettroscopiche quelle visuali assolutamente difficili ed imprecise. In ogni modo, per ora, l'unica orbita calcolata è quella di R. H. Wilson⁽¹⁾ che si basa sopra le misure eseguite fino al 1934. Tale orbita, che approssima soddisfacentemente le osservazioni esistenti fino a quell'epoca, comincia però a dare dei residui piuttosto forti in ρ per le osservazioni più recenti.

Ho ripreso perciò il problema, facendone oggetto della presente Nota.

2. Per calcolare una nuova orbita, ho usato le osservazioni pubblicate nei Cataloghi del Burnham e dell'Aitken ed altre posteriori, ancora inedite, gentilmente inviatemi dal professore P. Müller astronomo dell'Osservatorio di Strasburgo, e segretario della Commissione per le stelle doppie, dell'Unione Astronomica Internazionale. Queste osservazioni sono riportate nella Tabella I.

Ad ogni misura dell'angolo di posizione ϑ ho apportato la nota correzione per la precessione:

(1) $20'' \sin \alpha \sec \delta (t^\circ - t) = - 0,02674 (1950 - t)$ (dove t è espresso in anni), che è piuttosto sensibile dato che il sistema in esame è molto prossimo al polo boreale.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Cfr. « Astron. Journal », vol. XLIV, n. 1023.

TABELLA I.

Osservazioni non contenute nei B.D.S., A.D.S.

<i>t</i>	ϑ	ρ	<i>n</i>	Autore	<i>t</i>	ϑ	ρ	<i>n</i>	Autore
1925,16	47°,8	0'',32	3	V. Biesbroeck	1942,33	39°,3	0'',43	3	V. Biesbroeck
28,06	42 ,2	,36	5	V. Biesbroeck	42,52	37 ,5	,52	4	Rabe
30,58	47 ,8	,39	2	Kommendantoff	43,52	37 ,3	,51	6	Rabe
30,71	43 ,4	,37	4	V. Biesbroeck	45,36	41 ,7	,48	5	V. Biesbroeck
32,72	44 ,3	,54	4	Simonov	45,56	37 ,8	,55	4	Baize
32,92	41 ,2	,41	4	V. Biesbroeck	45,99	39 ,9	,51	6	Eggen
33,56	46 ,4	,52	2	Aitken	49,60	35 ,1	,52	6	Rabe
34,04	42 ,8	,45	3	Wilson	49,63	39 ,4	,48	2	Wilson
34,52	38 ,0	,61	5	Rabe	50,55	36 ,3	,67	3	Wilson
36,38	42 ,2	,55	4	Baize	51,50	34 ,9	,54	8	Rabe
36,43	42 ,1	,43	3	V. Biesbroeck	51,56	32 ,8	,48	2	Wilson
36,56	38 ,3	,52	10	Rabe	52,53	34 ,4	,52	2	Wilson
37,53	37 ,7	,51	6	Rabe	52,54	34 ,7	,52	10	Rabe
38,57	36 ,7	,60	7	Rabe	53,54	37 ,8	,54	2	Wilson
39,55	37 ,6	,50	6	Rabe	54,34	34 ,8	,63	3	Djurkovic
41,47	36 ,9	,52	7	Rabe	54,58	35 ,5	,58	4	Baize

Usando tutte le osservazioni, ho descritto, con molta cura, l'ellisse apparente che meglio approssimi l'insieme dei punti immagine. Tali punti però non sono uniformemente distribuiti sull'arco percorso, essendo piuttosto scarsi in vicinanza del periastro, onde le incertezze nel definire l'arco percorso — dato anche il divario ed i contrasti fra le misure di quell'epoca — sono maggiori.

Ho trovato così che l'ellisse apparente è rappresentata dalla seguente equazione:

$$(2) \quad 0,01100 x^2 - 0,02422 xy + 0,02972 y^2 - 0,22908 x - 0,21144 y = 1$$

avendo preso come origine la stella principale, come asse x la tangente al cerchio orario e avendo scelto l'unità di misura in modo che il secondo di arco era rappresentato da 100 millimetri.

Col metodo di Glasenapp-Kowalski⁽²⁾, ho quindi ricavato, per gli elementi dell'orbita vera, i seguenti valori:

$$(3) \quad \Omega = 0^{\circ},0 ; i = \pm 139^{\circ},6 ; \omega = 144^{\circ},8 ; e = 0,903 ; a = 0''349 \text{ (eq. 1950)}$$

in cui notoriamente i simboli rappresentano la posizione del nodo, l'inclinazione del piano dell'orbita sul piano tangente alla sfera celeste, la posizione del periastro, l'eccentricità ed il semiasse maggiore.

Come si vede, l'intersezione del piano dell'orbita col piano tangente alla sfera celeste avviene lungo il cerchio orario; l'eccentricità è molto forte, concordemente a quanto era stato previsto.

Particolarmente delicata è stata la ricerca degli elementi temporali, cioè del periodo P e del tempo τ del passaggio al periastro. Infatti nell'insieme delle osservazioni è difficile stabilire quali siano quelle particolarmente attendibili, da poter essere prese come base per il calcolo di P e di τ . Perciò — onde ottenere una maggior precisione — ho calcolato per ogni tempo di osservazione, partendo da ciascun angolo e usando il sistema di elementi (3), l'anomalia media M , ed ho riportato in un grafico, avente per ascisse i tempi, i diversi valori di M . Poiché M , come è noto, è funzione lineare di t , ho approssimato l'insieme di questi punti, con una retta, e con essa ho determinato i valori più probabili di P e di τ . Ho così ottenuto, esprimendo P in anni:

$$(4) \quad P = 150,75 \quad , \quad \tau = 1902,46,$$

donde risulta per il moto medio annuo espresso in gradi:

$$n = 2^{\circ},38800.$$

3. Ho poi calcolato gli angoli di posizione ϑ ed i raggi vettori ρ per ciascun tempo dato ed ho eseguito i confronti con le osservazioni. Gli scarti $O - C$ tra le posizioni osservate e quelle calcolate sono riportati nella Tabella II.

Come si vede, gli scarti sono più forti presso il periastro, dove il forte moto angolare e la minima distanza (minore del decimo di secondo di arco) ha impedito misure precise, anche con i maggiori rifrattori. Essi sono invece sufficientemente piccoli per il resto dell'orbita, specie per le osservazioni più recenti. La posizione del 1901,53 è incompatibile con la mia orbita; ma ricordo che i valori di ϑ e di ρ per quel tempo, sono dovuti alle misure di una sola notte da parte dell'Aitken.

Il confronto con gli scarti, calcolati in base all'orbita Wilson, mostra che essi sono dello stesso ordine dei miei, fino al 1934; ma, mentre dopo tale anno essi danno per le osservazioni più recenti residui troppo forti per i ρ , con la mia orbita tali residui non esistono.

(2) Cfr. G. ARMELLINI, *Trattato di Astronomia Siderale*, vol. II, p. 429 e sg. (Bologna, Zanichelli).

TABELLA II.

Scarti fra posizioni osservate e posizioni calcolate.

t	$(O - C) \vartheta$	$(O - C) \rho$	t	$(O - C) \vartheta$	$(O - C) \rho$	t	$(O - C) \vartheta$	$(O - C) \rho$
832,68	- 5°,9	+ 0'',09	1915,59	+ 3°,6	+ 0'',03	1936,43	+ 0°,5	- 0'',03
36,76	- 5 ,0	- ,09	16,24	+ 3 ,8	+ ,01	36,56	- 3 ,2	+ ,06
40,95	+ 0 ,4	+ ,09	16,63	- 6 ,8	- ,01	37,53	- 3 ,3	+ ,04
41,46	- 4 ,6	+ ,24	18,32	- 4 ,8	+ ,02	38,57	- 3 ,9	+ ,13
58,59	- 1 ,4	+ ,04	20,64	+ 4 ,8	+ ,07	39,55	- 2 ,5	+ ,02
77,61	+ 7 ,8	+ ,15	21,37	- 6 ,6	—	41,47	- 2 ,4	+ ,03
81,43	+ 2 ,2	+ ,09	23,44	- 2 ,4	- ,03	42,33	+ 0 ,4	- ,07
84,20	- 8 ,4	- ,04	23,49	+ 2 ,2	,00	42,52	- 0 ,6	+ ,02
92,30	+ 0 ,7	- ,02	23,65	+ 4 ,8	+ ,06	43,52	- 1 ,2	,00
97,44	+ 1 ,0	+ ,05	24,52	- 2 ,6	+ ,03	45,36	+ 4 ,0	- ,04
97,66	- 6 ,8	+ ,10	25,16	- 1 ,1	- ,03	45,56	+ 0 ,1	+ ,03
99,53	+ 7 ,8	+ ,06	25,74	- 2 ,6	+ ,02	45,99	+ 2 ,4	- ,01
00,75	+ 8 ,3	+ ,03	28,06	- 4 ,6	- ,02	49,60	- 0 ,8	- ,02
01,53	(- 77 ,9)	+ ,06	30,58	+ 2 ,5	- ,01	49,63	+ 3 ,5	- ,06
02,66	+ 17 ,2	+ ,07	30,71	- 1 ,2	- ,04	50,55	+ 0 ,5	+ ,13
03,56	- 28 ,9	+ ,05	32,72	+ 0 ,9	+ ,11	51,50	- 0 ,6	- ,01
05,57	+ 7 ,3	,00	32,92	- 2 ,1	- ,02	51,56	- 2 ,7	- ,07
09,69	+ 8 ,0	+ ,02	33,56	+ 3 ,4	+ ,08	52,53	- 0 ,7	- ,03
11,60	+ 4 ,8	+ ,02	34,04	0 ,0	+ ,01	52,54	- 0 ,2	- 0,3
2,59	+ 6 ,0	+ ,01	34,52	- 4 ,5	+ ,17	53,54	+ 3 ,0	- ,02
4,62	+ 4 ,9	,00	36,38	+ 0 ,6	+ ,09	54,34	+ 0 ,2	+ ,07
						54,58	+ 1 ,0	+ ,02

Inoltre le riduzioni all'equinozio del 1900, dei valori di ϑ , eseguite da Wilson non sembrano del tutto esatte; ciò che influisce ovviamente anche ai valori degli $O - C$.

4. Col metodo di Russell e Moore ⁽³⁾, ho poi determinato la parallasse namica del sistema. Come è noto, tale metodo si basa su una combinazione

(3) Cfr. RUSSELL and MOORE, *The Masses of the Stars*. (Chicago, University Press, 1940).

della terza legge kepleriana con la relazione massa-luminosità esistente per le stelle.

Ora, per la π_2 *Ursae Minoris*, abbiamo i seguenti dati:

Grandezza visuale del sistema, secondo la Harvard Photometrie $m = 6,93$
 Differenza di grandezza fra le due componenti $\Delta m = 0,40$,
 Tipo spettrale del sistema secondo la classificazione di Mount
 Wilson Fo.

Eseguiti i calcoli ⁽⁴⁾, col metodo suddetto ed in base a questi dati, ho ottenuto per la parallasse dinamica:

$$\pi = 0'',008.$$

Con tale parallasse, il semiasse maggiore dell'orbita misura 43,6 unità astronomiche, mentre al periastro la distanza del satellite dalla stella principale è di 3,9 unità astronomiche e cioè minore della distanza che separa Giove dal Sole. La somma delle masse del sistema, ricavata dalla formula fondamentale della teoria delle orbite, risulta uguale a 3,65, prendendo per unità di massa quella del Sole.

Ho calcolato anche i tempi del passaggio del satellite e le velocità radiali ai nodi, ottenendo:

$$t_1 = 1893,25; v_1 = \pm 3,4 \text{ Km/sec};$$

$$t_2 = 1902,80; v_2 = \mp 22,5 \text{ Km/sec}.$$

Nella Tabella III ho dato infine le effemeridi per i prossimi anni.

TABELLA III.

Effemeridi per la π_2 Ursae Maioris.

t	ϑ	ρ	t	ϑ	ρ	t	ϑ	ρ
1956,0	34°,2	0'',57	1966,0	31°,4	0'',60	1974,0	29°,3	0'',6
58,0	33°,6	,57	68,0	30°,8	,60	76,0	28°,8	,6
60,0	33°,0	,58	70,0	30°,3	,61	78,0	28°,2	,6
62,0	32°,4	,59	72,0	30°,1	,61	80,0	27°,8	,6
64,0	31°,9	,59						

(4) Cfr. anche FINZI-GIANNUZZI, *Sul sistema binario λ Ophiuci* (ADS 10087), in «Contrib. Scientif. Osserv. di Monte Mario», n. 223 e «Rend. Lincei», 1955, sem. II.

Fisica matematica. — *Sulla propagazione delle onde piane nei conduttori in moto.* Nota di ANNA MARISA MANARINI, presentata (*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. Recentemente il prof. Lampariello ha richiamato l'attenzione su alcuni problemi dell'elettrodinamica dei corpi in moto e alcuni interessanti risultati sono stati ottenuti da lui e da altri Autori dall'integrazione delle equazioni di Maxwell-Minkowski⁽¹⁾.

È da notare però che i vettori elettromagnetici \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , rispetto ad un osservatore (S) sono legati da relazioni lineari omogenee agli stessi vettori \mathbf{E}' , \mathbf{B}' , \mathbf{H}' , \mathbf{D}' rispetto ad un osservatore (S') solidale col corpo sede dei processi elettromagnetici, che si muove di moto traslatorio uniforme rispetto all'osservatore (S); tali relazioni si ottengono dalla legge di covarianza delle equazioni del campo rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Precisamente, le componenti cartesiane di \mathbf{E} e \mathbf{B} sono date da combinazioni lineari delle componenti di \mathbf{E}' , \mathbf{B}' e le componenti di \mathbf{H} e \mathbf{D} sono date da combinazioni lineari delle componenti di \mathbf{H}' , \mathbf{D}' . Analogamente la densità di corrente \mathbf{j} e la densità di carica ρ rispetto all'osservatore (S) sono legate da relazioni lineari alle corrispondenti grandezze \mathbf{j}' e ρ' rispetto all'osservatore (S'). Ed è attraverso queste relazioni che si giunge alle equazioni di Maxwell-Minkowski⁽²⁾.

È perciò naturale che molti risultati ottenuti dall'integrazione delle equazioni di Minkowski si possano ottenere, e forse in modo più rapido, senza scrivere tali equazioni, ma solo valendosi delle citate relazioni (o anche solo della linearità di queste) fra i vettori elettromagnetici rispetto ai due osservatori e delle trasformazioni di Lorentz.

Come applicazione di tale procedimento ho studiato la propagazione di un'onda sinusoidale piana in un mezzo anche conduttore in moto, con direzione di propagazione dell'onda qualsiasi, cioè in generale diversa dalla direzione del moto del corpo.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Si vedano a questo proposito le seguenti pubblicazioni:

G. LAMPARIELLO, *Considerazioni generali sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XVII, 1954, p. 37.

G. LAMPARIELLO, *Una soluzione rigorosa delle equazioni di Minkowski dell'elettrodinamica dei corpi in moto e sua interpretazione fisica*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XVII, 1954, p. 100.

G. LAMPARIELLO, *L'equazione generale delle onde elettromagnetiche nei corpi in moto*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XVII, 1954, p. 222.

G. CARINI, *Sulle equazioni di Minkowski per i conduttori in moto*, « Rend. Ist. Lomb. », vol. LXXXVIII, 1955, p. 152.

T. ZEULI, *Sui fenomeni elettromagnetici nei corpi omogenei elettricamente conduttori, in moto traslatorio uniforme*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Torino », vol. XIV, 1954-55, p. 141.

(2) Cfr. R. BECKER, *Teoria dell'elettricità*, Ed. Sansoni, Firenze, 1950, vol. II, p. 391.

Valendomi dei notissimi risultati del problema analogo per i corpi in quiete ed applicando, in sostanza, solo le trasformazioni di Lorentz, ho così rapidamente trovato una formula che lega tra loro le costanti caratteristiche dell'onda e che si riduce a formule già da altri trovate per altra via nel caso in cui la direzione di propagazione dell'onda coincida con la direzione di traslazione del corpo e nel caso in cui la conducibilità del corpo sia nulla.

2. Consideriamo dunque un corpo C , omogeneo, isotropo e di conducibilità elettrica γ , il quale rispetto ad un sistema inerziale $S(x, y, z, t)$ sia dotato di moto traslatorio uniforme con velocità v nella direzione positiva dell'asse x . Sia $S'(x', y', z', t')$ un sistema solidale col corpo C e tale che l'asse x' coincida con l'asse x e l'origine delle coordinate al tempo $t' = 0$ coincida con l'origine delle coordinate del sistema (S) al tempo $t = 0$.

Usando la solita simbologia e la metrologia gaussiana razionalizzata, indichiamo con accento le grandezze del sistema (S') , senza accento le corrispondenti grandezze del sistema (S) .

Le formule relativistiche che legano le coordinate del sistema (S) alle coordinate del sistema (S') sono, come è noto, la trasformazione speciale di Lorentz.

Consideriamo un'onda piana di pulsazione ω' , in generale anche complessa, che si propaghi nel corpo C in una direzione che nel sistema (S') giaccia nel piano $x'y'$ e formi l'angolo α' con l'asse x' . Poiché la direzione degli assi y' e z' è normale all'asse x' , ma del resto arbitraria, si può sempre scegliere l'asse y' in modo che la normale all'onda sia parallela al piano $x'y'$.

Indicando con Φ' una qualsiasi componente dei vettori $\mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{H}', \mathbf{D}'$, si avrà:

$$(1) \quad \Phi' = \Phi_0 e^{i[\omega' t' - k'(x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha')]}$$

dove, come è ben noto, le costanti ω' e k' sono legate fra loro dalla relazione⁽³⁾:

$$(2) \quad c^2 k'^2 = n^2 \omega'^2 - \mu \gamma \omega' i$$

essendo c la velocità della luce nel vuoto, μ la permeabilità magnetica, ϵ la costante dielettrica e avendo posto $n^2 = \epsilon \mu$.

Considerando ora l'onda come appare nel sistema (S) , per le sopra citate relazioni lineari le componenti dei vettori $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{D}$, una qualunque delle quali indicheremo con Φ , saranno combinazioni lineari di funzioni del tipo indicato dalla (1), ossia saranno ancora funzioni sinusoidali dello stesso tipo, salvo sostituire alle coordinate x', y', t' che figurano nell'esponente le corrispondenti espressioni in funzione di x, y, t fornite dalla trasformazione speciale di Lorentz.

Potremo pertanto scrivere:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i[\omega t - k(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]},$$

(3) Cfr. G. TORALDO DI FRANCIA, *Onde elettromagnetiche*, Zanichelli, Bologna 1953, Cap. VII, § 9°, p. 149.

avendo posto ($\beta = v/c$):

$$\omega' \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1-\beta^2}} - k' \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos \alpha' + y \sin \alpha' \right) \equiv \omega t - k(x \cos \alpha + y \sin \alpha).$$

Uguagliando i coefficienti di x, y, t dei due membri, si hanno tre relazioni dalle quali si ricava:

$$\begin{aligned} \omega' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\omega - kv \cos \alpha) \\ k' &= \frac{k^2(1-\beta^2) + \beta^2 k^2 \cos^2 \alpha - 2 \frac{\beta}{c} \omega k \cos \alpha + \omega^2 \frac{\beta^2}{c^2}}{1-\beta^2}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (2), si trova che le costanti caratteristiche dell'onda ω e k rispetto al sistema (S) sono legate fra loro dalla seguente relazione:

$$(3) \quad [1 - \beta^2 - (n^2 - 1)\beta^2 \cos^2 \alpha] c^2 k^2 + 2\beta \cos \alpha \left[\omega(n^2 - 1) - \frac{\mu\gamma}{2} \sqrt{1 - \beta^2} i \right] ck - \\ - \omega^2(n^2 - \beta^2) + \mu\gamma \sqrt{1 - \beta^2} \omega i = 0.$$

Notiamo esplicitamente come da questa relazione risulta in generale k complesso, ossia si tratta di un'onda piana smorzata.

Osserviamo che per $\cos \alpha = 1$, ossia nel caso di un'onda che si propaga nella direzione dell'asse x , la (3) si riduce all'espressione:

$$(1 - n^2 \beta^2) c^2 k^2 + 2\beta \left[\omega(n^2 - 1) - \frac{\mu\gamma}{2} \sqrt{1 - \beta^2} i \right] ck - \\ - (n^2 - \beta^2) \omega^2 + \mu\gamma \sqrt{1 - \beta^2} \omega i = 0,$$

la quale coincide con la relazione per i conduttori in moto che si trova nelle citate note di Carini e Zeuli.

Supponiamo poi che sia $\gamma = 0$, ossia che il corpo C sia non conduttore. Chiamando w la velocità di fase dell'onda e tenendo presente che è $w = \omega/k$, dalla (3) si ricava ⁽⁴⁾:

$$w = c \frac{\beta(n^2 - 1) \cos \alpha \pm \sqrt{(1 - \beta^2)[n^2 - \beta^2 - \beta^2 \cos^2 \alpha(n^2 - 1)]}}{n^2 - \beta^2}.$$

Si vede facilmente che il radicando è sempre maggiore di zero: si tratta quindi di un'onda non smorzata.

Notiamo infine che va preso il segno positivo o negativo a seconda del verso percorso dall'onda nella sua propagazione nella direzione definita dall'angolo α .

(4) Questa espressione della velocità di fase di un'onda in un dielettrico in moto si trova anche nella Nota di E. CLAUSER, *Velocità della luce nei corpi isotropi in moto*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XVII, 1954, p. 362, dove è ricavata con la teoria delle caratteristiche e applicando la trasformazione di Lorentz.

Geologia. — *La facies bauxitica nel Cretaceo della Nurra (Sardegna).* Nota preliminare di GIUSEPPE PECORINI, presentata (*) dal Corrisp. S. VARDABASSO.

Allo stato attuale delle ricerche, nel Mesozoico della Nurra (Sardegna nord-occidentale) risultano accertati: il Permo-Trias, non meglio suddiviso, in facies prevalentemente arenaceo-conglomeratica, discordante su schisti cristallini paleozoici, d'età non precisata, ma presumibilmente silurica; il Trias a facies germanica (Buntsandstein, Muschelkalk, Keuper); il Giurese (Lias, Dogger, Malm), essenzialmente calcareo; ed infine il Cretaceo, pur esso calcareo, in facies di scogliera, con qualche intercalazione marnosa.

Il tutto, concordante almeno apparentemente, è stato dislocato in ampie pieghe con faglie verso la fine del Cretaceo.

Numerosi problemi rimangono ancora oggi insoluti. Fra questi uno dei più interessanti è forse quello riguardante la stratigrafia del Cretaceo.

I contributi più notevoli di carattere paleontologico alle conoscenze sul Cretaceo sono del Lamarmora e del Meneghini, ai quali si devono le prime determinazioni di Rudiste della Nurra, del Parona che studiò i foraminiferi del Cretaceo superiore, e dell'Oosterbaan in tempi più recenti.

Quest'ultimo Autore, nel fare il punto sulle conoscenze del Mesozoico della Nurra, per quel che riguarda il Cretaceo, distingue superiormente un complesso di calcari ippuritici a foraminiferi ⁽¹⁾, con breccie organogene e marne, riferibile al Cretaceo superiore, ed inferiormente una serie di calcari bianchi compatti che pare rappresentino la facies urgoniana del Cretaceo inferiore. Mentre questa facies è stata riconosciuta da lui, attraverso lo studio dei fossili (*Chaetetopsis favrei*, Den., *Actinostroma? letourneuxi*, Thom., e una specie dubbia di *Matheronia*), soltanto presso Pischina Ruja (Capo Caccia) (cfr. [1]), per il rimanente della Nurra, dove pare manchi la facies urgoniana fossilifera, l'Oosterbaan istituisce un piano comprensivo del Malm e del Cretaceo inferiore.

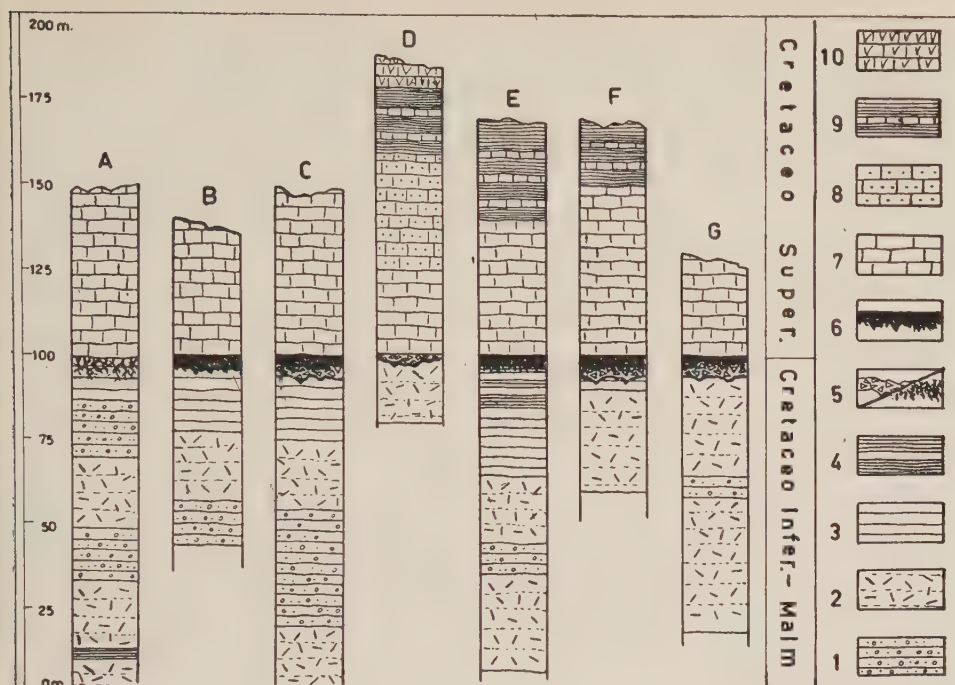
Sicché, concludendo, il Cretaceo della Nurra in base agli ultimi studi risulterebbe sufficientemente completo soltanto nella penisola del Capo Caccia, mentre altrove, rimanendo certa la presenza del Cretaceo superiore, sarebbe invece dubbia quella del Cretaceo inferiore.

Allo scopo di chiarire questo particolare problema stratigrafico, ho intrapreso ricerche di dettaglio per consiglio del Prof. Silvio Vardabasso, al quale

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) Tra i foraminiferi sono comuni particolarmente le Milioliti. Le specie finora determinate [5] [6] sono le seguenti: *Idalina antiqua*, d'Orb., *Periloculina Zitteli*, Mun. Ch. e Schlumb., *Lacazina elongata*, Mun. Ch., *Nonionina cretacea*, Schl., *Cuneolina conica*, d'Orb., *Meandropsina Vidali*, Schl., *Dicyclina schlumbergeri*, Mun. Ch., *Lituola* sp., *Haplophragmium* sp., *Cristellaria* sp., *Vaginulina* sp., *Rotalia* sp., *Textularia* sp., e *Globigerinidae* non meglio precisate.

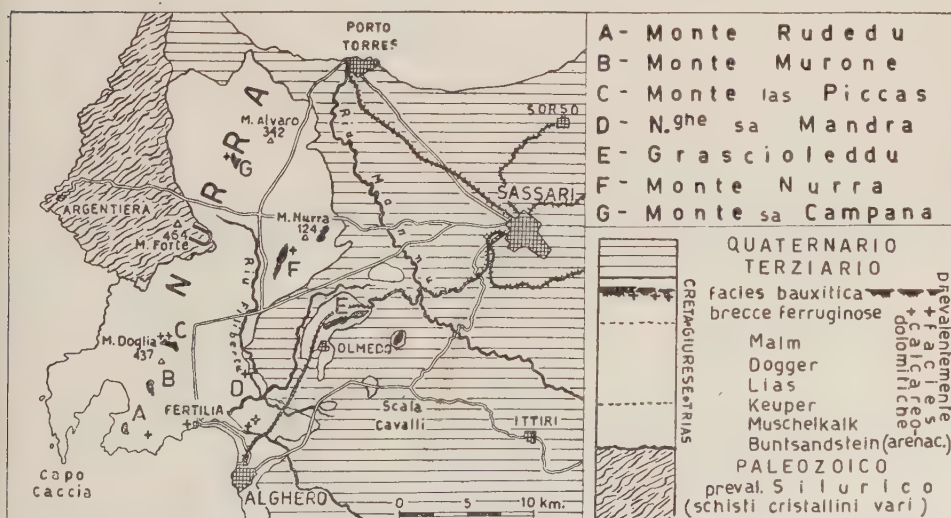
Le Rudiste citate nel seguito di questa Nota sono già state riscontrate, per la maggior parte, dall'Oosterbaan.



Colonne stratigrafiche del Cretaceo della Nurra.

10. Calcarei brecciati o conglomeratici ad Ippuriti. 9. Marne e calcari marnosi. 8. Calcarei detritici organogeni, subord. selciferi. 7. Calcarei ippuritici a foraminiferi. 6. Bauxiti. 5. Breccie rosse ferruginose o infiltrazioni limonitiche. 4. Marne e calcari marnosi. 3. Calcarei compatti, bianchi o cinerei (facies urgoniana?). 2. Dolomie e calcari dolomitici. 1. Calcarei compatti vari, spesso oolitici.

Per le località A, B, C, ..., vedi cartina sottostante.



Distribuzione geologica schematica degli affioramenti bauxitici nel Cretaceo della Nurra.

debbo, fra l'altro, la segnalazione di alcuni affioramenti di Cretaceo finora non conosciuti, rilevati in occasione di sue indagini idrogeologiche (fonte e fornaci di Abba Meiga, in sinistra del Riu Mannu di Porto Torres, a sud-ovest di Torre sa Crucca). Nel corso di questo studio ho individuato altri lembi di Cretaceo sino ad oggi passati inosservati, fra i quali ritengo i più interessanti quelli siti in località Pala su Zòmbaru (a nord della strada da Alghero a Sassari, circa 4 km. dopo la Cant. Rudas) e a sud e sud-est di Olmedo, in pieno settore trachitico (N. ghe Scala de s'Ainu).

Particolarmente degno di nota ritengo però il rinvenimento di un orizzonte a bauxiti e brecce rossastre, inserito nella serie cretacea ⁽²⁾.

A dir vero, la prima segnalazione di bauxite nella Nurra spetta all'Oosterbaan (1936), il quale rinvenne tale materiale sul Monte Murone nel gruppo del M.te Doglia presso Fertilia; l'Autore però non rivolse ulteriore attenzione a questo particolare aspetto della formazione cretacea.

Partendo da questo affioramento, con l'idea che la bauxite potesse rappresentare un orizzonte costante, fin dal 1951 (in occasione dei lavori di campagna per la mia tesi di laurea) ho sottoposto ad un esame particolareggiato la successione stratigrafica del gruppo del M.te Doglia ed ho rinvenuto una intercalazione bauxitica nei calcari del M.te las Piccas (appendice settentrionale del gruppo stesso) ed in quelli del M.te Pedrosu a sud-ovest del M.te Murone. In seguito, estendendo le ricerche, ho riscontrato la bauxite anche presso Olmedo sulle pendici calcaree dell'altopiano trachitico del M.te Rosso (regione Mata de Giudeu e Grascioleddu), presso la P.ta sa Campana nella Nurra settentrionale, e nel piano calcareo tra M.te Nurra e M.te Uccari.

Nelle stesse località ed in altre, come ad esempio sul versante interno della tozza penisola di P.ta del Giglio, che chiude a est il Porto Conte, in continuazione dell'affioramento bauxitico di M.te Pedrosu, nel Riu Filibertu a sud di Paris Giaga (i Piani di Sella e Mosca) e presso Casa Galantè, più a sud, si rinvencono, sempre in rapporto con l'orizzonte bauxitico, brecce calcaree o dolomitiche a cemento rosso o bruno-giallastro, ricco di ossidi di ferro più o meno idrati, oppure calcari abbondantemente irretiti ancora di ossidi di ferro e di calcite.

Per chiarire meglio la posizione dei singoli affioramenti, faccio seguire una descrizione sommaria dei profili più caratteristici (dall'alto in basso):

A) Gruppo M o n t e R u d e d u (Penisola di P.ta Giglio, a nord della rada di Alghero).

m. 50 Calcarei biancastri o cinerei a foraminiferi, in banchi per lo più di 1-2 m. ciascuno, con *Hippurites* (*Orbignya*) *incisus*, Douv., *Biradiolites*? *angulosus*, d'Orb., *Radiolites* sp. gr. *lusitanicus*.

(2) A queste ricerche sulle bauxiti accenna incidentalmente anche il prof. S. VARDA-BASSO, a proposito dei paleosuoli della Sardegna (*Il Quaternario della Sardegna*, «Atti del IV Congresso INQUA», Roma-Pisa 1953).

- m. 7 Calcari compatti, grigio-chiari, infiltrati di ossidi di ferro in vene o arnioni e calcite.
- m. 4 Calcari cenerini compatti con sottili intercalazioni dolomitiche.
- m. 20 Calcari compatti grigio-chiari o bruno-giallastri, talora oolitici o pseudoolitici.
- m. 20 Dolomie e calcari dolomitici ben stratificati.
- m. 11 Calcari compatti grigio-chiari, con sottili intercalazioni dolomitiche.
- m. 5 Calcari oolitici grigi e bruno-giallastri.
- m. 20 Dolomie grigie ben stratificate.
- m. 3 Marne e calcari marnosi a *Rhynchonella* sp.
- m. 8 Dolomie grigie con qualche sottile intercalazione calcarea.

Questa serie, leggermente inclinata a nord-ovest, è stata riscontrata sul versante orientale della piccola cima (q. 153) ad est del M.te Rudedu (q. 172).

I calcari ippuritici a foraminiferi sono da riferirsi al Cretaceo superiore (Turoniano super. o Senoniano infer.). Per quanto riguarda l'orizzonte calcareo a ossidi di ferro, si deve notare che esso passa talora ad una vera breccia calcareo-dolomitica rossa. Poco lontano, però, e cioè lungo il tratto di costa fra la P.ta del Rumanì e la P.ta del Giglio, i calcari a foraminiferi poggiano direttamente su un complesso dolomitico alquanto potente, che forma la falesia. Invece, sotto il M.te Pedrosu, a nord del M.te Rudedu, un modesto affioramento bauxitico si trova alla base degli stessi calcari.

B) Monte Murone, q. 302 (Gruppo del M.te Doglia).

- m. 40 Calcari biancastri o cinerei a foraminiferi, con *Hippurites* sp., *Bournonia* sp., *Eoradiolites* sp.
- m. 2 Bauxite pisolitica, spesso molto limonitica.
- m. 12 Calcari saccaroidi rossastri con intercalazioni dolomitiche.
- m. 8 Calcari grigio-rosei talora oolitici.
- m. 20 Dolomie biancastre e calcari dolomitici, ben stratificati.
- m. 6 Calcare compatto grigio, subordinatamente oolitico, con qualche sottile intercalazione marnosa.
- m. 7 Calcare compatto a piccole pisoliti, in un banco unico.

Il profilo è stato rilevato sul versante occidentale del M.te Murone, ove gli strati presentano una notevole pendenza verso ovest.

In considerazione della presenza di *Eoradiolites* nei livelli inferiori della pila di calcari a foraminiferi, l'Oosterbaan propende per una età cenomaniana in particolare, oppure cretacea superiore in generale. È evidente, ad ogni modo, l'analogia sia litologica che paleontologica tra il complesso a foraminiferi del M.te Murone e quello del M.te Rudedu.

La bauxite, in questo profilo, non costituisce un banco continuo, ma pare formi delle sacche.

C) Monte las Piccas, q. 115 (Gruppo del M.te Doglia).

- m. 50 Calcari a foraminiferi, con *Bournonia? excavata*, d'Orb., *Hippurites* (*Orbygnia*) *canaliculata*, Roll. du Roq., *Radiolites* sp.
- m. 2 Bauxite pisolitica.
- m. 3 Breccie a frammenti di calcare bianco compatto, a cemento rosso.

- m. 4 Calcarei compatti bianchi o cenerini infiltrati di ossidi di ferro.
- m. 16 Calcarei compatti bianchi o giallastri.
- m. 20 Dolomie e calcari dolomitici, ben stratificati.
- m. 30 Calcarei grigio-giallastri compatti, talora oolitici.
- m. 5 Calcarei oolitici grigio-chiari.
- m. 30 Dolomie e calcari dolomitici.
- m. 35 Calcarei, talora oolitici o dolomitici.

La serie è fortemente sbandata a sud e urta per faglia contro i calcari del Dogger, che costituiscono la base del M.te Doglia.

Anche per questo profilo vale l'attribuzione dei calcari a foraminiferi al Cretaceo superiore (Senoniano infer.). Da notare la comparsa delle brecce rosse, chiaramente alla base delle bauxiti.

D) Confluenza del Riu Filibertu col Riu Sassu (N.ghe de sa Mandra).

- m. 10 Brecce calcaree ad Ippuriti; talora calcari conglomeratrici a ciottoli di calcare.
- m. 20 Marne grigio-azzurrastre e calcari marnosi, a stratificazione sottile, spesso con tracce di lignite.
- m. 35 Calcarei detritici grigio-biancastri, talora verdastri, con resti organici vari, spesso con selci e frammenti di calcare.
- m. 25 Calcarei biancastri a foraminiferi, con *Bournonia judaica*, Blanckh., *Radiolites* sp.
- m. 1 Breccia dolomitica a cemento rosso.
- m. 20 Dolomie grigio-biancastre e calcari dolomitici.

Anche qui i calcari a foraminiferi rappresentano il Cretaceo superiore (Turoniano).

Probabilmente in questo profilo si ha la serie meno incompleta per il Cretaceo superiore della Nurra. Mentre l'Oosterbaan lasciava il dubbio che la facies marnosa potesse già rappresentare il Terziario, la presenza di Ippuriti superiormente alle marne dimostra invece la continuità della serie cretacea.

Un profilo analogo, ma meno evidente, è visibile presso la Casa Galantè, 2 km. a sud della confluenza sopradetta, e precisamente sull'ala meridionale della sinclinale del Riu Barca, della quale la serie del N.ghe sa Mandra costituisce l'ala settentrionale.

Ritengo inoltre che i calcari marmorei rossastri, o bianchi a vene rosse, che giacciono sulla sponda destra del Riu di Ungias a sud della Casa Galantè, corrispondano all'orizzonte a brecce dolomitiche del profilo dianzi descritto.

E) Regione Grascioleddu (nord-est di Olmedo).

- m. 30 Marne grigio-biancastre con qualche intercalazione calcarea ad *Hippurites organisans*, Douv., *Radiolites* sp. e coralli.
- m. 40 Calcarei a foraminiferi, con *Hippurites cornuaccinum*, Brn., *Radiolites* cfr. *paillet-teana*, *Radiolites* sp.
- m. 2 Bauxite, il più spesso pisolitica.
- m. 12 Marne con qualche intercalazione calcarea.
- m. 20 Calcarei bianchi ceroidi, talora cenerini, compatti.

- m. 20 Dolomie e calcari dolomitici.
- m. 8 Calcari grigi, talora oolitici.
- m. 30 Dolomie e calcari dolomitici ben stratificati.

La serie è stata rilevata sul versante nord-occidentale del M. Rosso, pressoché in corrispondenza della piccola valle che dal monte Rosso stesso cala verso regione Mata de Giudeu⁽³⁾. Gli strati si immergono sotto la formazione trachitica terziaria e sono qua e là dislocati per piccole faglie, tanto da simulare talora un duplice orizzonte bauxitico.

Il Cretaceo superiore, anche qui sufficientemente documentato, ha uno sviluppo abbastanza analogo a quello del settore del Riu Filibertu e Riu Barca.

La bauxite si presenta compatta, talora terrosa, per lo più pisolitica, nelle sue varietà rossa, gialla con pisoliti rosse, e anche biancastra. Immediatamente sotto la bauxite giace quasi sempre uno strato, di alcuni decimetri di spessore, di un'argilla giallastra o rossiccia.

Sul Monte Pedroseddu (fra la strada Fertilia-Sassari e la ferrovia di Alghero, a sud di Badde Rebuddo) i calcari a foraminiferi, che si accompagnano qui a brecce organogene calcaree, giacciono direttamente sulla dolomia. Al contatto si ha una dolomia finemente stratificata, di color rosso o giallo, ricchissima di ossidi di ferro, e talora anche diaspri.

F) Piano a sud-ovest di Monte Nurra (Nurra centro-orientale).

- m. 20 Marne grigio-biancastre.
- m. 50 Calcari a foraminiferi, con *Bournonia excavata*, d'Orb., *Hippurites (Orbygnia) canaliculata*, Roll. du Roq., *Radiolites* sp.
- m. 2 Bauxite pisolitica rossastra.
- m. 3 Brecce calcaree a cemento rosso.
- m. 4 Calcari cristallini saccaroidi bianchi, irretiti di ossidi di ferro e calcite.
- m. 30 Dolomie biancastre e calcari dolomitici.

Anche qui i calcari a foraminiferi sono riferibili al Cretaceo superiore (Senoniano).

La serie è debolmente inclinata a ovest e costituisce l'ala orientale della sinclinale di Pischina Elighi Longu. Faccio notare che gli spessori sono stati misurati con una certa approssimazione, trattandosi di testate di banchi isoclinali affioranti su una superficie pianeggiante abbondantemente ricoperta da terreno agrario.

Tracce di bauxite si trovano disseminate pure nel piano a nord-est del M.te Nurra in prossimità del limite basale dei calcari a foraminiferi cretacei.

(3) Mentre stavo coordinando queste mie ricerche, in parte di vecchia data, è uscita una Nota di A. Moretti [4] la quale conferma la segnalazione delle bauxiti del M.te las Piccas e di Olmedo, dando anche notizia di un nuovo affioramento, sito a nord-est dell'altopiano trachitico di Olmedo, alla testata della valle di Riu s'Adde Cadavere.

Purtroppo il suolo coltivato o ricoperto dalla macchia non permette osservazioni più precise e dirette.

G) Monte sa Campana, q. 218 (Campu Chervaggiu, Nurra settentrionale).

m. 30 Calcarei a foraminiferi, con *Hippurites* sp., *Radiolites* sp.

m. 1 Bauxite pisolitica giallastra.

m. 4 Breccie dolomitiche a cemento rosso.

m. 30 Dolomie biancastre e calcari dolomitici.

m. 6 Calcarei grigi compatti ben stratificati, talora oolitici.

m. 40 Dolomie e calcari dolomitici.

Il profilo è stato rilevato sul versante occidentale di questa piccola collina, i cui strati hanno subito un abbassamento per faglia rispetto all'attigua P.ta de lu Rumasino.

Questo affioramento è il più settentrionale della Nurra e documenta, essendo stato risparmiato dall'erosione, l'ampia estensione in superficie che aveva un tempo l'orizzonte bauxitico.

Dall'esame dei singoli profili risulta evidente come sia costante la presenza delle bauxiti e breccie rossastre al letto dei calcari a foraminiferi e Rudiste del Cretaceo superiore.

Questo interessante orizzonte, i cui affioramenti si trovano distribuiti sia nella Nurra settentrionale che in quella meridionale, attesterebbe un'emersione della Nurra durante una fase del Cretaceo. I vari affioramenti sarebbero cioè i resti di un paleosuolo, forse di tipo lateritico, allora formatosi, ed in seguito dislocato e parzialmente eroso insieme con la sua copertura.

Dando per dimostrata l'esistenza di una emersione in corrispondenza con la facies bauxitica e a breccie, rimane però da precisare la sua età. La mancanza pressoché assoluta di resti fossili nelle rocce al letto delle bauxiti rende piuttosto problematico un esatto riferimento cronologico. È tuttavia sufficientemente determinata l'età della formazione al tetto, costituita, come già accennato, nella totale generalità dei casi da calcari ippuritici a foraminiferi del Cretaceo superiore, con termini stratigraficamente riferibili al Senoniano, al Turoniano e presumibilmente anche al Cenomaniano. La serie sottostante è invece, oltre che di età incerta, anche varia litologicamente. Infatti, al letto delle bauxiti si rinvengono ora dolomie, ora marne, ora calcari.

Dopo l'Oosterbaan, più recentemente anche il Moretti ha creduto di poter riferire i calcari immediatamente sottostanti ai calcari ippuritici a foraminiferi al Cretaceo inferiore. Ritengo l'ipotesi sufficientemente verosimile, quantunque non ancora dimostrata da un adeguato rinvenimento di fossili.

La diversa natura litologica al letto delle bauxiti e delle breccie rosse devesi probabilmente attribuire ad eteropia di facies. Non vorrei però del tutto escludere che, almeno in parte, essa non possa essere conseguenza di una più o meno intensa erosione, immediatamente anteriore alla deposizione

delle bauxiti. La presenza delle brecce arrossate costituirebbe appunto una prova di tale periodo d'erosione; erosione di breve durata, però, e non troppo intensa se si considera che le brecce sono il più spesso monogeniche.

Concludendo, la facies bauxitica della Nurra è molto presumibilmente da riferirsi ad una fase di emersione avvenuta, grosso modo, fra il Cretaceo inferiore e quello superiore.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] DENINGER K., *Die mesozoischen Formationen auf Sardinien*, «N. Jahr. für Min. Geol. und Pal.», XXIII, Stuttgart 1907.
- [2] LAMARMORA A., *Voyage en Sardaigne*, II par., t. I, Turin 1857.
- [3] MENEGHINI G., *Paleontologie de l'île de Sardaigne ou description des fossiles recueillis dans cette contrée par le Général A. De La Marmora*. – Suite à la III par. du «Voyage en Sardaigne», de Lamarmora, Turin-Paris 1857.
- [4] MORETTI A., *Segnalazione di alcuni giacimenti bauxitiferi nella Nurra di Alghero (Sardegna)*, «Boll. Serv. Geol. It.» vol. LXXVII, 1955 (4^o-5^o), Roma 1955.
- [5] OOSTERBAAN A. M., *Etude géologique et paléontologique de la Nurra (Sardaigne)*, Utrecht 1936.
- [6] PARONA C. F., *A proposito dei caratteri micropaleontologici di alcuni calcari mesozoici della Nurra in Sardegna*. «Atti R. Acc. Sc. Torino», vol. 4, Torino 1910.
- [7] PECORINI G., *Le dune fossili della Nurra di Alghero (Sardegna)*. «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», serie III, vol. XVI, fasc. 6, Roma 1954.

Geologia. — *Ulteriori osservazioni geologiche sulla zona di Monticchio nella bassa valle dell'Agri (Basilicata)* (*). Nota di FELICE IPPOLITO e PAOLO LUCINI, presentata (**) dal Socio G. D'ERASMO.

I. Nella seduta del 14 novembre 1953 di questa Accademia fu presentata una Nota degli scriventi e della dott.ssa A. Spada, nella quale erano riassunti i risultati degli studi geologici eseguiti nella zona di Monticchio nella bassa valle dell'Agri ⁽¹⁾. Nell'ulteriore corso delle indagini sono state compiute – anche in relazione con i fini applicativi dello studio stesso – ulteriori osservazioni che verranno qui di seguito esposte: esse, oltre a presentare di per sé un certo interesse, confermano quanto in precedenza era stato osservato e le conclusioni che se n'erano tratte. La presente Nota, che espone queste osservazioni, è pertanto da considerare come la continuazione della precedente, alla quale si rimanda per lo schizzo geologico e le fotografie.

Alla stretta di Monticchio, secondo quanto già reso noto e sulla scorta delle successive osservazioni, sono state distinte le formazioni qui di seguito descritte in ordine cronologico e dalla più recente alla più antica; la loro età

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia Applicata dell'Università di Napoli, nel quadro delle ricerche sui terreni terziari dell'Italia Meridionale finanziate dal C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Questi «Rend.», fasc. I, ser. VIII, 16 (1954).

è stata determinata, fin dove possibile per via micropaleontologica dalla dottoressa A. Spada: le faune rinvenute sono indicate nella Nota citata, cui la presente fa seguito.

a) *Alluvioni attuali dell'Agri*. - Prevalentemente costituite da ciottoli di natura calcarea e talora silicea o cristallina, occupano il letto attuale del fiume.

b) *Formazione pliocenica*. - Sabbie giallastre, con croste evaporitiche e marne argillose cinerine nella parte superiore, che passano verso il basso ad argille sabbiose grigio-azzurre con macrofossili e cristalli di gesso; sotto alle argille si rinviene in qualche punto un conglomerato di alcuni metri di spessore ad elementi calcareo-silicei di dimensioni al massimo pugilari. La formazione è stata attribuita al Pliocene principalmente in base ad analogie litologiche.

c) *Formazione delle marne grigie e delle arenarie micacee* (Oligocene). - Marne grigie e arenarie micacee a cemento argilloso, con rari livelli calcareo-marnosi di colore grigio; non è stato possibile accertarne in modo definitivo l'età oligocenica, la quale però risulta, sulla scorta di numerose determinazioni paleontologiche, come la più probabile. Le arenarie sono in genere a grana assai fine e generalmente fissili secondo piani ondulati e sulle superfici di tali piani non è raro rinvenire tracce carboniose di origine vegetale. In alcuni punti le arenarie micacee si fanno più argillose e alquanto rossicce e vengono a somigliare al termine seguente.

d) *Formazione delle argille varicolori* (Oligocene). - Argille a scaglie con le caratteristiche zone di colore grigio verde e rosso vinato. Sono generalmente prive di microfauna, ma i pochi campioni che hanno consentito una determinazione micropaleontologica permettono di ascrivere la formazione all'Oligocene. Sembrano occupare la parte orientale della zona rilevata, ed in pratica è assai difficile distinguerle sul terreno dalle argille verdastre di età cretacea delle quali verrà detto più oltre. Pare che a differenza di queste ultime siano di frequente associate a calcari marnosi grigio-verdastri a grana finissima in banchi a volta non ancora del tutto scompaginati.

e) *Formazione dei calcari marnosi rosati e dei calcari arenacei grigi* (Eocene). - Calcari marnosi rosati ⁽²⁾ con intercalazioni di argilloscisti di color rosso epatico e di « craie » rosa strettamente associati a calcari arenacei grigi con intercalazioni di « craie » biancastra. I banchi di « craie » hanno dato faune che consentono di ascrivere l'intero complesso all'Eocene medio o medio superiore.

f) *Formazione delle argille verdastre* (Cretacico Sup.). - Argille a scaglie, assai di rado variegata, che non presentano più alcuna traccia dell'originaria stratificazione e che inglobano frammenti lapidei delle più varie dimensioni: di questi ultimi si dirà qui di seguito. Le faune rinvenute consentono di ascrivere al Cretacico superiore e più precisamente al Senoniano.

(2) I calcari marnosi rosati sono del tutto analoghi a quelli che altrove in Italia Meridionale sono stati indicati col nome di « scaglia », per analogia con le note formazioni dell'Appennino Centrale.

g) *Materiali frammentari inglobati nella formazione precedente.* — In generale si tratta di calcari arenacei e di brecciole calcaree del tutto simili a quelli della formazione *e*); più raramente di calcari marnosi grigio-verdastri analoghi a quelli associati alla formazione *d*); del tutto eccezionali i calcari marnosi rosati dalla formazione *f*). A volte si rinvencono nelle argille verdastre anche lembi della formazione delle marne grigie e delle arenarie micacee, inglobati nella massa argillosa o scivolati su di essa, fenomeno che pure presentano alcuni minuscoli lembi della formazione pliocenica.

Risultano egualmente inglobati nelle argille, come è stato accertato mediante sondaggi, due blocchi di parecchi mc. di arenarie a granelli di quarzo arrotondati e smerigliati e a cemento quarzoso. Infine un lembo di calcari marnosi nerastri, con sottili intercalazioni argillose dello stesso colore, è stato esplorato in profondità per una certa estensione per mezzo di un cunicolo ubicato in corrispondenza di un piccolo lembo affiorante.

Le diverse formazioni ora descritte sono variamente distribuite nell'ambito della zona.

Le alluvioni occupano il letto attuale dell'Agri e in parte vengono ricoperte dalle frane che si producono alla base dei pendii argillosi.

La formazione pliocenica compare solo in sponda sinistra e costituisce la parte più alta della collina di Monticchio ove le sabbie formano un costone scosceso. Il conglomerato di base indica ch'essa è trasgressiva sulle marne grigie e le arenarie micacee: in vicinanza del contatto le due formazioni appaiono pressoché concordanti. La formazione pliocenica probabilmente poggia in parte anche sulle argille varicolori, ma il contatto è assai spesso determinato da fenomeni tettonici. L'intero complesso pliocenico ha carattere costiero e probabilmente corrisponde ad una zona marginale che il mare giunse appena e per breve tempo a sommergere.

Le marne grigie e le arenarie micacee raggiungono il loro massimo sviluppo in sponda sinistra al disotto della formazione pliocenica e compaiono in sponda destra solo in prossimità del fiume come lembi isolati, di piccole dimensioni, e visibilmente rimaneggiati in seguito a fenomeni di frana.

I termini argillosi, le argille varicolori e le argille verdastre, occupano la maggior parte dell'area rilevata, e le prime sembrano estendersi particolarmente verso est. Da tali argille emergono su entrambe le sponde i calcari marnosi rosati e i calcari arenacei, che formano tutta una serie di piccoli affioramenti.

Nell'ambito della zona rilevata i due termini maggiormente estesi sono di natura quasi esclusivamente argillosa, e — almeno dal punto di vista tecnico — sono da considerarsi come «argille scagliose». Tuttavia anche le altre formazioni presenti hanno sempre un contenuto più o meno alto di materiali fortemente marnosi o argillosi.

Per tale motivo, per l'erosione esercitata dal fiume, e per altre ragioni delle quali sarà fatto cenno più oltre, i fenomeni di dissesto assumono nella zona un'importanza notevole.

2. I rapporti tra le varie formazioni ora descritte risultano complicati da fenomeni tettonici di natura alquanto complessa.

A tetto degli affioramenti dei calcari marnosi rosati e dei calcari arenacei dell'Eocene, particolarmente numerosi in sponda destra, si trovano infatti di regola le argille cretache, ed inferiormente o queste ultime o le argille varicolori oligoceniche, e talora entrambi questi due termini tra loro intimamente frammisti.

L'apparente irregolare distribuzione degli affioramenti e la natura dei materiali inducono a pensare più che ad un'inversione della serie in seguito a ordinari fenomeni di piegamento, a fenomeni di « frana orogenica », e portano a considerare i materiali inglobati dalle argille e i vari lembi di calcari marnosi e arenacei come « esotici », trascinati da una coltre argillosa alloctona. Tuttavia fenomeni di questo tipo, se pur realmente avvenuti, debbono aver avuto nell'ambito della zona considerata carattere poco più che locale. Mancano infatti tra i materiali inglobati dalle argille verdastre tipi litologici decisamente estranei all'ambiente di sedimentazione della zona. Anche le arenarie quarzose, che costituiscono i due blocchi avanti ricordati, sono assolutamente analoghe (dal solo punto di vista petrografico data la completa assenza di fossili) a quelle che compaiono, come estesa e potente formazione, nelle vicinanze del non lontano abitato di Valsinni associate ad argille varicolori del tutto simili a quelle identificate nell'area rilevata; tali arenarie si estendono alquanto verso nord in direzione della stretta di Monticchio, e non è da escludere che l'erosione abbia notevolmente ridotto la loro estensione. Sembra diverso il caso dei calcari marnosi nerastri rinvenuti nel cunicolo appositamente aperto per riconoscere la loro estensione: formazioni analoghe, anche queste prive di fossili, sono state osservate a una certa distanza dalla zona rilevata e precisamente presso Amendolara e a S. Chirico Raparo, ma non si può escludere che anche nella zona circostante non compaiano termini ad essi corrispondenti; va pure osservato che, esposti all'aria, i calcari nerastri assumono un colore grigio chiaro assai simile a quello che presentano alcuni calcari marnosi, abitualmente visibili in superficie ove compaiono le argille varicolori.

D'altro canto, se nonostante le suddette considerazioni si volesse ammettere il carattere di alloctonia delle argille verdastre, sarebbe assai difficile riconoscere l'appartenenza degli affioramenti dei calcari marnosi rosati e dei calcari arenacei ad una coltre alloctona.

Tali affioramenti, sono infatti caratterizzati, specie in prossimità dei più rigidi banchi di calcari arenacei, dalla stratificazione abbastanza regolare e dalla costanza delle condizioni di giacitura (immersione degli strati nei diversi affioramenti in media a O-SO di 45°). Quest'ultima condizione ben difficilmente sarebbe verificata nel caso di un trasporto per « frana orogenica » anche di modesta entità. Inoltre anche le frane di tipo ordinario, frequentissime nella zona, avrebbero potuto facilmente modificare tali condizioni se i singoli lembi affioranti fossero scarsamente estesi in profondità, se cioè fossero da considerare come « non radicati ».

Gli affioramenti in sponda destra dell'Agri sono inoltre distribuiti con una certa regolarità: essi si presentano di forma allungata in direzione parallela

a quella degli strati, e sono variamente spostati l'uno rispetto all'altro in direzione all'incirca normale, da monte a valle procedendo dalla sommità alla base del pendio. In sponda sinistra l'ultimo affioramento sembra accentuare ancora più tale motivo ⁽³⁾.

È assai probabile che la maggior parte degli affioramenti della sponda destra siano da considerarsi appartenenti ad un'unica struttura emergente dalla coltre argillosa, costituita da un pacco di strati di modesto spessore, ma notevolmente estesa nelle altre due dimensioni, fortemente raddrizzata e suddivisa in un secondo tempo da faglie all'incirca normali alla sua direzione. Tali faglie se disposte a gradinata e con abbassamento del labbro settentrionale verrebbero a spiegare la suddetta particolare distribuzione dei vari affioramenti.

La reale presenza di tali faglie è riconoscibile al contatto tra le formazioni plioceniche e quelle più antiche immediatamente a sud della collina di Monticchio. Si tratta di un fenomeno tettonico, che ha interessato anche il Pliocene. Inoltre la stabilità delle argille oligoceniche e cretache, ben maggiore in sponda sinistra ⁽⁴⁾ che non sulla sponda opposta nonostante la ben più forte pendenza e la più violenta erosione al piede, induce a pensare che la naturale tendenza di entrambi i pendii a franare verso il corso dell'Agri sia ostacolata in sponda sinistra, ed esaltata sulla sponda opposta, da un generale movimento profondo delle coltri argillose diretto dalla sponda destra alla sponda sinistra, cioè da SE a NW. Tale movimento dovrebbe derivare da un evento tettonico relativamente recente, il quale assai bene può identificarsi con il citato sistema di faglie a gradinata.

Non tutti gli affioramenti di calcari marnosi rosati e di calcari arenacei, ed in particolar modo i due in sponda sinistra a monte e a valle della stretta, possono venir considerati come parti della struttura che si è cercato d'identificare. Alcuni di essi probabilmente appartengono ad altre analoghe unità geologiche in gran parte ricoperte dalle formazioni posteriori e dalle frane.

La presenza di più strutture sul tipo di quella descritta, mentre tende ad escludere, data la generalità del fenomeno, che quest'ultima sia da considerarsi come un solo enorme « esotico » in una coltre argillosa alloctona, induce a pensare che la zona sia caratterizzata da uno stile a « scaglie tettoniche » di natura alquanto particolare per la notevole plasticità globale dei terreni interessati.

Secondo tali ipotesi al fenomeno dovrebbero aver infatti partecipato oltre alle argille cretache anche le argille oligoceniche; durante il generale movimento verso l'alto e in avanti entrambi questi termini argillosi avrebbero in

(3) Rimane dubbia la presenza di calcari marnosi e arenacei nel letto del fiume, al di sotto delle alluvioni, tra quest'ultimo affioramento e quelli precedentemente citati, nonostante che da un sondaggio opportunamente ubicato nell'alveo si siano ottenuti risultati abbastanza indicativi in tal senso.

(4) Maggiore stabilità rivelata tra l'altro dell'« arricchimento » superficiale in pietrame originariamente disordinatamente disseminato nella formazione argillosa, fenomeno attribuibile a lungo dilavamento superficiale di un pendio argilloso stabile.

certo qual modo almeno in parte protetto le sottili e fragili « scaglie » della formazione dei calcari marnosi e arenacei, che diversamente avrebbero probabilmente subita una ben maggiore e minuta frammentazione.

Verrebbe in tal modo spiegata, senza ricorrere all'ipotesi dell'allocaltonia delle argille verdastre - ipotesi a parere degli scriventi assai difficilmente sostenibile - la caoticità dei termini argillosi e particolarmente delle argille verdastre senoniane, l'anormale posizione stratigrafica di queste ultime al disopra dei calcari marnosi e arenacei eocenici, e la loro frammistione con le argille varicolori oligoceniche.

Il corrugamento dei termini più antichi non pare abbia che parzialmente interessato le marne grigie e le arenarie micacee, o al più che ne abbia interessato i livelli più bassi. Ne consegue che tale formazione, di età oligocenica come le argille varicolori, ma, come sembra indicare la sua distribuzione sul terreno, ad esse sovrapposta e quindi di età lievemente più tarda, abbia cominciato a depositarsi dopo o al più verso la fine del corrugamento.

È sintomatico a tale proposito, oltre alla *facies* delle marne grigie e delle arenarie micacee, diversa da quelle delle argille varicolori, il cambiamento del tipo di sedimentazione, da calcareo-argilloso per le argille varicolori ad arenaceo-argilloso con presenza di mica per le arenarie micacee: il fenomeno assai bene s'inserisce nel quadro di un corrugamento regionale - cui si dovrebbe pertanto attribuire un'età oligocenica - con emersione ed erosione di nuove terre fino allora sommerse, e con mutamenti nella configurazione generale dei vari bacini di sedimentazione.

Mineralogia. — *Sintesi e proprietà di un pirosseno tipo diopside* ($\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$) (*). Nota di MARIO COLA, presentata (**) dal Corrisp. P. GALLITELLI.

I pirosseni monoclini naturali, ben noti in tutte le loro proprietà cristallografiche, ottiche e strutturali, costituiscono una famiglia di minerali nella quale, per le frequenti e varie sostituzioni isomorfe, pochi sono i termini puri che sono stati studiati direttamente.

Per questa ragione, avendo osservato, nel proseguimento delle ricerche sui silicati di cobalto (Gallitelli e Cola, 1954; Cola, 1954), la formazione di cristalli simili a quelli del diopside $\text{MgCaSi}_2\text{O}_6$, è parso interessante prenderli in particolare esame per fissarne tutte le proprietà.

È probabile che M. Fouqué (Bourgeois, 1889) fosse giunto a preparare cristalli simili a quelli da noi ottenuti; le loro dimensioni troppo piccole e la quantità troppo scarsa non gli permisero di giungere ad una loro sicura identificazione.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della Università di Modena.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

I composti di partenza usati per le mie esperienze sono i seguenti: Co_3O_4 ; $\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$; acido silicico precipitato; CaCl_2 . L'acqua contenuta nell'acido silicico e nel CaCl_2 veniva determinata volta a volta.

Dopo accurata polverizzazione venivano mescolati intimamente in mortaio e le miscele poste in crogioli di porcellana coperti. Il riscaldamento avveniva in un forno a muffola alla velocità di 3° al minuto primo fino a raggiungere i 100°C ; dopo permanenza a questa temperatura per 90-120 minuti il raffreddamento avveniva alla velocità di $3-5^\circ$ al minuto primo.

Il prodotto di ogni preparazione, lavato con acqua distillata fino a completo allontanamento del CaCl_2 che non aveva reagito, veniva esaminato al microscopio ed ai raggi X col metodo delle polveri. Nella tabella I sono riportate alcune delle preparazioni che hanno condotto alla formazione di $\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$.

TABELLA I.

Proporzione dei reagenti e prodotti di reazione nelle singole esperienze
(I valori indicano i numeri di mole).

N. esp.	$1/3\text{Co}_3\text{O}_4$	$\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	SiO_2	CaCl_2	Prodotti di reazione
75		2,75	I	2,75	$\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$, (CoCaSiO_4)
76	2,75	I,4	I	I2	» , CoCaSiO_4
77	0,7	I	I	4,5	»
78	I,4	2,75	I	I2	»
80	I,4	I,4	I	I2	»
81	0,5	0,5	I	4,5	»
89		I	I	5,5	»
91		2	I	I1	»

Come si vede dalla tabella la formazione del $\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$ nelle condizioni indicate avviene in un largo campo di rapporti fra i reagenti, inoltre la serie completa delle esperienze effettuate (serie, d'altronde ancora in corso) ha messo in luce che essa viene favorita dalla presenza fra i reagenti del cloruro di cobalto esaidrato, mentre l'uso del cloruro anidro conduce anche alla formazione del CoCaSiO_4 . Questo avviene nonostante che l'acqua di cristallizzazione del cloruro di cobalto venga assorbita, all'atto della mescolanza, dal CaCl_2 .

L'analisi chimica è stata effettuata sul prodotto delle preparazioni n. 77 e n. 78 che si presentavano dopo lavaggio pressoché interamente costituite dai cristalli in istudio. Il $\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$, insolubile in HCl conc. anche a caldo,

è stato attaccato per fusione in Na_2CO_3 . Dopo la determinazione della SiO_2 per insolubilizzazione, si è determinato il cobalto elettroliticamente ed il calcio come ossido.

Il risultato è il seguente:

	calcolato per $\text{CaCoSi}_2\text{O}_6$	osservato
SiO_2	47,83 %	47,50
CoO	29,84	28,94
CaO	22,33	22,59

I cristalli di $\text{CaCoSi}_2\text{O}_6$ si presentano di colore variante dal roseo chiaro al rosso violaceo a seconda della grossezza e della limpidezza.

Classe monoclina prismatica. Orientazione quella classica per il diopside.

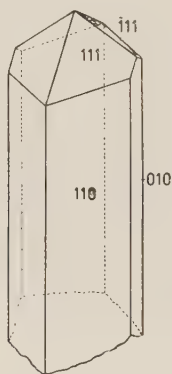


Fig. 1.

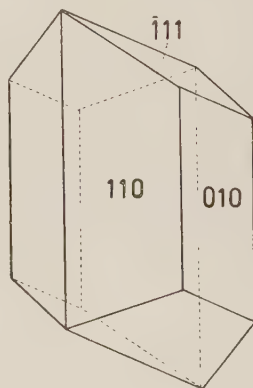


Fig. 2.

Si notano tre abiti:

a) prismatico allungato secondo l'asse z (lunghezza massima dei cristalli 2 mm) con le forme $\{110\}$, $\{010\}$ e $\{111\}$ e $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ (fig. 1);

b) prismatico tabulare allungato secondo l'asse z , forma a massimo sviluppo $\{010\}$ (lunghezza massima dei cristalli 1 mm);

c) tozzo per pressoché uguale sviluppo secondo i tre assi x, y, z ; ($< 0,5$ mm); i cristalli sono limitati dalle forme $\{110\}$, $\{010\}$ e $\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$ e mostrano un leggero appiattimento lungo l'asse y (fig. 2).

Le forme osservate presentano i valori angolari riportati nella tabella II nella quale sono dati anche i valori calcolati dal rapporto parametrico dedotto dalle costanti reticolari ricavate dagli spettrogrammi di Weissenberg nel modo che si dirà in seguito.

Le proprietà ottiche dei cristalli di $\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$ sono:

$$\begin{array}{ll} \alpha = 1,730 & \\ \gamma = 1,760 & 2V = 64^\circ \\ \text{calcolato } \beta = 1,738 & \end{array}$$

Piano degli assi ottici (010). $\beta = b; c : \alpha = 38^\circ$.

Gli indici sono stati misurati in luce bianca col metodo della linea di Becke, l'angolo assiale ottico alla piattaforma universale.

TABELLA II.
Misure goniometriche.

Angoli misurati	n. misure	limiti	media	calcolato	diff.
$010 \wedge 110$	44	$43^{\circ} 8' - 43^{\circ} 54'$	$43^{\circ} 29'$	$43^{\circ} 29'$	—
$100 \wedge 110$	3	$46^{\circ} 21' - 46^{\circ} 58'$	$46^{\circ} 33'$	$46^{\circ} 31'$	+ 2'
$110 \wedge 1\bar{1}0$	21	$92^{\circ} 39' - 93^{\circ} 21'$	$93^{\circ} 2'$	$93^{\circ} 2'$	—
$010 \wedge 111$	20	$64^{\circ} 29' - 66^{\circ} 32'$	$65^{\circ} 38'$	$65^{\circ} 46'$	— 8'
$111 \wedge 1\bar{1}1$	11	$47^{\circ} 29' - 50^{\circ} 2'$	$48^{\circ} 30'$	$48^{\circ} 29'$	+ 1'
$010 \wedge 1\bar{1}1$	22	$59^{\circ} 30' - 61^{\circ} 33'$	$60^{\circ} 34'$	$60^{\circ} 33'$	+ 1'
$1\bar{1}1 \wedge 1\bar{1}\bar{1}$	15	$58^{\circ} 4' - 60^{\circ} 4'$	$58^{\circ} 58'$	$58^{\circ} 54'$	+ 4'
$110 \wedge 111$	14	$44^{\circ} 31' - 45^{\circ} 27'$	$44^{\circ} 58'$	$45^{\circ} 37'$	— 39'
$111 \wedge 1\bar{1}\bar{1}$	12	$74^{\circ} 32' - 76^{\circ} 11'$	$75^{\circ} 27'$	$75^{\circ} 33'$	— 16'
$1\bar{1}\bar{1} \wedge 1\bar{1}0$	14	$58^{\circ} 36' - 61^{\circ} 3'$	$59^{\circ} 44'$	$58^{\circ} 50'$	+ 54'

La tabella III dà i valori delle distanze interreticolari calcolati dallo spettrogramma di polveri del $\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$, messi a confronto coi valori riportati su una delle schede ASTM per il diopside.

Le dimensioni della cella elementare sono state ricavate dalle misure effettuate sui Weissenberg equatore aventi come assi di rotazione i tre assi cristallografici $[100]$, $[010]$, $[001]$.

Previa taratura del diametro della camera, con spettrogrammi di polvere di quarzo, i valori di a_0 , b_0 , c_0 sono stati estrapolati usando le equazioni suggerite da Weisz, Cochran e Cole (1948).

L'angolo β^* è stato inoltre calcolato sia con il metodo delle triangolazioni (Buerger, 1942) sia con il metodo dell'« angular lag » (Buerger, 1942).

Ecco i risultati:

$$a_0 = 9,799 \pm 0,003 \text{ \AA}$$

$$b_0 = 8,956 \pm 0,002 \text{ \AA}$$

$$c_0 = 5,249 \pm 0,003 \text{ \AA}$$

$$\beta^* = 74^{\circ} 31' \quad \text{metodo triangolazioni}$$

$$\beta^* = 74^{\circ} 30' 30'' \quad \text{metodo « angular lag »}$$

$$\beta^* = 74^{\circ} 29' \quad \text{metodo Weisz, Cochran e Cole.}$$

Il rapporto parametrico risulta quindi:

$$a : b : c = 1,09417 : 1 : 0,58608. \quad \beta^* = 74^\circ 30' \pm 1'.$$

Volume della cella elementare: $443,9 \text{ \AA}^3$.

TABELLA III.

Spettrogrammi di polvere

$\text{FeK}_\alpha : \alpha_1 + \alpha_2$ media $\lambda = 1,9373 \text{ \AA} - 2r = 71,62 \text{ mm.}$

diopside ASTM		CoCaSi ₂ O ₆		diopside ASTM		CoCaSi ₂ O ₆	
I	d	I	d	I	d	I	I
—	—	40	6,56	20	1,66	—	—
—	—	20	4,73	100	1,62	50	1,62
10	4,50	10	4,51	—	—	10	1,57
10	4,16	—	—	30	1,52	20	1,53
20	3,41	—	—	30	1,50	20	1,50
50	3,26	25	3,25	90	1,42	30	1,43
100	3,00	100	2,99	—	—	20	1,41
30	2,91	10	2,90	80	1,32	30	1,33
20	2,57	40	2,57	70	1,28	20	1,28
100	2,52	70	2,53	50	1,26	10	1,26
10	2,44	—	—	30	1,24	10	1,25
20	2,30	—	—	20	1,21	—	—
20	2,21	20	2,20	—	—	10	1,18
50	2,13	30	2,13	30	1,15	—	—
—	—	10	2,12	10	1,13	—	—
30	2,04	—	—	10	1,12	—	—
30	2,01	30	2,01	10	1,11	—	—
—	—	15	1,87	100	1,07	40	1,07
40	1,83	—	—	30	1,06	20	1,06
70	1,74	30	1,76				

d corretti per lo spessore del preparato.

I stimate a vista attribuendo il valore 100 alla riga più intensa.

La densità calcolata ammettendo per il $\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$ la stessa struttura del $\text{MgCaSi}_2\text{O}_6$ con 4 molecole nella cella elementare è: 3,756 g/cc; la densità misurata col picnometro è risultata: 3,73 g/cc.

Sugli spettrogrammi di Weissenberg effettuati intorno ai tre assi cristallografici principali si osservano le seguenti estinzioni: (hkl) con $h + k$ dispari (h o l) con h ed l dispari, OkO con k dispari. Il gruppo spaziale più probabile è perciò, analogamente al $\text{MgCaSi}_2\text{O}_6$ ed al $\text{NiCaSi}_2\text{O}_6$, il $C_{2h}^6 = C 2/c$.

Ringrazio la Fondazione «Massimo di Giacomo» che consentendomi di usufruire di una borsa di studio, ha reso possibili queste ricerche.

BIBLIOGRAFIA.

- BOURGEOIS L. (1889), *Sur la préparation des ortosilicates de cobalt et de nickel cristallisés*, «Compt. Rend.», 108, 1177.
- BUERGER M. J. (1942), *X-ray Crystallography*, New York: John Wiley.
- COLA M. (1954), *Sintesi e proprietà cristallografiche ottiche e strutturali del composto CoCaSiO_4 (tipo monticellite)*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», Classe Sc. Fis. Mat. e Nat., ser. VIII, vol. XVII, fasc. 5, 258.
- GALLITELLI P. e COLA M. (1954), *Sintesi e proprietà cristallografiche e strutturali del composto Co_2SiO_4 (tipo dell'olivina)*, ibid., ser. VIII, vol. XVII, fasc. 5, 172.
- WEISZ O., COCHRAN W. e COLE W. F. (1948), *The accurate determination of cell dimensions from single-crystal x-ray photos*, «Acta Cryst.», 1, 83.

Fisiologia. — *Ancora sull'azione della penicillina sull'accrescimento e sulla differenziazione delle larve di «Bufo vulgaris»* (*).
Nota I di FERRUCCIO CHIUINI e LUCIANO MILETTI, presentata (**)
dal Corrisp. G. AMANTEA.

L'introduzione in terapia degli antibiotici, accanto ad una profonda rivoluzione nel capitolo delle malattie infettive, ha fatto sorgere una serie di problemi collaterali, pressoché tutti ancora aperti, che riguardano non soltanto il campo microbiologico come applicazione primaria e più eclatante dell'antibiotico, ma anche questioni di chimica, di fisiologia e patologia cellulare in senso lato.

Tra questi aspetti, che almeno per ora dobbiamo chiamare secondari, rispetto al fondamentale chemioterapico, vi è quello relativo all'influenza di tali sostanze sul metabolismo, non solo della cellula microbica, ma anche degli organismi superiori astraendo anche — cosa che interessa più strettamente l'applicazione clinica — dall'azione tossica di queste sostanze.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Perugia.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

Certamente molte delle azioni che diciamo secondarie e tossiche della penicillina possono essere imputate non alla frazione attiva, ma alle impurità presenti nel farmaco e che oggi sono notevolmente ridotte: infatti la purezza media della penicillina inizialmente usata era solo del 14 %⁽¹⁾, mentre oggi si ottengono preparazioni ad altissimo grado di purezza.

Altro fattore importante da tenere presente è quello relativo alle proprietà fisico-chimiche dei sali usati. Così secondo Welch⁽²⁾ i sali di K e Mg della penicillina hanno una tossicità, se usati per via venosa, 4 volte superiore a quella dei sali di Li e Na; tossicità probabilmente specifica del catione.

Anche i vari metodi di produzione della penicillina possono avere importanza, ed è da ritenere che l'eliminazione di certi materiali, microbiologicamente inerti, possa modificare anche gli effetti antibiotici.

Lo studio delle proprietà non chemioterapiche degli antibiotici in genere acquista nuovo interesse quando si pensi che alcune di queste sostanze le quali non possono essere usate a fini chemioterapici a causa della loro tossicità, potrebbero avere altre e non meno interessanti applicazioni.

Favorevole azione sarebbe stata riscontrata da Nickell⁽³⁻⁴⁾ sulla germinazione dei semi e sulla crescita di talune piantine in terreni trattati con antibiotici (penicillina e streptomina): sempre però a deboli concentrazioni, poiché a dosi elevate fu costantemente riscontrata inibizione. Anche Cortesi⁽⁵⁾ ha accertato una netta azione rizogena della benzilpenicillina a piccole dosi su alcune piante.

Nel caso della penicillina ripetiamo che la quantità di impurità non è oggi in realtà molto elevata. Tuttavia si sono continuati ad attribuire all'antibiotico come tale alcuni effetti farmacodinamici, che attraverso nuove ricerche si è accertato essere solo conseguenza della impurità⁽¹⁾. Cornam⁽⁶⁾ e Lewis⁽⁷⁾ hanno dimostrato che saggi impuri di penicillina possiedono, contro il sarcoma dei ratti e dei topi, una certa attività che non si riscontra con penicillina G pura.

Duhnam e Rake⁽⁸⁾ osservarono che la penicillina impura esercita, sulla motilità del *treponema pallidum*, un'azione che non si ottiene con penicillina G pura.

Smith⁽⁹⁾ nel 1946 notò che la germinazione e la crescita delle radici era ritardata dalla penicillina impura, ma non da quella purificata, e precisò che l'acido indol-3-acetico e l'acido fenil-acetico, presenti come impurità, erano responsabili delle differenti attività.

(1) H. MOLITOR e O. E. GRAESSLE, « Journal Pharmaco. Exper. Therap. », Part. II, vol. 98, April 1950.

(2) H. WELCH, e coll., « Proc. Soc. Exper. Biol. Med. », 55 (1944).

(3) L. G. NICHELL, « Antibio. e Chemothe. », III, 4 (1953).

(4) L. G. NICKELL e A. C. FINLAY, « J. Agri. Food. Che. », 2, febbraio 1954.

(5) R. CORTESI, « Fitoterapia », XXV, 4, 523 (1954).

(6) I. CORNAM, « Science », 99, 247 (1944).

(7) M. R. LEWIS, « Science », 100 (1944).

(8) W. B. DUHNAME, e G. RAKE, « Am. J. Siph. Genorrh. Ven. Dis. », 29 (1945).

(9) W. J. SMITH, « Science », 104 (1946).

Welch, Randall e Price ⁽¹⁰⁾ dimostrarono che l'effetto chemioterapico della penicillina impura era considerevolmente più grande di quello della penicillina G pura. Il totale delle impurità della penicillina grezza unito a penicillina G pura, costituiva un materiale avente le stesse proprietà della penicillina impura. Non è stato stabilito però se l'aumento di attività della penicillina impura sia dovuto ad un non meglio precisato « fattore di miglioramento » o sia causato principalmente dalla presenza di diversi tipi di penicillina (X, G, F, K).

La penicillina impura originale probabilmente consisteva di un miscuglio delle penicilline F, G, K, X. In tale miscuglio la proporzione relativa di ciascuna dipendeva: dal metodo di cultura, dal mezzo, dal metodo di estrazione e dal tipo di ceppo usato.

È stato dimostrato infine da Hobby e altri ⁽¹¹⁾, Eagle e collaboratori ⁽¹²⁾ che le varie penicilline diversificano considerevolmente nella attività chemioterapica e farmacologica.

Con la penicillina, a detta di vari Autori, le sole differenze che si notano sono quelle relative all'attività antibiotica, poiché tutte le forme di penicillina sono notevolmente esenti da proprietà farmacodinamiche e tossiche.

È stato però rilevato ⁽¹³⁾ che ponendo microorganismi in mezzo ambiente contenente penicillina, si nota un arresto della loro crescita, la quale riprende soltanto alcune ore dopo che la penicillina è stata allontanata.

Se differenze quantitative, nell'attività delle diverse forme di penicillina (le quali hanno tutte in comune il complesso della alanina e beta-dimetil-cisteina, e variano nell'acido sostituito copulato con l'amino gruppo dell'alanina) non sono risultate poi tanto grandi da giustificare la produzione di altri tipi, oltre la penicillina G (benzil-penicillina), che è ora la più usata anche per la sua stabilità allo stato secco.

Le penicilline sono acidi moderatamente forti e sono usate clinicamente sotto forma di sali di Na, K, ecc.

Le differenze principali fra le penicilline F, G, K, X, sono le seguenti:

a) dal punto di vista chemioterapico la penicillina K ha circa 1/16 dell'attività della penicillina G.

b) nei riguardi della tossicità non esiste però accordo: alcuni Autori ⁽¹⁴⁾ sostengono che la penicillina K scompare rapidamente dal sangue, forse per inattivazione da parte del siero ⁽¹⁵⁾ e che inoltre essa viene inattivata dai tessuti più che gli altri tipi di penicillina. Pedersen-Bjergaard e Tennesen ⁽¹⁶⁾ dimostrarono che le penicilline F, G, X, sono inattivate dal fegato in grado minore o almeno in maniera più lenta della K.

(10) H. WELCH, W. A. RANDALL, C. W. PRICE, « J. Am. Pharm. Assoc. », 36 (1947).

(11) G. L. HOBBY e coll., « Pro. Soc. Exper. Biol. Med. », 63 (1946).

(12) H. EAGLE, e coll., « J. Bact. », 52 (1946).

(13) R. F. PARKER, « J. Clin. Invest. », 27 (1948).

(14) H. EAGLE, « J. Exper. Med. », 85, 163-173 (1947).

(15) H. EAGLE, « J. Exper. Med. », 85, 140-161 (1947).

(16) K. PEDERSEN-BJERGAARD e M. TENNESEN, « Acta Pharmaco. », 5, 13-20 (1949).

Altri Autori⁽¹⁷⁾ hanno sostenuto che la penicillina G e la penicillina amorfa (probabilmente per il contenuto predominante di penicillina G) sono le meno tossiche e che, ad esempio, la penicillina K oltre a causare alterazione degli elementi retinici e la migrazione di pigmento nella retina, produce vaste aree di distruzione massiva e atrofia della retina.

Comunque stiano le cose, ciascuno dei fattori citati può alterare i risultati degli studi farmacologici e clinici se le preparazioni di penicillina usate consistono di una miscela di tutte e quattro le penicilline in proporzioni varie, come avveniva nel periodo bellico.

Per scopi pratici comunque la penicillina G - come anche rilevato prima - è l'agente di scelta a causa della facilità e del basso costo di produzione e nulla giustifica, in base ai dati sperimentali ottenuti, l'uso di un miscuglio delle quattro penicilline.

I primi studi con la penicillina grezza avevano già mostrato che essa possedeva tossicità molto bassa in confronto alla sua elevata potenza antibiotica. Chain⁽¹⁸⁾ confermava l'osservazione originale di Fleming che un brodo contenente penicillina e un concentrato preparato da questo non era più tossico del brodo stesso. Uno dei primi studi condotto da Van Dyke⁽¹⁹⁾ su un piccolo numero di animali confermò essenzialmente le conclusioni fatte dai primi ricercatori relative alla non tossicità della penicillina pura.

Malgrado tale tossicità eccezionalmente bassa le osservazioni di Hamre e collaboratori⁽²⁰⁾, Heilman e Herrell⁽²¹⁾ misero in rilievo una particolare ipersensibilità delle cavie all'antibiotico, successivamente confermata usando penicillina G pura.

Non è possibile spiegare questo con esattezza, ma è noto che le cavie sono ipersensibili a molte sostanze contenenti antibiotici sì che sembra logico pensare che la bassa tolleranza alla penicillina sia riportabile a fenomeni allergici.

Nei riguardi di una eventuale tossicità da uso prolungato non si trova in letteratura alcuno studio sperimentale su animali cui fosse somministrata penicillina G pura durante parecchie settimane e mesi. Che la penicillina sia ben tollerata dall'uomo in grandi dosi e per lungo periodo di tempo risulta da numerosi dati clinici (l'antibiotico infatti è stato somministrato a pazienti, ad esempio con endocardite batterica, anche in dosi estremamente grandi); ma che tale uso prolungato sia del tutto privo di fenomeni tossici, immediati o lontani, è ancora cosa da discutere.

Risulta comunque che alte concentrazioni di penicillina G pura deprimono l'ampiezza delle contrazioni del cuore di rana. Tuttavia le concentrazioni richieste (100 mg/o) sono tanto ipertoniche da rendere possibile che i fenomeni osservati possano essere stati non strettamente specifici⁽²⁾.

(17) P. A. GARDINER e coll., « Brit. J. Ophthalmol. », 768-775, octob. (1947).

(18) E. CHAIN e coll., « Lancet », 2, 226-228 (1940).

(19) H. B. VAN DYKE, « Proc. Soc. Exper. Biol. Med. », 56, 212-214 (1944).

(20) D. M. HAMRE e coll., « Am. J. Med. Sci. », 206, 642-652 (1943).

(21) F. R. HEILMAN e W. E. HERRELL, « Proc. Staff Meetings Mayo Clinic », 19, 89-99 (1944).

Somministrando a gatti anestetizzati singole dosi endovena di 500.000 U/Kg. di penicillina G pura si ottiene una modesta caduta della pressione carotidea e una leggera dispnea⁽²²⁾.

L'aggiunta da 5 a 100 mg. di penicillina G pura sodica a 200 cc. di soluzione fisiologica produce un rilassamento leggero della muscolatura dell'intestino isolato di coniglio⁽²²⁾. Penicillina pura G sodica in una concentrazione di una parte per 546.000 parti di soluzione fisiologica determinava una leggera contrazione dell'utero isolato delle cavie⁽¹⁹⁾. Anche per la donna è stato dimostrato che la somministrazione di penicillina durante la gravidanza può produrre aumento dell'attività uterina ed anche l'aborto⁽²³⁾.

Johnson e Walker⁽²⁴⁾ hanno notato l'insorgenza di segni neurotossici nell'uomo in seguito alla iniezione intracisternale di 50.000 U. di penicillina amorfa. Gli stessi ricercatori⁽²⁵⁾ hanno dimostrato che le iniezioni intracisternali, intraventricolari e intracorticali da 200 a 2000 U. di penicillina nei gatti topi e scimmie producono convulsioni ed attacchi epilettiformi accompagnati da modificazioni elettroencefalografiche. Queste modificazioni sono tipiche e non dovute al volume od alla concentrazione in H^+ della soluzione di penicillina iniettata, nè ancora ad impurità accidentali perché la distruzione dell'attività antibiotica ad opera delle penicillinasi abolisce tali effetti.

Gli esperimenti di Medawar citati da Abraham e altri⁽²⁶⁾ dimostrano che la penicillina grezza ad una concentrazione di 1/6000 è tossica per i fibroblasti del cuore embrionale di pollo. Secondo quanto riportato da Herrell e Heilman⁽²⁷⁾ la presenza di penicillina in quantità che sarebbero antibatteriche non interferisce con la migrazione o la crescita degli elementi tissurali quali i leucociti, i fibroblasti od i macrofagi.

L'irritazione ed il dolore nel punto d'iniezione erano una volta fatti comuni, e per certe preparazioni anche oggi, ma l'iniezione di penicillina poteva produrre anche necrosi locale. Le preparazioni più purificate danno reazioni locali di gran lunga inferiori.

In conclusione l'insieme delle ricerche accennate ha mostrato che:

1° le prime penicilline usate avevano una maggiore tossicità dovuta alla presenza di impurità in quantità notevole;

2° la penicillina oggi più usata (G sodica) non ha effetti tossici di grado elevato;

3° in alcuni animali e in alcuni organi e tessuti è però possibile mettere in evidenza effetti tossici specificamente dovuti alla penicillina, come tale;

4° la penicillina al di fuori dell'azione antibiotica, e dei suoi effetti tossici sembra possedere altre proprietà notevolmente interessanti (crescita di vegetali, eccitazione della muscolatura liscia, ecc.).

(22) S. KUNA, Personal Comunicazione (Molitor e Graessle).

(23) H. M. LEAVITT, « J. Ven. Dis. Inform. », 26, 150-153 (1945).

(24) H. C. JOHNSON e A. E. WALKER, « J.A.M.A. », 127, 217-219 (1945).

(25) A. E. WALKER e H. C. JOHNSON, *Penicillin in Neurology*. C. C. Thomas Springfield, III, 1946.

(26) E. P. ABRAHAM e coll., « Lancet », 2, 177-189 (1941).

(27) W. E. HERRELL e D. H. HEILMAN, « Am. J. Med. Sci. », 206, 221-226 (1943).

Non risultava ad ogni modo che alcuno si fosse proposto di adoperare, nello studio delle azioni collaterali dell'antibiotico, quel magnifico test biologico che è rappresentato dalle larve di anfibio anuri. Queste permettono allo sperimentatore, non soltanto lo studio dell'evoluzione dei fenomeni di accrescimento somatico, bensì anche quello dei fenomeni di differenziazione, certamente non meno importanti dei primi.

Uno di noi si propose di sperimentare in tal senso ed in una Nota del 1952⁽²⁸⁾ espose i risultati di una prima serie di ricerche in proposito.

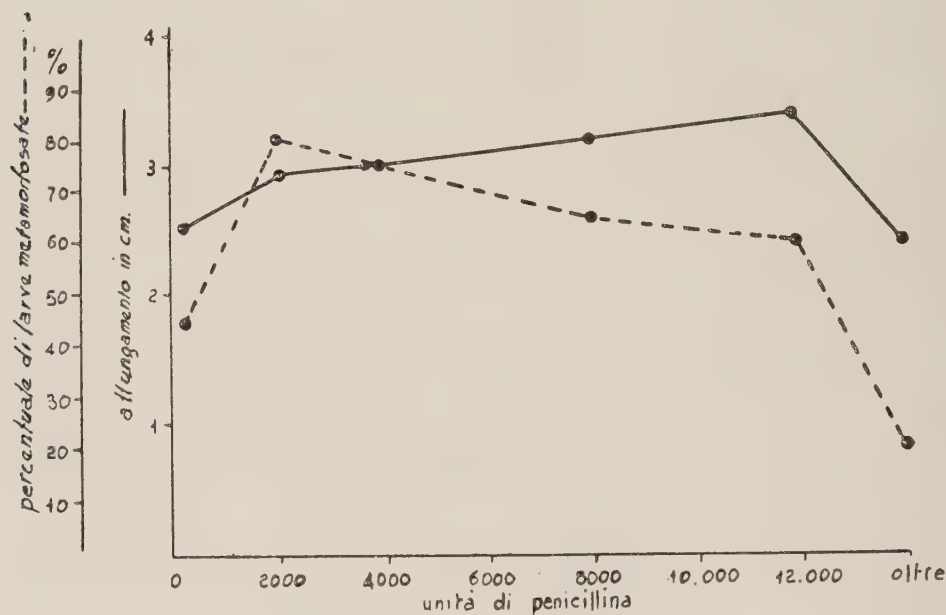


Fig. I.

Risultò allora che:

1° le larve che ricevevano l'aggiunta al liquido in cui vivevano di piccole dosi *pro die* di penicillina (da 200 a 12.000 U.) mostravano di trarne notevole vantaggio nei riguardi dell'accrescimento. Tale vantaggio appariva chiaramente proporzionale (sempre nell'ambito delle dette dosi) alla quantità di penicillina aggiunta *pro die*;

2° dosi maggiori (da 50.000 a 200.000 U.) non favorivano l'accrescimento che tendeva a diminuire progressivamente fino ad annullarsi. Per le dosi massime usate si osservò un arresto totale della crescita nel 15% circa dei soggetti in esperimento;

3° nei riguardi della differenziazione si osservò in linea generale che le forti dosi la ritardavano e solo le piccolissime la favorivano come è chiaramente dimostrato dal grafico riportato; per di più la metamorfosi non appariva del tutto armonica.

(28) F. CHIUINI, « Boll. Sc. It. Biol. Sper. », 6 (1953).

Fisiologia vegetale. — *Sulla presenza del ciclo di ossidazione diretta degli esosio-mono-fosfati in preparati mitocondriali vegetali* (*). Nota di ORIETTA SERVETTAZ, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

In seguito alle ricerche di Warburg [1], Dickens [2], Horecker [3], Racker [4] e numerosi altri AA., in questi ultimi anni si sono venute rapidamente accumulando numerose dimostrazioni dell'esistenza in molti tessuti, accanto alla via glicolitica classica di demolizione dei glucidi, di una seconda via degradativa dei glucidi stessi, detta ossidazione diretta degli esosio-mono-fosfati, o ciclo di Horecker. Molto schematicamente le reazioni di questo ciclo, che si presentano molto complesse e notevolmente intrecciate tra di loro e con altre vie metaboliche, si possono indicare in questo modo: il glucoso-6-fosfato (Gl-6-P) è ossidato, mediante la Gl-6-P deidrogenasi (a TPN) a 6-fosfo-gluconato (6-P-Gl); questo a sua volta è ossidato attraverso la 6-P-Gl deidrogenasi (pure a TPN) a riboso-5-fosfato (R-5-P). Il R-5-P così formato si mette in equilibrio, mediante la fosfo-pentoso-isomerasi, con la forma chetonica, il ribuloso-5-fosfato (Ru-5-P). Da una molecola di R-5-P e una di Ru-5-P si hanno, con una reazione catalizzata da una transchetolasi, una molecola di 3-fosfo-glicero-aldeide e una molecola di uno zucchero a 7 atomi di carbonio, il sedoeptuloso-7-fosfato (S-7-P).

A loro volta 3-fosfo-glicero-aldeide e S-7-P possono dar luogo a fruttosio-6-fosfato e a eritroso-4-fosfato, per opera della transaldolasi. L'eritroso-4-fosfato può reagire con un'altra molecola di Ru-5-P e dare ancora 3-fosfoglicero-aldeide e Fr-6-P, reazione catalizzata pure da una transchetolasi. Il Fr-6-P può passare a Gl-6-P attraverso la fosfo-esoso-isomerasi, e il Gl-6-P può così rientrare nel ciclo, ovvero essere metabolizzato per altra via. Lo schema della fig. 1 rappresenta l'andamento del ciclo in queste sue linee molto generali.

La presenza del ciclo, dimostrata in un primo tempo in tessuti animali è stata in seguito ampiamente documentata anche in tessuti vegetali; e nelle più recenti ricerche, benché manchino ancora molti dati per poterne definire esattamente l'andamento, il ciclo di Horecker va assumendo un sempre maggior interesse, sia perché ne è dimostrata la presenza nei più diversi organismi, sia per la notevole importanza fisiologica che ad esso si può attribuire.

In tutta la letteratura che riguarda la via di ossidazione diretta degli esosio-mono-fosfati, gli enzimi ad essa appartenenti sono in generale considerati enzimi eminentemente solubili; cioè non legati a particolari strutture del plasma, al contrario, per esempio, degli enzimi del ciclo di Krebs che sono notoriamente legati ai mitocondri. Anche ricerche recenti sulla loca-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

lizzazione degli enzimi nella cellula [5] e in particolare nei mitocondri [6], non portano dati relativi agli enzimi del ciclo di Horecker; d'altra parte precedenti ricerche eseguite in questo laboratorio hanno dimostrato attivamente funzionante in preparati mitocondriali la Gl-6-P deidrogenasi, enzima che, come si è visto, condiziona il primo passaggio del ciclo qui considerato.

L'interesse fisiologico di una eventuale localizzazione a livello dei mitocondri del ciclo di Horecker appare notevolissimo, in quanto essa aprirebbe la via alla possibilità che gli enzimi in esso coinvolti possano trovarsi, in queste particelle altamente organizzate, in condizioni di coordinamento reciproco tale da assicurare una particolare efficacia alla loro azione; come risulta

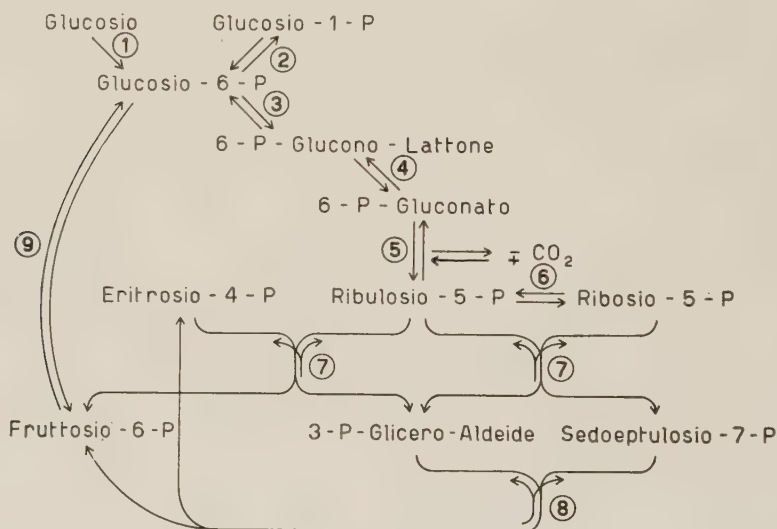


Fig. 1. - Schema del ciclo di ossidazione diretta del Glucosio-6-fosfato (o ciclo di Horecker).

- 1) Esocinasi, 2) Fosfoglicomutasi, 3) Glucosio-6-fosfato deidrogenasi, 4) Lattatasi,
5) 6-fosfo-gluconico deidrogenasi, 6) Fosfopentosoisomerasi, 7) Transchetolasi, 8) Transaldolasi, 9) Fosfoesosoisomerasi.

avvenire per gli enzimi del ciclo di Krebs, quando essi si trovano organizzati a sistema (cicloforasi, Green [7]) appunto nei mitocondri.

I risultati della presente ricerca sembrano esaurientemente dimostrare la presenza della maggior parte degli enzimi catalizzanti il ciclo dei glucidi fosforilati in preparati mitocondriali d'origine vetale.

MATERIALE E METODI.

Come materiale di partenza per la preparazione dei mitocondri ho usato sia il tessuto di tubero di patata, sia i tessuti apicali di piantine eziolate di piselli coltivate per 8-10 giorni all'oscurità in camera termoregolata a 25°C.

I mitocondri sono stati ottenuti secondo il metodo di Laties [8] tritando il tessuto fresco in mortaio con sabbia di quarzo in presenza di saccarosio 0,5 M. L'estratto così

ottenuto veniva centrifugato a bassa velocità per eliminare amido e frammenti di cellule, quindi i mitocondri venivano separati mediante centrifugazione a $20.000 \times g$., lavati e infine sospesi in saccarosio 0,5 M. e tampone al Tris 0,1 M., pH 7,3.

Il saccarosio veniva occasionalmente sostituito con KCl 0,35 M per evitare le interferenze che si presentavano in alcuni dosaggi (Roe, Dische). Tutte le operazioni di preparazione dei mitocondri venivano compiute in camera fredda a 4°C .

L'attività deidrogenasica a carico dei diversi substrati è stata determinata mediante la tecnica al cloruro di trifeniltetrazolio applicata nel vuoto [9]. L'attività della fosfo-pentoso-isomerasi è stata determinata come formazione di Ru-5-P da R-5-P dosando la comparsa del Ru-5-P col metodo di Dische e Borenfreund [10] modificato da Axelrod e Jang [11].

Allo stesso modo la presenza della transchetolasi veniva individuata dalla comparsa di S-7-P in preparati incubati con Gl-6-P e R-5-P, dosando il S-7-P secondo Dische [12].

L'attività, nei preparati mitocondriali, di esoso-fosfato-isomerasi è stata determinata dosando, negli stessi preparati incubati con Gl-6-P, la comparsa di Fr-6-P, dosaggio eseguito secondo il metodo di Roe [13].

Infine la presenza di fosfo-glico-mutasi è stata determinata dosando il fosforo inorganico e il fosforo idrolizzabile in 7 minuti in preparati incubati in presenza di Gl-1-P. Poiché è noto che il Gl-1-P libera tutto il suo fosfato in seguito a idrolisi acida a 100°C per 7 primi, mentre nelle stesse condizioni il Gl-6-P non è sensibilmente intaccato, dalla diminuzione del fosfato idrolizzabile in 7 minuti in incubati, in cui l'attività fosfatasi sia irrilevante, si può facilmente dedurre la trasformazione di Gl-1-P in Gl-6-P.

ESPERIENZE E RISULTATI.

Nelle mie esperienze ho successivamente cercato di dimostrare la presenza, in preparati mitocondriali, dei seguenti sistemi enzimatici *a)* fosfo-glico-mutasi, *b)* fosfo-esoso-isomerasi, *c)* Gl-6-P deidrogenasi, *d)* fosfo-pentoso-isomerasi, *e)* transchetolasi, *f)* lattonasi e 6-P-Gl deidrogenasi. La presenza di questi ultimi due enzimi è stata dedotta dalla formazione di S-7-P dal Gl-6-P, dopo che nei mitocondri era già stata constatata la presenza di Gl-6-P deidrogenasi, fosfo-pentoso-isomerasi e transchetolasi.

a) fosfo-glico-mutasi. — Una notevole attività di questo enzima in preparati mitocondriali ottenuti sia dal tubero di patata che dalla parte apicale di piantine eziolate di pisello appare già suggerita dal fatto che il Gl-1-P in presenza di TPN è ossidato con rapidità praticamente identica a quella con cui è ossidato il Gl-6-P: fatto la cui interpretazione più ovvia è quella di una pronta trasformazione, nel mitocondrio, ad opera appunto di una fosfo-glico-mutasi, del Gl-1-P a Gl-6-P.

La dimostrazione definitiva della presenza di questo enzima si deduce dai dati della tabella I, da cui si rileva come in preparati mitocondriali di apici di piselli eziolati, addizionati di Gl-1-P, il fosfato labile in 7 minuti di idrolisi acida a 100°C (quale appunto il fosfato del Gl-1-P) diminuisca rapidamente. Poiché nello stesso periodo di incubazione il fosforo inorganico rimane pressoché invariato, se ne deduce un aumento del fosfato organico idrolizzabile in 7 minuti primi, e quindi, secondo ogni evidenza, del Gl-6-P.

TABELLA I.

Formazione di Gl-6-P da Gl-1-P in preparati mitocondriali di apici di piselli eziolati. Mitocondri corrispondenti a 3 gm. di tessuto fresco sospesi in KCl 0,35 M. e Tris 0,1 M., pH 7,3. $MgCl_2$ 10^{-3} M. Gl-1-P 2 mg. Volume finale dell'incubato 1 cc. Temperatura 20°C. Dati come media di determinazioni in doppio.

Aggiunte	tempo di incubazione	γ P inorg.	Variazioni in 60 m. p. di incub.	γ P acido labile in 7 min.	Variazioni in 60 m. p. di incub.	Variazioni P organico resistente a idrolisi acida per 7 m. p.
—	0	35	—	45	—	
—	60 p.	55	+ 20	32	— 13	(— 7)
Gl-1-P	0	55	—	335	—	
Gl-1-P	60 p.	85	+ 30	215	— 120	+ 90

b) *fosfo-esoso-isomerasi*. — Come nel caso precedente, una buona indicazione della presenza di questo enzima è data dalla rapidità con cui i preparati mitocondriali in presenza di TPN ossidano il Fr-6-P, per opera di un enzima che sembra doversi identificare nella Gl-6-P deidrogenasi; e quindi solo dopo che la fosfo-esoso-isomerasi ha catalizzato la reazione $Fr-6-P \rightarrow Gl-6-P$.

Una dimostrazione più precisa della presenza della fosfo-esoso-isomerasi si deduce dalla Tabella II che mostra in preparati mitocondriali incubati con Gl-6-P un notevole aumento di un composto dosabile con il metodo di Roe, secondo ogni evidenza identificabile, nelle mie condizioni sperimentali, (scarsissima attività fosfataseica) come Fr-6-P.

TABELLA II.

Conversione del Gl-6-P in Fr-6-P in preparati mitocondriali di apici di pisello. Mitocondri corrispondenti a 8 gm. di tessuto fresco in KCl 0,35 M. e tampone citrico-soda 0,1 M., pH 6. Gl-6-P 3 mg./cc. Volume finale dell'incubato 2 cc. Tempo di incubazione 60 m. p. Temperatura 20°C. Dati come media di determinazioni in doppio.

Aggiunte	Composti dosabili come frutto 0-6-fosfato (in γ)			
	tempo di incubazione		Incremento	Incremento da trasformazione del Gl-6-P
	0	60 m. p.		
—	192	300	108	—
Gl-6-P	232	480	248	140

c) *Gl-6-P deidrogenasi*. — La presenza di questo enzima in preparati mitocondriali risulta evidente dai dati delle Tabelle III e IV. Essa era già stata del resto ripetutamente rilevata in altri lavori [10] [14] [15] [16].

TABELLA III.

Ossidazione del Gl-6-P, R-5-P, Fr-6-P e Fr-1,6-P da parte di preparati mitocondriali di apici di pisello. Mitocondri corrispondenti a 2 gm. di tessuto fresco in saccarosio 0,5 M. e Tris 0,1 M., pH 7,2. Substrati 4×10^{-2} M. TPN 20 γ ; TTC 1‰. Volume finale dell'incubato 1 cc. Temperatura 20°C. Dati come media di determinazioni in doppio.

Substrato	Coenzima	γ TTC ridotto/60 m. p.
—	—	0
Gl-6-P	TPN	71
Gl-1-P	TPN	62
R-5-P	TPN	11
Fr-6-P	TPN	47
Fr-1,6-P	TPN	13

TABELLA IV.

Ossidazione del Gl-6-P, Gl-1-P, R-5-P in preparati mitocondriali, di tubero di patata. Mitocondri corrispondenti a 4 gm. di tessuto fresco in saccarosio 0,5 M. e Tris 0,1 M., pH 7,2. Condizioni sperimentali come alla tabella III. Dati come media di determinazioni in doppio.

Substrato	Coenzima	γ TTC ridotto/60 m. p.
—	—	0
Gl-6-P	TPN	36
Gl-1-P	TPN	32
R-5-P	TPN	19

d) *Fosfo-pentoso-isomerasi*. — I preparati mitocondriali in presenza di TPN ossidano agevolmente il R-5-P (tabelle III e IV). Tra le vie note per cui il R-5-P può trasformarsi in composti ossidabili da deidrogenasi a

TPN la più probabile è quella che comprende il passaggio di parte del R-5-P a Ru-5-P ad opera della fosfo-pentoso-isomerasi, e quindi la reazione transchetolasica tra i due composti, con formazione di sedoeptuloso-7-P e di 3-P-gliceroaldeide, deidrogenabile nella foglia verde (Arnon [17]) da una 3-P-gliceroaldeide deidrogenasi a TPN.

Una prova diretta dell'attività della fosfo-pentoso-isomerasi nei preparati mitocondriali è data dal rapido aumento del Ru-5-P, dosato secondo Dische e Borenfreund, in preparati incubati con R-5-P (Tabella V).

TABELLA V.

Formazione di Ru-5-P in preparati mitocondriali di apici di pisello incubati in presenza di R-5-P. Mitocondri corrispondenti a 4 gm. di tessuto fresco in KCl 0,35 M. e Tris 0,1 M., pH 7,3. R-5-P 2 mg. Volume finale dell'incubato 1 cc. Formazione di Ru-5-P dedotta dall'aumento di D. O. a lunghezza d'onda di 540 mμ. Dati corretti per l'interferenza del R-5-P. Valori al tempo 0 sottratti.

Substrato	Incremento D. O. a 540 mμ per 2 ore di incubazione
—	0,013
R-5-P	0,080

TABELLA VI.

Comparsa di S-7-P in preparati mitocondriali di apici di pisello incubati con Gl-6-P e R-5-P. Mitocondri corrispondenti a 4 gm. di tessuto fresco sospesi in KCl 0,35 M. e Tris 0,1 M., pH 7,3. Gl-6-P 2 mg. R-5-P 1 mg. TPN 50 γ. Volume finale dell'incubato 1 cc. temperatura 20°C. Dati come media di determinazioni in doppio. Valori calcolati in base alle tabelle di Dische dalla differenza tra D. O. a 610 mμ e D. O. a 530 mμ.

Substrato	Coenzima	Incremento in γ Sedoeptuloso dopo incubazione	
		2 ore	5 ore
—	TPN	0	7
Gl-6-P	TPN	5	54
R-5-P	TPN	18	97

e) *Transchetolasi*. — Un'attività notevole per questo enzima nei mitocondri, già, come si è detto, indirettamente indicata dalla capacità dei mitocondri stessi di ossidare il R-5-P in presenza di TPN, è più sicuramente documentata dai risultati delle Tabelle VI e VII che mostrano la rapida comparsa di S-7-P in preparati mitocondriali di apici di pisello e di tubero di patata addizionati di R-5-P. Dato che i risultati di cui al paragrafo precedente dimostravano la presenza di fosfo-pentoso-isomerasi, tale comparsa di S-7-P è secondo ogni evidenza dovuta al seguente ciclo di reazioni: $\text{Ru-5-P} \rightleftharpoons \text{R-5-P}$ (fosfo-pentoso-isomerasi); $\text{R-5-P} + \text{Ru-5-P} \rightleftharpoons 3\text{-P-glic. aldeide} + \text{S-7-P}$ (transchetolasi).

TABELLA VII.

Comparsa di S-7-P in preparati mitocondriali di tubero di patata incubati in presenza di R-5-P. Mitocondri corrispondenti a 4 gm. di tessuto fresco sospesi in KCl 0,35 M. e Tris 0,1 M., pH 7,3 R-5-P 1 mg. Temperatura 20°C. Volume finale dell'incubato 1 cc. Dati come media di determinazioni in doppio.

Substrato	Coenzima	Incremento in γ S-7-P in 2 ore di incubazione
—	—	18
R-5-P	—	105

f) *6-P-gluconato deidrogenasi* e *6-P-glucono-lattonasi*. — La presenza di questi enzimi, generalmente concomitante a quella della Gl-6-P deidrogenasi sembra sufficientemente dimostrata dall'aumento di composti dosabili come Ru-5-P e come S-7-P in preparati addizionati di Gl-6-P e di TPN (Tabelle V, VI, VII).

CONCLUSIONI. — I dati sopra riportati dimostrano la presenza, nei mitocondri di diversi tessuti di piante superiori, del ciclo di ossidazione diretta degli esoso-mono-fosfati. Tali dati sono interessanti da un punto di vista fisiologico in quanto il ciclo di Horecker è interessato in due funzioni tra le più vitali della pianta: respirazione e fotosintesi.

Come precedentemente visto, infatti, la respirazione dei glucidi attraverso questa via è presente in vari tessuti vegetali [18], [19], [20], e in particolare è stata vista molto attiva in tessuti in fase di rapida crescita protoplasmatica [21], [22]; particolarmente importante poi appare il ciclo per quanto riguarda la fotosintesi poiché per questa via si arriva ai pentosi fosfati che, secondo le più recenti ricerche della scuola di Calvin [23], hanno primaria importanza come accettori della CO_2 .

Inoltre questi risultati impostano, da un punto di vista fisiomorfologico, un altro interessante problema. Essi infatti dimostrano come due sistemi enzimatici del tutto distinti tra loro, quale quello catalizzante l'ossidazione degli acidi di- e tricarbossilici e quello coinvolto nella demolizione ossidativa diretta degli esoso-mono-fosfati, siano entrambi presenti in « preparati mitocondriali » ottenuti per centrifugazione frazionata.

Sembra ora legittimo ritenere che alle diverse forme strutturali del condrioma, quasi sempre simultaneamente individuabili in una stessa cellula, debbano corrispondere caratteristiche diverse anche per quanto riguarda l'attività e il tipo di lavoro metabolico cui esse sono adibite, e quindi strutture diverse anche dal punto di vista enzimatico.

Si apre quindi il problema se questi due sistemi multienzimatici debbano ritenersi coesistenti entro le stesse particelle plasmatiche, o se, tra i mitocondri, alcune forme siano specificamente adibite ad un tipo o all'altro di reazioni.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] O. WARBURG e W. CHRISTIAN, « Biochem. Zeit. », 287, p. 440 (1936).
- [2] F. DICKENS, « British Med. Bull. », 9, 105 (1953).
- [3] B. L. HORECKER, in *Phosphorus Metabolism*, vol. I, Jons Hopkins Press Baltimore (1951).
- [4] E. RACKER in *Advances in Enzymology*, vol. 16, pp. 141-182.
- [5] D. R. GODDARD e H. A. STAFFORD, « Annual Review of Plant Physiology », vol. V, p. 115 (1954).
- [6] J. B. NEILANDS, P. K. STUMPF, R. Y. STEINER, in *Outlines of Enzyme Chemistry*, John Wiley & Sons, Inc. New York (1953).
- [7] D. E. GREEN, in *Enzymes and Enzyme Systems*, edit. J. T. Edsall, Harvard University Press (1951).
- [8] G. G. LATIES, « Physiologia Plan. », 6, p. 215 (1953).
- [9] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Giornale di Biochimica », vol. IV, n. 1, p. 10 (1955).
- [10] Z. DISCHE e J. BORENFREUND, « Journ. Biol. Chem. », 192, p. 583 (1951).
- [11] B. AXELROD e R. JANG, « Journ. Biol. Chem. », 209, p. 847 (1954).
- [12] Z. DISCHE, « Journ. Biol. Chem. », 204, p. 983 (1953).
- [13] *Manometric techniques and tissue metabolism*, p. 194, W. W. Umbreit, R. H. Burris and J. F. Stauffer, Burgess Publ. Minneapolis.
- [14] E. MARRÈ e C. DUGNANI, « Nuovo Giorn. Bot. It. », vol. 41, p. 214 (1954).
- [15] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Rend. Atti Acc. Lincei », cl. sc., serie VIII, 17, p. 264 (1954).
- [16] O. SERVETTAZ e E. MARRÈ, « Rend. Istituto Lomb. Sc. e Lett. », vol. 88, p. 823 (1955).
- [17] R. H. HAGEMANN e D. I. ARNON, « Arch. Biochem. and Biophys. », vol. 55, n. 1, p. 162 (1955).
- [18] B. AXELROD, R. S. BANDURSKI, C. M. GREINER and R. JANG, « Journ. Biol. Chem. », 202, p. 619 (1953).
- [19] M. GIBBS, « Plant Phys. », vol. 29, n. 1, p. 34 (1954).
- [20] H. BEEVERS and M. GIBBS, « Plant Phys. », vol. 29, n. 4, p. 322 (1954).
- [21] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Rend. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. », vol. 87, p. 135 (1954).
- [22] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Rendic. Acc. Lincei », classe di scienze, serie VIII, 16, p. 521 (1954).
- [23] M. CALVIN, « Rendiconti del Congresso Internazionale di Biochimica », Bruxelles (1955).

Biologia. — *Fenomeni di indipendenza tra accrescimento, morfogenesi, differenziamento istologico e funzione in abbozzi cardiaci espian-tati di embrione di pollo* (*). Nota di ALBERTO STEFANELLI e CLOTILDE LEVANTI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Il cuore embrionale di pollo si è prestato molto favorevolmente per lo studio di problemi sul differenziamento in rapporto alla attività funzionale che si manifesta con le contrazioni ritmiche degli elementi contrattili.

Le ricerche che sin ora hanno portato i contributi più notevoli sono quelle basate sulla coltura di frammenti *in vitro* di tessuto cardiaco dimostrando il meccanismo autonomo delle contrazioni sia prima del differenziamento (contrazione sarcoplasmatica), sia dopo (contrazione miofibrillare), differenziamento che si attua anche provocando il blocco delle contrazioni degli elementi in coltura. Coltivando i frammenti con succo embrionale è anche stata dimostrata la reversibilità del differenziamento miofibrillare.

Un'altra tecnica di coltura è quella consistente nell'isolamento *in vitro* dell'organo intero, che permette lo studio di problemi che riguardano la morfogenesi nelle condizioni provocate di isolamento, ma che è però assai meno facile da realizzarsi per la difficoltà di nutrire la massa notevole di tessuti dell'organo intero.

Nell'intraprendere prove di coltura di abbozzi cardiaci di pollo in vari terreni ci siamo imbattuti in un mezzo che, se si è dimostrato inadatto come mezzo di coltura nel vero senso della parola, permettendo semplicemente la sopravvivenza dell'abbozzo per un certo tempo (8 giorni al massimo ⁽¹⁾), ci ha permesso tuttavia di porre in evidenza alcuni aspetti delle interrelazioni che nel normale sviluppo vi sono tra accrescimento, sviluppo morfogenetico, differenziamento istologico e attività funzionale.

Come mezzo di coltura è stato usato, in queste esperienze, la miscela di Spratt (Ringer, albume, agar); come tecnica quella della goccia pendente, ricambiando il liquido ogni giorno. Temperatura di incubazione 38 C°.

I cuori venivano isolati da embrioni allo stadio di 14-16 somiti (dopo circa 40 ore di incubazione); dopo tempi diversi di incubazione *in vitro* venivano fissati in liquido di Bouin e le sezioni colorate con ematossilina ferrica. Contemporaneamente ai cuori espian-tati venivano fissati cuori di embrioni di controllo della stessa età. Dei vari stadi raggiunti dagli espian-ti e dei relativi stadi di controllo sono stati ricostruiti, dalle sezioni, modelli in cartone. Gli schemi della fig. 1 sono ricavati da detti modelli.

(*) Dal Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Ricordiamo come GRAY e POWELL (1952) siano riusciti a mantenere in vita in una soluzione di Tyrode più tuorlo d'uovo cuori embrionali di pollo per 90 giorni senza mai cambiare il liquido di coltura; sebbene nel nostro caso la sopravvivenza sia molto minore, essa è stata sufficiente a rivelare i fenomeni esposti in questa Nota.

Il cuore all'atto dell'espianto aveva la forma di tubo moderatamente curvo. Presentava 63 pulsazioni al minuto. Istologicamente appaiono già differenziate nei mioblasti sinciziali le miofibrille senza segni evidenti di striatura trasversa.

Appena isolato e messo nel terreno di coltura l'abbozzo cessava di contrarsi per poi riprendere gradualmente le pulsazioni. Dopo 55 ore, in media, di isolamento *in vitro* si è avuto il massimo del numero di contrazioni (36 al m') senza mai raggiungere quello del cuore al momento dell'espianto. A questo momento gli abbozzi espiantati manifestano alcune importanti condizioni morfologiche. Innanzi tutto non sono cresciuti affatto anzi appa-

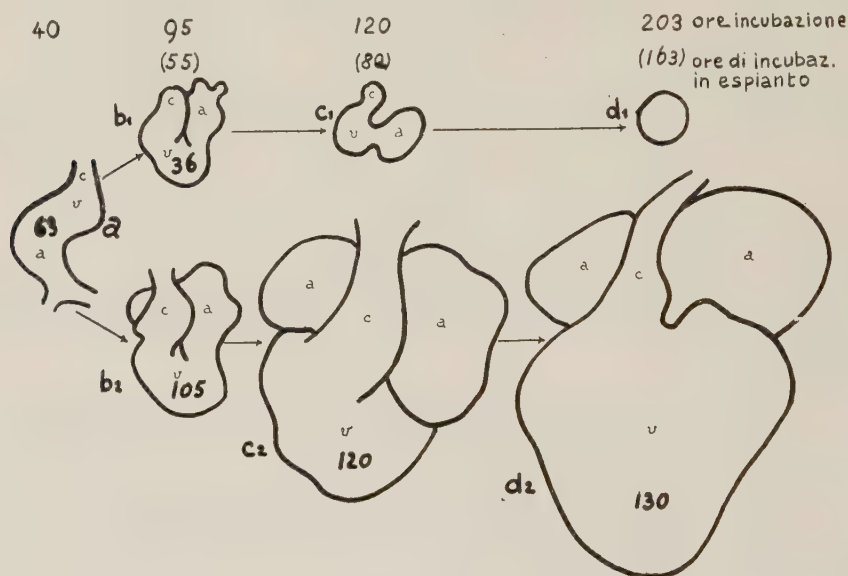


Fig. 1. - Schemi degli abbozzi cardiaci di embrioni di pollo normali ed espiantati *in vitro* ricavati da modelli ricostruiti dalle sezioni. Le cifre segnate superiormente indicano le ore di incubazione e tra parentesi le ore di incubazione in espianto. Le cifre inscritte negli abbozzi indicano il numero di pulsazioni al minuto.

a, stadio in cui sono stati effettuati gli espianti dell'organo; *b* 1, *c* 1, *d* 1, stadi successivi degli espianti e *b* 2, *c* 2, *d* 2 stadi successivi dei controlli. *a*, regione atriale; *c*, cono arterioso; *v*, regione ventricolare.

iono un poco ridotti di volume per riduzione della cavità interna); l'assenza di cariocinesi, come è stato possibile poi vedere nei preparati, dimostra che ogni attività proliferativa era rimasta bloccata. Tuttavia la forma dell'espianto mostra chiaramente (fig. 1 *b* 1, *b* 2) che, malgrado si sia arrestato l'accrescimento, lo sviluppo morfogenetico era continuato con il ripiegamento del tubo allo stesso modo di quanto avviene nel cuore di controllo della stessa età. Istologicamente si osserva che, mentre nel cuore di controllo i mioblasti si vanno allungando, le miofibrille divengono più numerose e comincia ad apparire quà e là evidente la striatura trasversa, nell'abbozzo espiantato non si ha invece allungamento apprezzabile dei mioblasti e come, pur essendo ben visibili le miofibrille, non sia distinguibile alcuna striatura neppure iniziale. È anche da notare che mentre i nuclei del cuore di controllo si

sono ingranditi e la cromatina si è andata risolvendo in granulazioni minori, pur conservandosi ancora due zollette più grosse, nell'abbozzo espianato i nuclei conservano l'aspetto primitivo dei mioblasti con la cromatina ammassata in una o più di frequente due grosse zolle fortemente colorate⁽²⁾.

Dopo questo stadio il numero delle pulsazioni dei cuori isolati andava gradualmente scemando sino ad arrestarsi del tutto dopo circa 80 ore di isolamento; nel cuore di controllo, dopo 120 ore di incubazione si potevano invece contare 120 pulsazioni al m'. Morfologicamente si nota una ulteriore riduzione del volume dell'espianato e un rilasciamento delle parti che si erano ripiegate su se stesse. Ma, mentre morfologicamente e funzionalmente si ha una regressione, si nota invece istologicamente che, pur non allungandosi le fibre come nel controllo (ove sono già allungatissime e con miofibrille con striatura evidente) e mantenendo una forma primitiva, accorciata, la striatura trasversa diventa ben distinguibile, seppure delicata. Non sono invece più distinguibili le miofibrille come entità microscopicamente visibili (nemmeno in contrasto di fase). I nuclei conservano l'aspetto primitivo con la cromatina addensata in due grosse zolle centrali.

Da questo stadio cominciavano a carico degli espianati fenomeni degenerativi e gli abbozzi si riducevano, dopo circa otto giorni di isolamento *in vitro* a piccole vescicolette. Istologicamente si può osservare come negli elementi muscolari, fortemente ratrappiti e con segni di sofferenza, pur non essendo più visibili le miofibrille, risulti ancor più netta ed evidente che nello stadio precedente la striatura trasversa. Nella Tavola sono illustrate le condizioni istologiche degli espianati nei vari stadi indicati e quelle dei cuori normali di controllo della stessa età.

Con questo mezzo di isolamento *in vitro*, che ha permesso solo la sopravvivenza dell'abbozzo senza ulteriore accrescimento, si sono messe in evidenza alcune condizioni di indipendenza di fenomeni che nel normale sviluppo appaiono associati e interdipendenti: accrescimento, morfogenesi, differenziamento e attività funzionale.

Innanzitutto, pur cessando l'accrescimento, continua lo sviluppo morfologico e a 95 ore di incubazione è raggiunto lo stesso stadio morfologico sia nei controlli che negli abbozzi isolati *in vitro*. Il ripiegamento del tubo cardiaco con spostamento anatomico in posizione anteriore della regione atriale, morfologicamente posteriore rispetto a quella ventricolare, è pertanto in relazione a fattori intrinseci dell'abbozzo. Il fenomeno si è verificato pur essendosi ridotto notevolmente il ritmo del battito cardiaco. È questo un bell'esempio di sviluppo morfogenetico senza accrescimento (o più esattamente con decremento).

Da questo momento gli espianati cominciano a rallentare le loro pulsazioni e dopo 80 ore di isolamento esse cessano del tutto. Morfologicamente

(2) Data la colorazione con ematosilina ferrica non ci è possibile per ora identificare in queste granulazioni siderofile cromocentri o nucleoli.

si osserva un rilasciamento della ripiegatura già acquisita (una regressione morfologica) e una riduzione manifesta del volume dell'abbozzo in parte dovuta alla riduzione delle cavità interne e in parte al ratrappimento e alla ipotrofia degli elementi muscolari, preludio ai processi degenerativi che incominciano a manifestarsi dopo circa 160 ore di condizione di espianto. Peculiare è anche il comportamento del differenziamento istologico. Infatti, dopo 55 ore di isolamento *in vitro*, quando l'abbozzo è morfologicamente molto simile al normale e presenta il maggior numero di pulsazioni, il grado di differenziamento istologico non corrisponde al controllo poiché, mentre in questo si inizia l'allungamento delle fibre e si inizia la striatura delle miofibrille, negli espianti i mioblasti associati sincizialmente non si sono allungati e, pur presentando una manifesta differenziazione miofibrillare, non presentano striatura. Nello stadio successivo, invece, quando è già cessata la contrazione, pur non allungandosi le fibre e pur divenendo invisibili le miofibrille, appare la striatura, delicata ma ben evidente. E fenomeno ancor più curioso è che la striatura diviene ancor più evidente negli stadi successivi quando già l'abbozzo manifesta segni di sofferenza che precedono la degenerazione. Si può notare questo fatto nelle microfotografie della Tavola, malgrado la difficoltà di far apparire in fotografia queste strutture assai tenui. È opportuno il raffronto con il quadro istologico dei controlli dove è evidente l'allungamento delle fibre e la normale evoluzione della striatura. Questo fatto dimostra come la differenziazione della striatura non solo sia indipendente dalla attività contrattile, come era già stato dimostrato con la coltura di mioblasti *in vitro*, ma come si attui e proceda anche in condizioni abnormi di forma delle fibre e in condizioni di sofferenza dell'abbozzo espantato. Si può dire che il differenziamento della striatura delle fibre cardiache, pur rallentata negli abbozzi espantati rispetto ai controlli, continui indipendentemente dalla attività funzionale dell'organo, dalla sua evoluzione morfologica e dalle condizioni di sofferenza che precedono l'involutione.

In conclusione, mediante espianti in sopravvivenza *in vitro* di abbozzi interi di cuore di pollo, si è potuto dimostrare una dissociazione dei processi dello sviluppo che di norma appaiono associati, quali l'accrescimento, la morfogenesi, il differenziamento istologico e l'attività funzionale. Infatti pur venendo ad arrestarsi ogni accrescimento la morfogenesi continua secondo il piano normale per un certo periodo. Il differenziamento istologico presenta anch'esso una peculiare dissociazione e si attua indipendentemente dalla attività contrattile, iniziandosi dopo che questa è cessata del tutto. Infatti, mentre non si manifesta alcun allungamento delle fibre e pur rimanendo i nuclei dello stesso aspetto di quelli dei mioblasti, si delinea e poi si perfeziona la striatura traversa, anche quando le miofibrille non sono più distinguibili come unità distinte. Tale processo di differenziazione della striatura prosegue anche quando incominciano ad apparire i segni evidenti della degenerazione dell'espianto.

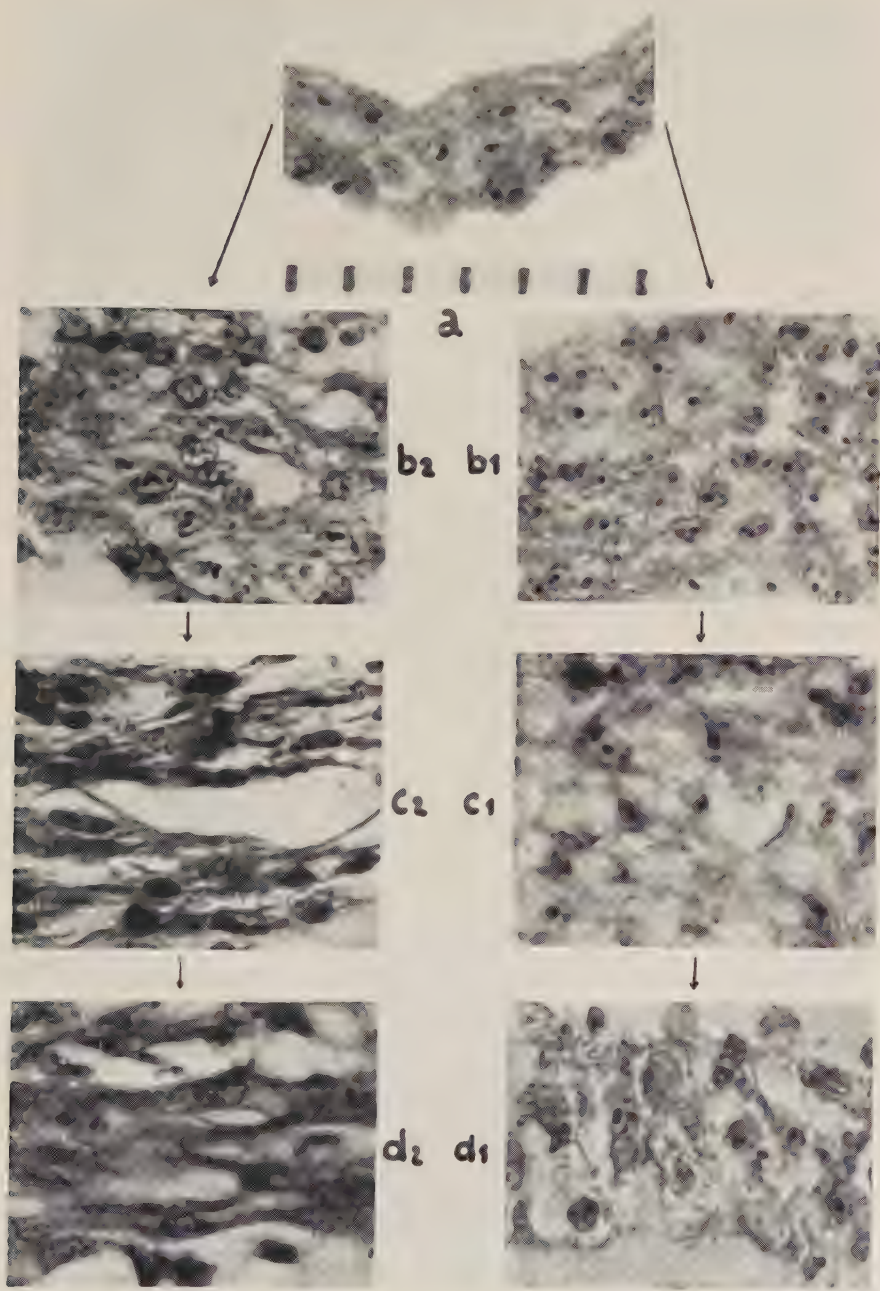


Tavola I. - Fotogrammi corrispondenti degli stadi indicati nella fig. 1 (preparati colorati con ematossilina ferrica; ogni divisione della scala alla base del fotogramma $a = 10 \mu$).

a , al momento dell'isolamento dell'abbozzo (40 ore di incub.) b_1 , c_1 , d_1 strutture istologica ventricolare dopo 55, 80 e 163 ore di isolamento *in vitro*; b_2 , c_2 , d_2 stadi corrispondenti di cuori di embrioni normali rispettivamente di 95, 120, 203 ore di incubazione. Note negli espianti la condizione primitiva sempre conservata di nuclei con la cromatina concentrata in una o due zolle, centrali e il mancato allungamento delle fibre, la presenza di miofibrille non striate in a e b_1 e di striatura senza miofibrille visibili in c_1 e d_1 ; nei controlli la striatura appare evidente già nello stadio b_2 .

COMUNICAZIONI VARIE

Il prof. Giordani è lieto d'informare i Colleghi che il Presidente della Repubblica Giovanni Gronchi ha generosamente messo a disposizione della Accademia la somma di due milioni di lire, per consentirle di bandire, per il 1956, due Premi Nazionali di un milione di lire ciascuno, che sono stati destinati rispettivamente alla Fisica e all'Archeologia, secondo la rotazione delle discipline prevista dal Regolamento dei Premi Nazionali, a suo tempo istituiti da Luigi Einaudi.

Il prof. Giordani, nella certezza di interpretare l'unanime sentimento dei Colleghi, rivolge un pensiero di devoto ringraziamento al Capo dello Stato e assicura che il Presidente Arangio-Ruiz invierà a Giovanni Gronchi un messaggio per esprimergli la più viva gratitudine dell'intera Accademia.

La Classe si associa ad unanimità con un vibrante applauso.

Il Presidente comunica che è presente alla seduta il prof. Einar Hille, della Yale University di New Haven (Conn., U.S.A.) e porge all'illustre ospite il cordiale saluto della Classe e suo personale.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Picone, Tonzig, Bonino, Segre, Cotronei, Scorza Dragoni e Armellini.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

FINZI L. — Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico.

Nota II (pres. dal Socio G. KRALL).

MARINI M. — Osservazioni sul nucleo della cellula nervosa degli Anfibi Urodeli (pres. dal Socio G. COTRONEI).

TALLINI G. — Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti. Nota I e II (pres. dal Socio B. SEGRE).

CONGRESSI

Il Presidente dà la parola al Collega Crocco che svolge una comunicazione relativa al VII Congresso Internazionale Astronautico, che avrà luogo in Roma nei giorni 17-22 settembre 1956, mettendo in evidenza l'eccezionale importanza di questa manifestazione e l'opportunità che alla stessa non manchi l'apporto scientifico dei più autorevoli studiosi del nostro Paese. L'importanza del Congresso, cui parteciperanno i rappresentanti di circa venti nazioni associate in Federazione Astronautica Internazionale (I.A.F.), deriva questo anno dall'imminenza dell'Anno Geofisico Internazionale e dall'annuncio uffì-

ziale che gli Stati Uniti d'America lanceranno, a scopo geofisico, i primi satelliti artificiali della Terra.

Il Socio Crocco ritiene improbabile che l'apporto dell'Italia possa risultare di natura realizzativa o sperimentale perché le esperienze in questo campo, anche limitate allo studio dei fenomeni della combustione e del getto propellente, sono già materia di una bibliografia di centinaia di scritti; e non sarebbero possibili contributi originali senza adeguati e costosi laboratori di ricerca. Tanto meno è probabile un apporto italiano di natura realizzativa. Il lancio di un satellite richiede infatti un complesso apparato lanciatore per il quale sarebbe necessaria una spesa di non meno di 200 milioni di lire italiane. Altrettanto costerebbe una mezza dozzina di missili-sonda per esplorazioni dell'alta atmosfera sulla verticale di lancio. Il solo apporto possibile da parte dell'Italia è pertanto quello scientifico; ed è peraltro il più ricercato ed apprezzato perché si conosce l'originalità del pensiero italiano.

Nel rivolgersi alla Classe per ottenere questo apporto, il Socio Crocco suggerisce in particolare tre temi: uno di Dinamica, uno di Geofisica ed uno di Fisica e Fisiologia.

È noto infatti che l'Astronautica, come scienza, si è concretata da circa trent'anni, soprattutto per opera di Goddard e Oberth: e che tutta la sua veste dinamica è stata matematicamente delineata. Ma di questa Dinamica, che deriva dall'Astronomia, sono state semplificate le trattazioni con ipotesi di approssimazione che permettessero di dedurre leggi generali e possibilità esecutive. Anche il problema del satellite artificiale è stato trattato, sino a ieri, con varie semplificazioni.

Si tratta ora di affrontare il problema dinamico realistico, tenendo conto di tutte le perturbazioni astronomiche e ricorrendo alle calcolatrici elettroniche per la soluzione delle complesse equazioni da cui dipende. Poiché anche l'Italia ha ormai questa possibilità presso il nostro Istituto di Calcolo, opera del Collega prof. Picone, si ritiene che questo tema possa venire affrontato con successo da Soci appartenenti alla 1ª Categoria.

Il secondo tema è implicito nel compito stesso del satellite artificiale che si svolge a quote extra-atmosferiche già toccate per brevi istanti dai missili-sonda; e viene quindi ad estenderle nel tempo e nello spazio durante una permanenza di qualche settimana. Si possono prendere in considerazione particolari strumentazioni, metodi di osservazione e di segnalazione, orbite privilegiate e speciali aspetti geofisici di attualità.

Il terzo tema riguarda i *raggi cosmici* ed è il più interessante e basilare, nel futuro dell'Astronautica, per l'accesso dell'uomo agli spazi extra-atmosferici.

I raggi cosmici fuori dell'atmosfera hanno una potenza penetrante che attraversa ogni pratico schermaggio e distrugge con azione cumulativa i tessuti fisiologici. Questa radiazione, che giunge sulla Terra trasformata e ridotta, può costituire quindi nello spazio cosmico il principale ostacolo alla durata della permanenza dell'uomo fuori dell'atmosfera terrestre: perché i tessuti umani non possono sopportare un assorbimento di raggi superiore ad una

dose, ancora indeterminata, ma concreta di unità roentgen. Importa quindi determinare la potenza ionizzante e la frequenza di questi raggi per dedurne i limiti di tolleranza umana in confronto di esperimenti fisiologici.

Alcuni dei Soci della Sezione di Fisica e di quella di Fisiologia possono indubbiamente apportare un contributo fondamentale a questo tema.

Il Socio Crocco conclude rinnovando ai Colleghi la viva preghiera di voler raccogliere l'invito.

Il Socio Armellini, mentre prende atto con vivo compiacimento delle dichiarazioni del Collega Crocco, gli chiede se sarebbe possibile introdurre nel satellite artificiale degli apparecchi che possano registrare lo spettro solare.

Il Socio Crocco risponde che ciò gli sembra difficile, soprattutto perché si tratterebbe di gravare il satellite del peso degli apparecchi, mentre il satellite stesso deve essere il più possibile leggero, perché il lancio richiede un apparato lanciatore che pesi in partenza circa 200 volte il peso in arrivo. Così, per un satellite il cui peso di struttura e strumentazione sia, ad esempio, di 100 chili, occorre un complesso lanciatore del peso di 200 quintali, di cui 160 di propellenti. Un'altra difficoltà poi per la ripresa degli spettri solari è data dal fatto che il satellite, probabilmente, avrà un movimento giroscopico.

Il Presidente ringrazia il Socio Crocco e propone che gli uffici dell'Accademia, su indicazione del Socio stesso, preparino e trasmettano a tutti i membri della Classe un resoconto sintetico della sua comunicazione, in modo che tutti ne siano informati e coloro che lo desiderino possano far pervenire la loro adesione alla Segreteria dell'Accademia.

La proposta del Presidente è approvata ad unanimità.

Il Socio Crocco ringrazia e assicura che si considera a disposizione degli interessati per ogni notizia bibliografica riguardante ciascun argomento.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Accademico illustra le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'11 febbraio 1956

- AKADEMIJA NAUK SSSR. — *Atlas effektivyh nejtronnyh sečenij elementov*. Moskva, 1955. Pp. XXXVI-272, in-4° obl.
- AKOBJANOFF Lev. — *Photon kinetics*. A study of periodicity in light. Berkeley, 1955. Pp. 33, in-4° (In ciclostile).
- BIRCHER R. — Vedi: ROTHLIN E., BIRCHER R. und SUTER E.
- GALLO Piero. — *Studio dei rapporti quantitativi e topografici tra i capillari e le fibre del sistema di conduzione atrioventricolare e del loro valore funzionale*. Roma, Istituto di Anatomia Umana Normale dell'Università di Perugia, 1955. Pp. 19, in-8°.
- Kul'tura Mnogoletnih trav v BSSR. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, Institut Socialističeskogo Sel'skogo Hozjajstva, 1955. Pp. 299, in-8°.
- LANDOGNA CASSONE Francesco. — *La Costituzione nel suo sviluppo e negli aspetti antropologici*. Roma, Bonacci, 1955. Pp. 303, in-8°, con figg. e tavv.
- *La persona criminale*. Moderna concezione Antropologica. Roma, Istituto Italiano di Antropologia, 1952 (Supplemento al vol. XXXIX della « Rivista di Antropologia »).
- « *Molini d'Italia* ». Rassegna Economica dei Cereali e Derivati. A. VI, 1955, n. 11 (Il numero contiene gli Atti Ufficiali del 2° Convegno Nazionale delle Paste Alimentari).
- Paleontologija i Stratigrafija BSSR*. Fasc. 1. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, Institut Geologičeskikh Nauk, 1955. Pp. 179, in-8°, con figg.
- POLSKA AKADEMIA NAUK. — *Gospodarka wodna roślin*. Materialy sesji problemowej wydziału II PAN (27-28-29 maja 1954). Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1955. Pp. 199, in-8°, con figg. (Zeszyty Problemowe Nauki Polskiej, III).
- POLSKA AKADEMIA NAUK — *Zagadnienie drobnoustrojów ciepłopornych w przemyśle i patologii*. Materialy sesji problemowej komitetu mikrobiologicznego PAN (Warszawa, 24-25 maja 1954 r.). Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1955. Pp. 186, in-8° (Zeszyty Problemowe Nauki Polskiej, IV).
- Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition 1947-1948*. Vol. II: Zoology, fasc. II. Vol. VII: *Sediment Cores from the North Atlantic Ocean*, fasc. III. Göteborg, Kungl. Vetenskaps-och Vitterhets-Samhälle, 1955. Voll. 2, in-4°.
- ROTHLIN E., BIRCHER R. und SUTER E. — *Glykosidwirkung auf Elektrokardiogramm und Myokard*. Estr. da « *Helvetica Physiologica et Pharmacologica Acta* », vol. V, fasc. 3 e vol. VII, fasc. 1.
- SOCIETÀ ADRIATICA DI ELETTRICITÀ. — *Impianti della Soc. Adriatica di Elettricità, 1905-1955*. Venezia, 1955. Pp. XIX-234, in-4°, con figg. (Cinquantenario della fondazione della Società).
- SUTER E. — Vedi: ROTHLIN E., BIRCHER R., und SUTER E.
- TECHNISCHE HOGESCHOOL TE DELFT. — *Bibliografie der dissertaties ter verkrijging van de titel van Doctor in de Technische Wetenschap en lijst der promoties honoris causa, 1905-1955*. 'S-Gravenhage, 1955. Pp. VIII-167, in-16°.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 marzo 1956

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.* Nota I^(*) del Socio BENIAMINO SEGRE.

1. In una mia vecchia Nota lincea [7], ebbi già ad indicare come – nello studio dei sistemi di equazioni a derivate parziali lineari ed a coefficienti costanti – ci si possa servire con grande utilità dell'isomorfismo fra l'anello commutativo dei relativi operatori differenziali e quello di opportuni polinomi.

Nella presente Nota I, sfruttando ancora un siffatto isomorfismo, pervengo rapidamente a sviscerare la teoria dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, in un qualunque numero di incognite, lineari ed a coefficienti costanti. Così ritrovo i risultati ottenuti in proposito dal Jordan [1, n. 141] e da Picone e Fichera [2, n. 102] nel caso non degenerare, e da Picone e Ghizzetti [3] nel caso degenerare, e ne aggiungo altri. Fra i risultati nuovi, può venir segnalato quello espresso dal teorema finale del n. 7, il quale risponde ad un'interessante questione postami dal prof. Picone.

Nelle successive Note II e III tratterò mediante metodi consimili i sistemi di equazioni a derivate parziali, rispettivamente con una sola funzione incognita e con un qualunque numero di incognite, giungendo fra l'altro a generalizzare e chiarire geometricamente alcuni risultati anteriori sull'argomento dovuti a L. Sobrero ed a G. Fichera.

Va ricordato che fra la teoria dei sistemi di equazioni differenziali e quella dei sistemi di equazioni algebriche intercedono notevoli analogie, quando nella prima ci si restringa ad equazioni che siano algebriche rispetto

(*) Presentata nella seduta del 10 marzo 1956.

alle funzioni incognite ed alle loro derivate: cfr. specialmente J. F. Ritt [4], [5]. Occorre tuttavia rilevare che, nel caso - relativamente particolare - qui trattato dei sistemi di equazioni differenziali lineari ed a coefficienti costanti, si presenta di fatto, assai più delle suddette analogie, la possibilità di risolvere compiutamente una larga categoria di problemi concernenti quei sistemi, riconducendoli - almeno in parte - a questioni puramente algebriche. Di ciò il presente lavoro (come già la Nota [7]) offre un certo numero di esempi significativi, ai quali se ne potranno in seguito aggiungere altri.

2. Per fissare le idee, svolgeremo le nostre considerazioni nel campo reale: ma ciò che diremo potrebbe facilmente venir esteso ad altri corpi commutativi (ad esempio al campo complesso). In questa Nota I, le y, z e le u, v (eventualmente munite di indici) denoteranno funzioni - le prime incognite e le altre note - di una variabile x , definite in uno stesso intervallo ed ivi derivabili finché occorra. Chiameremo poi brevemente polinomio differenziale un operatore differenziale del tipo

$$\alpha = \alpha \left(\frac{d}{dx} \right) = a_0 \frac{d^k}{dx^k} + a_1 \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \cdots + a_{k-1} \frac{d}{dx} + a_k,$$

ove le a siano costanti: esso risulta d'ordine k se $a_0 \neq 0$, nel qual caso a_0 si dirà il suo coefficiente direttore.

Con tali notazioni, un'equazione differenziale ordinaria lineare ed a coefficienti costanti

$$(1) \quad a_0 \frac{d^k y}{dx^k} + a_1 \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \cdots + a_{k-1} \frac{dy}{dx} + a_k y = u$$

può venire scritta semplicemente nella forma

$$\alpha y = u.$$

È ben noto che, se $a_0 \neq 0$, l'integrale generale della (1) dipende da k costanti arbitrarie essenziali, e può venire ottenuto mediante quadrature, previa la risoluzione dell'equazione algebrica d'ordine k : $\alpha(x) = 0$ [la cosiddetta equazione caratteristica della (1)].

Ci occuperemo dapprima dei sistemi formati da un qualunque numero n (≥ 1) di equazioni differenziali ordinarie, lineari ed a coefficienti costanti, in un qualunque numero m (≥ 1) di funzioni incognite. Con una ovvia estensione delle precedenti notazioni, il più generale sistema di questo tipo è dato dalle

$$(2) \quad \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} y_j = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

le (2) possono anche venir espresse - in modo più compatto - coll'unica equazione fra matrici

$$(3) \quad AY = U,$$

dove A denota la matrice (ad n righe ed m colonne) dei polinomi differenziali α_{ij} e, del pari, indichiamo con Y ed U i complessi verticali (rispettivamente incognito e noto) formati dalle (y_1, y_2, \dots, y_m) e dalle (u_1, u_2, \dots, u_n) .

3. Presa una qualunque matrice quadrata N d'ordine n , i cui elementi $v_{hi} = v_{hi}(d/dx)$ ($h, i = 1, 2, \dots, n$) siano polinomi differenziali arbitrari, le (2) — ossia la (3) — implicano il sistema rappresentato dalla

$$(4) \quad NAY = NU;$$

ed invero, la h^{ma} equazione di questo sistema si ottiene applicando (a sinistra) ai due membri della i^{ma} equazione (2) l'operatore differenziale v_{hi} e poi sommando fra loro a membro a membro le equazioni che così si hanno per $i = 1, 2, \dots, n$.

È importante rilevare che, nell'ipotesi che il determinante della matrice N — espresso in ogni caso da un polinomio differenziale — si riduca ad una costante non nulla, si può considerare la matrice inversa N^{-1} , essa pure ad elementi polinomi differenziali. In tale ipotesi i due sistemi (3) e (4) si equivalgono, poiché (3) segue ovviamente da (4) col moltiplicarne i due membri a sinistra per N^{-1} . In virtù di un noto risultato algebrico (cfr. ad esempio Schreier-Sperner [6], § 8), nell'ipotesi suddetta si può passare dal sistema (3) al sistema (4) operando convenientemente un numero finito di volte sulle equazioni del sistema, in uno dei due modi elementari seguenti:

a) si sostituisca ad un'equazione del sistema quella che da essa si deduce moltiplicandone i due membri per una costante non nulla;

b) si sostituisca ad un'equazione del sistema quella che da essa si deduce col sommarla a membro a membro con l'equazione ricavata da un'altra equazione (del sistema stesso) applicando ai due membri di questa un arbitrario polinomio differenziale.

4. Non si altera l'essenza del problema d'integrare il sistema (3), ove in luogo delle funzioni incognite (y_1, y_2, \dots, y_m) si assumano le (z_1, z_2, \dots, z_m) legate a quelle dalla

$$(5) \quad Y = MZ,$$

dove M denoti una matrice quadrata d'ordine m , ad elementi polinomi differenziali, il cui determinante si riduca ad una costante non nulla. Invero allora la (5) si risolve univocamente, sotto forma finita rispetto alle z , con la

$$Z = M^{-1} Y.$$

In virtù del risultato algebrico già utilizzato nel n. 3, il passaggio dalle y alle z può ottenersi operando convenientemente un numero finito di volte sulle y in uno dei due modi elementari seguenti:

$a')$ si sostituisca una, y_j , delle y_j con cy_j , dove c sia un'arbitraria costante non nulla;

$b')$ si sostituisca una, y_j , delle y con $y_j + \gamma y_l$, dove sia $l \neq j$ e γ denoti un qualunque polinomio differenziale.

5. Se ora applichiamo la trasformazione (5) al sistema (4) di cui al n. 3, veniamo in definitiva a sostituire (3) col sistema equivalente

$$(6) \quad BZ = V,$$

dove per abbreviare si è posto

$$(7) \quad B = NAM,$$

$$(8) \quad V = NU,$$

M, N denotando due arbitrarie matrici quadrate degli ordini m, n , ad elementi polinomi differenziali, i cui determinanti siano costanti non nulle.

È noto ⁽¹⁾ che, qualora si disponga opportunamente delle suddette matrici M, N , la B data dalla (7) può venire ridotta alla classica forma canonica in cui tutti gli elementi sono nulli tranne i primi r elementi principali, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$, ove r denoti il rango della matrice A ; questi uguagliano ordinatamente i cosiddetti divisori elementari di A , e risultano polinomi differenziali (non nulli) univocamente determinati, ciascuno a coefficiente direttore unitario, soddisfacenti alle condizioni ⁽²⁾

$$(9) \quad \beta_1 | \beta_2 | \dots | \beta_r$$

e calcolabili a partire da A col seguente procedimento algebrico. Denotiamo con δ_k (per $k = 1, 2, \dots, r$) il polinomio differenziale, a coefficiente direttore unitario, dato dal M.C.D. dei minori d'ordine k estratti dalla matrice A . Allora valgono le relazioni di divisibilità:

$$\delta_1 | \delta_2 | \dots | \delta_r,$$

ed inoltre, posto $\delta_0 = 1$, risulta

$$(10) \quad \beta_k = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \dots, r).$$

6. Ridotto B alla forma canonica testé specificata (n. 5), il sistema (6) – ove lo si scriva in modo esplicito – si spezza manifestamente nei due seguenti sistemi

$$(11) \quad \beta_k z_k = v_k \quad (k = 1, 2, \dots, r),$$

$$(12) \quad v_l = 0 \quad (l = r + 1, r + 2, \dots, n),$$

(1) Cfr. ad esempio SCHREIER-SPERNER [6], § 8, oppure WEDDERBURN [8], pp. 33-37. Entrambe queste trattazioni si riferiscono a matrici quadrate ad elementi polinomi; ma esse si estendono subito al caso di matrici rettangolari.

(2) Qui e nel seguito, se ρ e σ sono due polinomi, scriviamo $\rho | \sigma$ per esprimere che il primo di essi divide il secondo.

il secondo dei quali viene a mancare se, e soltanto se, $r = n$. Avuto riguardo alle (8), le (12) appaiono come $n - r$ distinte equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, per le funzioni note u_1, u_2, \dots, u_n [a secondo membro nelle (2)], onde le si potranno chiamare le condizioni d'integrabilità del dato sistema (2), in quanto tali equazioni debbono risultare soddisfatte affinché questo sistema ammetta soluzioni. In quest'ipotesi basterà dunque limitarsi alle r restanti equazioni differenziali (11), ciascuna relativa ad una ed una sola delle r funzioni incognite z_1, z_2, \dots, z_r , sicché — se $m > r$ — le rimanenti z_{r+1}, \dots, z_m risultano del tutto arbitrarie.

A norma di quanto è stato ricordato nel secondo capoverso del n. 2, le singole equazioni (11) possono venire integrate mediante quadrature; e l'integrale generale di tali equazioni dipende da un numero complessivo di costanti arbitrarie essenziali dato dalla somma dei gradi dei polinomi β , ossia — tenuto anche conto delle (10) — dal grado del polinomio

$$\beta_1 \beta_2 \dots \beta_r = \delta_r.$$

Inoltre l'integrazione delle suddette equazioni comporta la risoluzione delle equazioni algebriche

$$\beta_1(x) = 0, \quad \beta_2(x) = 0, \quad \dots, \quad \beta_r(x) = 0,$$

le radici delle quali sono sempre tutte anche radici della

$$(13) \quad \beta_r(x) = 0,$$

in forza delle (9). La (13) ha poi per grado la differenza dei gradi dei polinomi δ_r e δ_{r-1} , in virtù dell'ultima equazione (10).

Concludiamo così col seguente enunciato, parte del quale trovasi già altrimenti acquisito in Picone e Ghizzetti [3].

Dato un sistema (2) di n equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti in m funzioni incognite y_1, y_2, \dots, y_m (dove le α_{ij} denotino mn polinomi differenziali arbitrari e le u_1, u_2, \dots, u_n siano n funzioni assegnate), e detto r il rango della matrice A delle α , per la compatibilità del sistema occorre e basta che le u verifichino certe $n - r$ distinte equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti (naturalmente mancanti se $r = n$). Se queste condizioni sono soddisfatte, l'integrale generale del sistema (2) si ottiene con sole operazioni algebriche e quadrature, e dipende da $m - r$ funzioni arbitrarie e da un numero di costanti arbitrarie essenziali pari al grado del M.C.D. δ_r dei minori d'ordine r della matrice A . Le suddette operazioni algebriche si riducono poi essenzialmente alla risoluzione dell'equazione algebrica (13), il cui grado è la differenza dei gradi del polinomio δ_r di cui sopra e dell'analogo polinomio δ_{r-1} relativo ai minori d'ordine $r - 1$ di A (con $\delta_{r-1} = 1$ se $r = 1$).

7. Il procedimento indicato nei nn. 3-6 fornisce un metodo pratico per la formazione delle condizioni d'integrabilità (12), come pure per l'integrazione del sistema (2). Esso poggia essenzialmente sulla determinazione delle

matrici M, N riducenti A alla forma canonica (7), il che - a norma dei nn. 3, 4 - equivale a passare dal sistema (2) al sistema formato dalle (11), (12) mediante una conveniente successione finita di operazioni elementari dei tipi $a), b)$ ed $a'), b')$. I calcoli all'uopo necessari possono però risultare assai lunghi: è quindi opportuno dare un criterio che permetta di giungere in modo più rapido e diretto alle (12).

A tal fine introduciamo i complessi orizzontali $R = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ ed $S = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, ove le ρ, σ denotino polinomi differenziali, per il momento legati soltanto dalla

$$S = RN,$$

ossia dalla

$$(14) \quad R = SN^{-1}.$$

È chiaro che la (6) implica che debba risultare

$$(15) \quad RV = 0$$

per ogni R che soddisfi alla

$$(16) \quad RB = 0;$$

inoltre, in forza delle (14), (8), (7), la (15) equivale alla

$$(17) \quad SU = 0$$

e la (16) equivale alla

$$(18) \quad SA = 0.$$

D'altro canto, assunto B nella forma canonica indicata nel n. 5, la (16) è soddisfatta se e soltanto se, le $\rho_{r+1}, \rho_{r+2}, \dots, \rho_n$ essendo arbitrarie, risulta

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_r = 0.$$

In tal caso la (15) si riduce alla

$$\rho_{r+1} v_{r+1} + \rho_{r+2} v_{r+2} + \dots + \rho_n v_n = 0,$$

ed equivale manifestamente alle (12) (le quali si hanno da quest'ultima assumendo ivi una delle $\rho_{r+1}, \rho_{r+2}, \dots, \rho_n$ uguale all'unità e tutte le altre uguali allo zero). Si ottengono dunque condizioni del tutto equivalenti alle (12), ove si esprima che vale la (17) per ogni S verificante la (18). Pertanto:

Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (2) - supposta la matrice A di rango $r < n$ - ammetta qualche soluzione, è che le u verifichino l'equazione differenziale

$$(19) \quad \sigma_1 u_1 + \sigma_2 u_2 + \dots + \sigma_n u_n = 0,$$

comunque si scelgano i polinomi differenziali $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ in guisa da soddisfare identicamente le:

$$(20) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \sigma_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

All'uopo basta che la (19) sussista in corrispondenza ad $n-r$ scelte delle σ che costituiscano un sistema primitivo — certamente esistente — di soluzioni delle (20) (dalle quali cioè ogni altra soluzione possa ottenersi come combinazione lineare a coefficienti polinomi differenziali).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] C. JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. III, 3^{ème} ed. (Paris, Gauthier-Villars, 1915).
- [2] M. PICONE e G. FICHERA, *Trattato di Analisi matematica*, vol. II (in corso di stampa).
- [3] M. PICONE e A. GHIZZETTI, *Integrazione dei sistemi degeneri di equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), 19, 195-199 (1955)₂.
- [4] J. F. RITT, *Differential equations from the algebraic standpoint* (« Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », vol. 14 (1932)).
- [5] J. F. RITT, *Differential Algebra* (« Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », vol. 33 (1950)).
- [6] O. SCHREIER u. E. SPERNER, *Einführung in die analytische Geometrie und Algebra*, II Bd. (Leipzig, Teubner, 1935).
- [7] B. SEGRE, *Sui sistemi di equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque, con una sola funzione incognita, lineari ed a coefficienti costanti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (6), 27, 208-212 (1938)₁.
- [8] J. H. M. WEDDERBURN, *Lectures on matrices* (« Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », vol. 17 (1934)).

Fisiologia. — *Il tempo di apnea in funzione della pressione endopolmonare* (*). Nota di R. MARGARIA, E. AGOSTONI e A. TAGLIETTI, presentata (**) dal Socio R. MARGARIA.

Nel corso di valutazioni del massimo lavoro potenziale dell'apparato respiratorio (Margaria e Marro 1954) è sorta la necessità di stabilire il tempo limite durante il quale deve essere mantenuta la massima pressione positiva o negativa. Già Rahn e Coll. (1946) nel rilevare i dati pressori utili per l'elaborazione del diagramma pressione-volume del torace e del polmone ritenevano validi solamente i valori massimi mantenuti per 3".

A questo fine è parso interessante studiare il tempo di apnea a volume polmonare medio in funzione delle pressioni endopolmonari: questo studio permette inoltre di indagare sulla validità del valore pressorio usato nella prova di Flack, che, già ad una prima analisi, risulta più costante del tempo di apnea semplice, il quale, come è noto, è molto variabile.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia della Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

La durata dell'apnea eseguita alla fine di una espirazione normale secondo Rahn e Fenn (1955), sarebbe condizionata dal tempo necessario perché P_{CO_2} e P_{O_2} alveolari variino rispettivamente circa $+9$ e -50 mmHg dai valori respiratori normali, che sarebbero i limiti estremi di tollerabilità da parte del soggetto.

Secondo i dati di Du Bois (1952), dopo 25'' di apnea iniziata alla fine di una espirazione normale, P_{CO_2} alveolare non è aumentato nella misura di 9 mmHg, e perciò il soggetto non dovrebbe avvertire un forte stimolo alla respirazione.

Mentre la durata dell'apnea semplice è verosimilmente condizionata dallo sforzo volitivo del soggetto nel resistere allo stimolo alla respirazione, nella prova di Flack invece, la saturazione dell'Hb in O_2 non scende ai valori critici indicati da Rahn ((Grandpierre e Coll. 1950), e la cessazione della prova deve essere attribuita ad altre cause.

Anche negli esperimenti sotto descritti la durata dell'apnea, qualora fosse inferiore a circa 25'', non dovrebbe essere condizionata da variazioni intollerabili di pressione dei gas respiratori nel sangue, ma da altri fattori.

Le prove sono state eseguite su due soggetti giovani, allenati alla respirazione con boccaglio e in particolare alle prove di pressione respiratoria di varia entità. Il soggetto seduto respirava aria a narici chiuse attraverso un boccaglio in uno spirometro registratore tipo Benedict, per il controllo della respirazione e del volume toracico prima dell'inizio dell'apnea. I valori pressori venivano rilevati mediante un manometro a mercurio in comunicazione con il boccaglio attraverso un breve tubo inestensibile: il soggetto poteva facilmente controllare il valore e la costanza della pressione esercitata durante l'apnea; non era invece informato sul tempo di apnea, che veniva calcolato dal momento in cui la pressione stabilita era raggiunta. L'apnea aveva inizio alla fine di una inspirazione normale quando si richiedeva un valore positivo di pressione, alla fine di una espirazione normale, quando si richiedeva un valore negativo: si chiudeva allora con un rubinetto la comunicazione tra gruppo valvolare e spirometro. La fine della prova era fissata dal momento in cui si constatava l'incapacità da parte del soggetto a mantenere il valore di pressione stabilita.

Un ossimetro registratore a cellula fotoelettrica tipo Millikan rilevava i valori di saturazione in ossigeno dell'emoglobina.

I valori ottenuti sono espressi nei diagrammi A e B della fig. 1, aventi sull'ordinata i valori di pressione intrapolmonare e sull'ascissa il tempo di apnea: ogni punto della curva è basato su 12-16 determinazioni, ed i limiti fiduciarî, con una probabilità del 95 %, sono contrassegnati dai punti delle linee tratteggiate.

I numeri che figurano accanto ai punti sperimentali indicano il dato ossimetrico medio alla fine di ogni prova. Dall'andamento delle determinazioni ossimetriche risulta che occorreano circa 15'' di apnea nelle prove a pressione positiva e circa 10'' in quelle a pressione negativa perché la satura-

zione dell'Hb in O₂ scendesse sotto il valore normale di 97,5 % (il tempo di risposta dell'ossimetro è < 1"). Nelle prove ai massimi valori di pressione, sia positiva che negativa, il tempo di apnea era troppo breve perché si potesse avere una sensibile desaturazione dell'Hb in O₂ alla fine della prova. Invece per i valori inferiori a 40 mmHg il tempo di apnea è sufficientemente lungo da causare una netta desaturazione in O₂ e implicitamente un aumento del P_{CO₂}, tali da determinare un forte stimolo alla respirazione; l'interruzione della prova è allora condizionata dalla capacità e dalla volontà del soggetto a resistere agli stimoli chimici alla respirazione.

Lo sforzo espiratorio per mantenere una determinata pressione positiva è minore dello sforzo inspiratorio necessario per mantenere una equivalente pressione negativa, perché una parte del primo, valutabile a circa 5 mmHg- (Rahn e Coll. 1946), è sostenuto dalla elasticità delle strutture toracopolmonari, mentre il secondo è totalmente a carico dei muscoli. Questa considerazione può in parte rendere ragione della maggior durata dell'apnea nelle prove a pressione positiva rispetto a quelle a pressione negativa.

Un aumento della pressione endotoracica costituisce un ostacolo al ritorno del sangue venoso al cuore e quindi alla circolazione polmonare. Una diminuzione della pressione endotoracica invece provoca una dilatazione vascolare e quindi una congestione del polmone. I limiti di rottura dei polmoni durante le pressioni positive e di dilatazione acuta di cuore e congestione polmonare grave con emorragie capillari durante le pressioni negative, messi in evidenza da Rahn e Coll. (1946), che si raggiungono nei massimi sforzi quando si parte da condizioni estreme di volume polmonare, non venivano raggiunti in questi esperimenti, perché le prove sono state eseguite a volume polmonare medio.

Dalle argomentazioni sopra esposte risulta che i dati più costanti e più facilmente riproducibili si hanno a valori pressori compresi tra 40 e 60 mmHg sia positivi che negativi: a valori pressori minori entra in gioco il fattore variabile del soggetto di voler resistere allo stimolo chimico alla respirazione; valori pressori elevati inducono nel soggetto una sensazione di disagio e di timore. Mentre negli esperimenti a bassa pressione, e quindi a lunga durata, il tempo di apnea è verosimilmente condizionato dagli stimoli chimici alla respirazione (ipercapnia, anossiemia) in quelli a pressione elevata esso potrebbe dipendere sia dal particolare stato dei centri nervosi alla fine della prova, sia dal tipo e dall'entità di stimoli che partono dalla periferia con tutta probabilità a livello dei fusi neuromuscolari dei muscoli interessati, dei tensocettori dei tessuti toracopolmonari, del cuore, dei vasi polmonari, delle vene. (D. M. Aviado e C. F. Schmidt, 1955).

Nelle prove a pressione positiva si ha presumibilmente ipertensione nel circolo polmonare, ostacolo al ritorno venoso, diminuzione della pressione sistemica, tachicardia sinusale, cui segue, dopo la fine della prova, bradicardia con qualche extrasistole nodale e sopraventricolare: questi effetti sono stati osservati da Célice e Coll. (1952) sperimentando con un valore di pressione endopolmonare di 40 mmHg.

La durata dell'apnea nella prova di Flack, che si inizia dopo un'inspirazione massima, è superiore a quella a volume polmonare medio per la maggior quantità d'aria a disposizione, la maggior capacità vascolare polmonare, che può agire come riserva di sangue (Cournand 1947), e per la stimolazione dei tensocettori polmonari, che conduce ad una inibizione del centro inspiratorio (Muxworthy 1951).

Incidentalmente si può osservare dai dati ottenuti che il valore pressorio usato nella prova di Flack è tale che il soggetto non è sollecitato

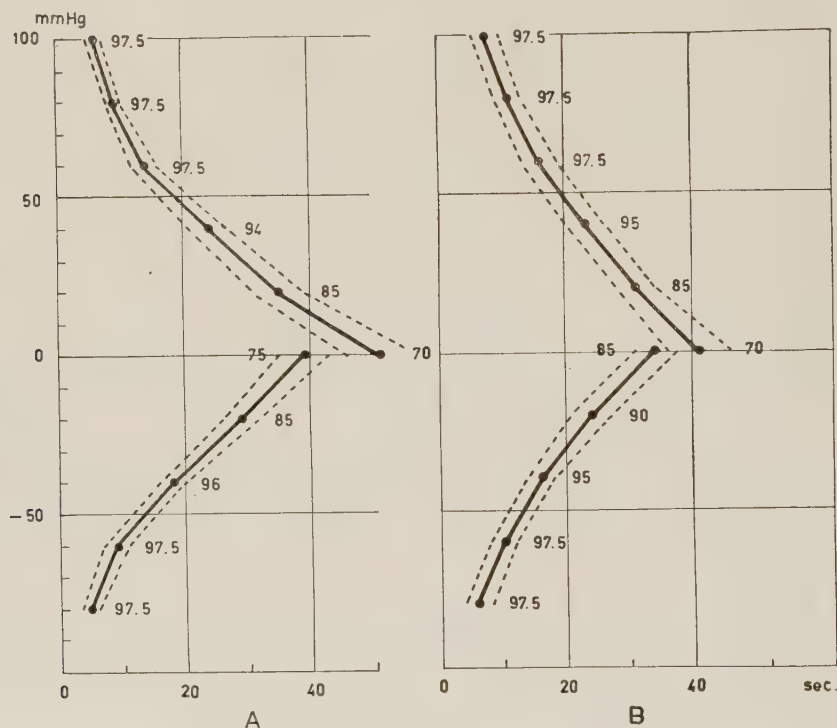


Fig. 1. - Tempo di apnea (ascissa) in funzione della pressione endopolmonare (ordinata).

da stimoli chimici alla respirazione troppo intensi; né d'altra parte gli stimoli non chimici, dei quali si è accennato dianzi, e che sarebbero causa dell'interruzione della prova negli esperimenti ad alta pressione e breve durata, sono di tale intensità da dare un grave senso di disagio al soggetto e da condurre alla rapida interruzione della prova.

Dai diagrammi della fig. 1 risulta come il tempo di apnea sia funzione della pressione esercitata; di qui l'utilità, nel corso della valutazione del massimo lavoro potenziale dell'apparato respiratorio o in genere quando si voglia rilevare la massima pressione in- od espiratoria, di stabilire il tempo durante il quale il soggetto deve mantenere la massima pressione.

Per la costruzione del diagramma volume—pressione dell'apparato respiratorio Rahn e Coll. (1946) avevano stabilito che tale tempo dovesse essere 3'': riteniamo che anche nelle prove di Margaria e Marro per la determinazione del massimo lavoro respiratorio ci si debba attenere a questa condizione.

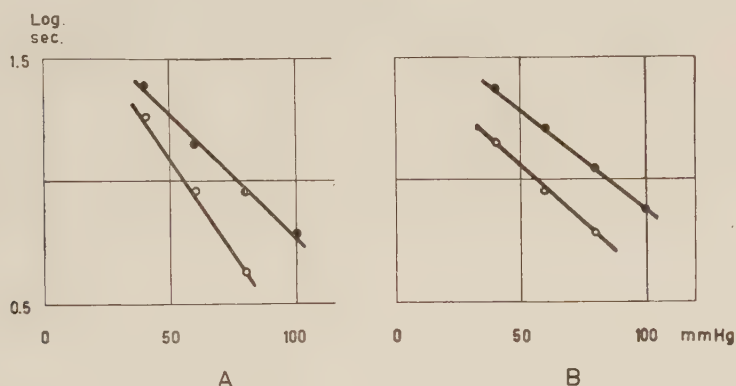


Fig. 2. — Pressione endopolmonare (ascissa) in funzione del logaritmo della durata (ordinata).

● = valori pressori positivi
○ = valori pressori negativi

Nelle prove in cui il tempo di apnea non è condizionato dagli stimoli chimici alla respirazione la disposizione dei dati sperimentali assume un andamento di tipo esponenziale per cui può essere espressa dalla equazione:

$$(1) \quad \log t = a - bP$$

come messo in evidenza dai diagrammi A e B della fig. 2.

Il parametro a esprime la durata dell'apnea per $P = 0$, essendone il logaritmo; invece essendo

$$(2) \quad b = - \frac{d \log t}{dP}$$

questo parametro è l'espressione della variazione relativa della durata dell'apnea per effetto di una variazione della pressione P . Differenziando la (1) otteniamo

$$(3) \quad \frac{dP}{dt} = - \frac{1}{b'} \cdot \frac{1}{t}$$

ove

$$(4) \quad \frac{1}{b'} = \frac{2,3}{b}$$

dP/dt ha il significato di potenza per unità di volume: infatti definendo M la massa e L la lunghezza, $[P] = [ML^{-1}t^{-2}]$; quindi

$$(5) \quad \left[\frac{P}{t} \right] = [ML^{-1}t^{-3}] = \left[\frac{ML^2t^{-3}}{L^3} \right]$$

che rappresenta la *potenza per unità di volume*.

Dalla (3) risulta che questa è inversamente proporzionale alla durata dell'apnea e quindi la potenza per unità di volume moltiplicata per il tempo, e cioè l'*energia per unità di volume*, è costante entro i limiti di condizioni sperimentali presi in considerazione.

Questa è l'energia insita nell'apparato respiratorio e può essere spesa indifferentemente nell'esercitare una pressione elevata per un tempo breve quanto nell'esercitare una pressione moderata per un tempo corrispondentemente più lungo.

La costante di proporzionalità, come risulta dalle (2) e (4), e cioè

$$(6) \quad -\frac{1}{b'} = 2,3 \frac{dP}{d \log t}$$

esprime l'energia per unità di volume, come è stato detto precedentemente, separatamente per il lavoro inspiratorio, cioè a pressione endopolmonare negativa, e per il lavoro espiratorio, a pressione positiva.

Il *massimo lavoro potenziale dell'apparato respiratorio* così calcolato risulta essere sensibilmente uguale a quello calcolato con il procedimento indicato da Margaria e Marro (1954) quando si assume per il soggetto A un volume polmonare di 2,5 l e per il soggetto B di 2,0 l.

BIBLIOGRAFIA.

- MARGARIA R., MARRO F., « Riv. Med. Aeron. », 17, 385 (1954).
 RAHN H., OTIS A. B., CHADWICK L. E., FENN W. O., « Am. J. Physiol. », 146, 161 (1946).
 RAHN H., FENN W. O., *A graphical analysis of respiratory gas exchange*, « Am. Physiol. Soc. », Washington 1955.
 DU BOIS A. B., BRITT A. G., FENN W. O., « J. Applied Physiol. », 4, 535 (1952).
 GRANDPIERRE R., FRANCK C., LEMAIRE R., VIOLETTE P., « Compt. Rend. Soc. Biol. », 144, 1683 (1950).
 AVIADO D. M., SCHMIDT C. F., « Physiol. Rev. », 35, 247 (1955).
 CÉLICE J., PLAS F., HIMBERT J., GUERRE J., OGER R., « Press. Med. », 60, 1037 (1952).
 COURNAND A., « Bull. N. Y. Acad. Med. », 23, 27 (1947).
 MUXWORTHY Y. F., Air Force Technical Report, 6528, 452 (1951).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Una estensione agli integrali doppi di una condizione di Picone, necessaria per un estremo* ^(*). Nota di WALTER GAUTSCHI, presentata ^(**) dal Socio G. SANSONE.

1. Sarà considerato il problema della ricerca degli estremi per integrali doppi del tipo

$$(1) \quad I[z(x, y)] = \iint_D f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy.$$

Supporremo che:

1° la funzione $f(x, y, z, z_x, z_y)$ sia definita in un insieme chiuso E di punti a cinque coordinate reali x, y, z, z_x, z_y ed ivi continua;

2° l'insieme Γ delle funzioni in cui si cerca la funzione estremante sia costituito da funzioni reali $z(x, y)$ definite in un dominio regolare $D(z)$ del piano (x, y) ed ivi continue e dotate di derivate parziali z_x, z_y continue a pezzi ⁽¹⁾. Al variare di (x, y) in $D(z)$, il punto $\{x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)\}$ non esca dall'insieme E .

Convieni associare alle funzioni $z(x, y)$ di Γ le superficie S dello spazio (x, y, z) di equazione cartesiana $z_0 = z(x, y)$ che chiameremo superficie di Γ .

Ci proponiamo di pervenire a condizioni necessarie per un estremo, analoghe a quelle ottenute dal prof. Picone nel caso di integrali semplici ⁽²⁾. A tale scopo è necessario, innanzitutto, estendere al caso attuale delle superficie, il concetto di « punto di concentrazione », introdotto dal prof. Picone per le curve. Dopo tale estensione formuleremo la condizione a cui si perviene, con qualche sua conseguenza immediata.

2. Data una superficie S dell'insieme Γ , sia $P_0[x_0, y_0, z(x_0, y_0)]$ un punto di S tale che $R_0(x_0, y_0)$ risulti interno al dominio base $D(z)$ e, inoltre, sia punto di continuità per le derivate parziali z_x, z_y ⁽³⁾. Per un tale punto P_0 definiamo la nozione di punto di concentrazione rispetto ad una direzione α del piano (x, y) avente i coseni direttori α_1, α_2 .

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

(1) Diciamo che una funzione $u(x, y)$ definita in un dominio regolare D è ivi continua a pezzi, se esiste una decomposizione del dominio D in un numero finito di domini parziali D_i anch'essi regolari, tale che $u(x, y)$ risulti continua in ciascun dominio D_i .

(2) Vedi M. PICONE, *Sulle condizioni necessarie per un estremo nel calcolo delle variazioni*, « Memorie Acc. Naz. Lincei », ser. 8ª, vol. IV, 1954.

(3) A proposito di quest'ultime due ipotesi cfr. l'osservazione I, p. 287.

Fissiamo $2\nu + 2$ numeri reali

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu, p_1, p_2, \dots, p_\nu, p, q \quad (p_h, p, q > 0).$$

Detta ρ la semiretta del piano (x, y) passante, nella direzione α , per R_0 , siano $R_1, R_2, \dots, R_\nu, R_{\nu+1}$ i punti di ρ tali che $\overline{R_h R_0} = \sum_{k=1}^h p_k \varepsilon$ ($h = 1, 2, \dots, \nu$), $\overline{R_{\nu+1} R_\nu} = p \varepsilon$, dove ε è un numero positivo (fig. 1). Posto $q = tg \omega$ ($0 < \omega < \frac{\pi}{2}$), sia Q_ν il punto individuato dalle condizioni $\widehat{Q_\nu R_0 R_\nu} = \omega$, $\widehat{Q_\nu R_\nu R_0} = \frac{\pi}{2}$ e sia Q_ν^* il punto simmetrico di Q_ν rispetto a ρ . Chiamiamo T_ε il dominio limitato dalla poligonale di vertici $R_0, Q_\nu, R_{\nu+1}, Q_\nu^*$. Ad ogni

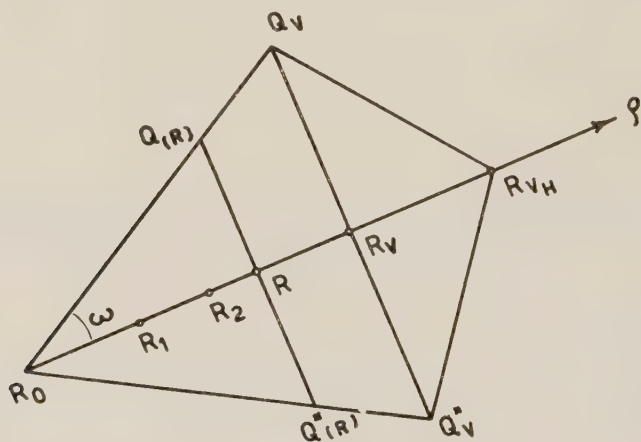


Fig. 1.

punto R variabile su ρ fra R_0 ed $R_{\nu+1}$ facciamo corrispondere il punto $Q(R)$ della frontiera di T_ε , avente R come proiezione su ρ e contenuto in uno dei due segmenti $R_0 Q_\nu$, $Q_\nu R_{\nu+1}$ e $Q_\nu^*(R)$ il punto simmetrico di $Q(R)$ rispetto a ρ . Siano, nello spazio (x, y, z_0) , P_0, P_h ($h = 1, 2, \dots, \nu$), $P_{\nu+1}$ i punti rispettivamente di coordinate $[R_0, z(R_0)]$, $\left[R_h, z(R_0) + \sum_{k=1}^h \lambda_k p_k \varepsilon \right]$, $[R_{\nu+1}, z(R_{\nu+1})]$. Designiamo con Λ la spezzata $P_0 P_1 \dots P_\nu P_{\nu+1}$ e con $\Lambda(R)$ il punto di Λ avente R come proiezione su ρ .

Supposto ε talmente piccolo che il dominio T_ε risulti interno a $D(z)$, sia Σ_ε la superficie generata dai segmenti rettilinei di estremi $\Lambda(R), [Q(R), z(Q(R))]$ e $\Lambda(R), [Q^*(R), z(Q^*(R))]$ al variare di R fra R_0 e $R_{\nu+1}$. Denotiamo allora con S_ε la superficie che si ottiene da S sostituendo Σ_ε alla porzione di S avente T_ε per proiezione ortogonale su D e lasciando inalterata la parte rimanente.

Ciò premesso, diciamo che il punto $P_0[x_0, y_0, z(x_0, y_0)]$ di S è un *punto di concentrazione ν -plo, rispetto alla direzione α del piano (x, y) , per le superficie dell'insieme Γ , coi valori $\lambda_1, \dots, \lambda_\nu$ dei primi parametri e p_1, \dots, p_ν, p, q*

dei secondi, se la superficie S_ε appartiene all'insieme Γ per ogni ε sufficientemente piccolo.

3. Vogliamo renderci conto della portata di questa definizione, considerando il caso particolare di un punto di concentrazione semplice ($v = 1$). Denotiamo, in questo caso, l'unico primo parametro λ_1 con λ e poniamo $p_1 = 1$, chiamando poi p il secondo e q il terzo parametro.

Data una superficie S dell'insieme Γ , di equazione $z = z(x, y)$ e di dominio base $D(z)$, sia D_0 un dominio regolare contenuto in $D(z)$. Chiamiamo *intorno della superficie S , di dominio base D_0 e di raggi r_0, r_1, r_2* , la totalità descritta dalle superficie

$$z_0 = \zeta(x, y) \quad \text{con} \quad \zeta(x, y) = \begin{cases} z(x, y) & \text{in } D(z) - D_0 \\ z(x, y) + u(x, y) & \text{in } D_0, \end{cases}$$

quando la funzione $u(x, y)$ percorre la classe delle funzioni continue in D_0 con le derivate parziali prime continue a pezzi, verificanti le relazioni

$$u(x, y) = 0 \quad \text{sulla frontiera di } D_0,$$

$$|u(x, y)| < r_0, \quad |u_x(x, y)| < r_1, \quad |u_y(x, y)| < r_2 \quad \text{in } D_0.$$

Supponendo continue le derivate parziali z_x, z_y , nel dominio D_0 , si dimostra, allora, il seguente

TEOREMA I. — *Se esiste un intorno della superficie S , di dominio base D_0 e di raggi r_0, r_1, r_2 , contenuto nell'insieme Γ , ogni punto $P_0[x_0, y_0, z(x_0, y_0)]$ di S che ha la proiezione $R_0(x_0, y_0)$ interna a D_0 risulta un punto di concentrazione semplice rispetto a qualsiasi direzione $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ purché, in corrispondenza a questa direzione, i valori λ, p, q del primo, secondo e terzo parametro verifichino la relazione*

$$(2) \quad \left| \lambda - z_{\alpha}^0 \right| \begin{cases} < \frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \text{Min}(r_1, r_2) & (\text{se } p \geq 1) \\ < \frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}} \text{Min}(r_1, r_2) & (\text{se } p < 1), \end{cases}$$

dove si è posto

$$z_{\alpha}^0 = \alpha_1 z_x(x_0, y_0) + \alpha_2 z_y(x_0, y_0).$$

Notiamo il seguente notevole

COROLLARIO. — *Sotto le ipotesi del teorema I, il punto P_0 risulta di concentrazione semplice rispetto a qualsiasi direzione α , col terzo parametro q infinitamente grande e con valori λ, p del primo e secondo parametro, verificanti la relazione*

$$(2') \quad \left| \lambda - z_{\alpha}^0 \right| \begin{cases} < \text{Min}(r_1, r_2) & (\text{se } p \geq 1) \\ < p \text{Min}(r_1, r_2) & (\text{se } p < 1). \end{cases}$$

Osserviamo anche il fatto ben intuitivo che, qualora sia possibile porre $r_1 = \infty, r_2 = \infty$, nel teorema I, il punto P_0 riesce di concentrazione rispetto a qualunque direzione α e con valori dei tre parametri λ, p, q affatto arbitrari.

Il teorema I, in sostanza, esprime che i punti di una superficie « interna » all'insieme Γ sono punti di concentrazione. Rileviamo, però, che un punto, per essere di concentrazione, non deve appartenere necessariamente ad una superficie interna a Γ .

4. Riprendiamo, ora, la definizione generale del n. 2 di punto di concentrazione. Per formulare la condizione a cui essa conduce, conviene introdurre la seguente notazione:

$$M_t[g(t)] = \frac{1}{2} [g(t) + g(-t)].$$

Poniamo anche

$$\pi_h = \sum_{k=1}^h p_k, \quad \rho_h = \sum_{k=1}^h \lambda_k p_k \quad (h = 1, 2, \dots, v), \quad \pi_0 = \rho_0 = 0.$$

Si dimostra allora il seguente

TEOREMA II. - Se

1° la superficie S di equazione $z_0 = z(x, y)$ è minimante l'integrale (1) nell'insieme Γ ;

2° il punto $P_0[x_0, y_0, z(x_0, y_0)]$ di S è un punto di concentrazione v -plo per le superficie dell'insieme Γ , rispetto alla direzione $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ del piano (x, y) , coi valori $\lambda_1, \dots, \lambda_v$ dei primi e p_1, \dots, p_v, p, q dei secondi parametri, allora deve sussistere la relazione

$$(3) \quad F(P_0, z_x^\circ, z_y^\circ, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \dots, \lambda_v, p_1, \dots, p_v, p, q) \geq 0,$$

dove la F è data dalla

$$(4) \quad F(P_0, z_x^\circ, z_y^\circ, \alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \dots, \lambda_v, p_1, \dots, p_v, p, q) \equiv \\ \equiv \sum_{h=1}^v p_h \int_0^1 \int_0^1 \frac{\pi_{h-1} + t p_h}{\pi_v} \cdot 2 M_q \left\{ f \left[P_0, z_x^\circ + \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{q} \right) (\Phi_h(s, t) - z_\alpha^\circ), z_y^\circ + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{q} \right) (\Psi_h(s, t) - z_\alpha^\circ) \right] \right\} ds dt - (\pi_v + p) f(P_0, z_x^\circ, z_y^\circ) + \\ + p M_q \left\{ f \left[P_0, z_x^\circ - \left(\frac{\alpha_1 \pi_v}{p} - \frac{\alpha_2}{q} \right) \left(\frac{p_v}{\pi_v} - z_\alpha^\circ \right), z_y^\circ - \left(\frac{\alpha_2 \pi_v}{p} + \frac{\alpha_1}{q} \right) \left(\frac{p_v}{\pi_v} - z_\alpha^\circ \right) \right] \right\},$$

avendo posto

$$(5) \quad z_x^\circ = z_x(x_0, y_0), \quad z_y^\circ = z_y(x_0, y_0), \quad z_\alpha^\circ = \alpha_1 z_x^\circ + \alpha_2 z_y^\circ,$$

$$(6) \quad \Phi_h(s, t) = \frac{1}{\pi_{h-1} + t p_h} \left[\lambda_h p_h t + \frac{\alpha_1 s + \frac{\alpha_2}{q}}{\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{q}} \rho_{h-1} + (1-s) \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{q}} - \lambda_h \pi_{h-1} \right],$$

$$(7) \quad \Psi_h(s, t) = \frac{1}{\pi_{h-1} + t p_h} \left[\lambda_h p_h t + \frac{\alpha_2 s - \frac{\alpha_1}{q}}{\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{q}} \rho_{h-1} + (1-s) \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{q}} - \lambda_h \pi_{h-1} \right].$$

OSSERVAZIONE I. — Si può dare la definizione di punto di concentrazione sotto ipotesi meno restrittive riguardanti il punto $R_0(x_0, y_0)$. Se tale punto (interno a $D(z)$ oppure di frontiera) è situato sulla frontiera di un dominio D' di continuità per le derivate parziali z_x, z_y , basta infatti scegliere la direzione α e il parametro q in modo che il dominio T_ε , definito nel n. 2, sia contenuto in D' per un ε sufficientemente piccolo.

Sussiste poi ancora il teorema II, se vi si pone

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_x^\circ = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} z_x(x, y) \quad (\text{su } D'), \\ z_y^\circ = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} z_y(x, y) \quad (\text{su } D'), \\ z_\alpha^\circ = \alpha_1 z_x^\circ + \alpha_2 z_y^\circ. \end{array} \right.$$

OSSERVAZIONE II. — Se $R_0(x_0, y_0)$ è un punto sulla frontiera di un dominio D' di continuità per le derivate parziali z_x, z_y e se la seconda ipotesi del teorema II si verifica per ogni punto $P[x, y, z(x, y)]$ avente la proiezione $R(x, y)$ distinta da R_0 e situata in D' ed in un certo intorno di R_0 , allora sussiste, nel punto P_0 , la (3) con la posizione (8). In particolare, se la seconda ipotesi è verificata per ogni punto P sopra specificato e per il parametro q infinitamente grande, sussiste la (3) anche nel punto P_0 per q infinitamente grande.

L'osservazione II è conseguenza immediata della continuità della funzione F rispetto alle variabili x_0, y_0 .

Nel caso di un punto di concentrazione semplice, ponendo $p_1 = 1, \lambda_1 = \lambda$, si ha

$$(4_1) \quad \begin{aligned} F(P_0, z_x^\circ, z_y^\circ, \alpha_1, \alpha_2, \lambda, p, q) = \\ = M_q \left\{ f \left[P_0, z_x^\circ + \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{q} \right) (\lambda - z_\alpha^\circ), z_y^\circ + \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{q} \right) (\lambda - z_\alpha^\circ) \right] - \right. \\ \left. - (1 + p) f(P_0, z_x^\circ, z_y^\circ) + \right. \\ \left. + p M_q \left\{ f \left[P_0, z_x^\circ - \left(\frac{\alpha_1}{p} - \frac{\alpha_2}{q} \right) (\lambda - z_\alpha^\circ), z_y^\circ - \left(\frac{\alpha_2}{p} + \frac{\alpha_1}{q} \right) (\lambda - z_\alpha^\circ) \right] \right\} \right\}. \end{aligned}$$

In particolare, se P_0 risulta di concentrazione per q infinitamente grande, dev'essere

$$(9) \quad \begin{aligned} f[P_0, z_x^\circ + \alpha_1(\lambda - z_\alpha^\circ), z_y^\circ + \alpha_2(\lambda - z_\alpha^\circ)] - (1 + p) f(P_0, z_x^\circ, z_y^\circ) + \\ + pf \left[P_0, z_x^\circ - \frac{\alpha_1}{p}(\lambda - z_\alpha^\circ), z_y^\circ - \frac{\alpha_2}{p}(\lambda - z_\alpha^\circ) \right] \geq 0. \end{aligned}$$

In ciò che segue, ci limitiamo a considerare la condizione (9), traendone alcune conseguenze del tutto analoghe a quelle date dal prof. Picone nel caso unidimensionale. Chiameremo un punto P_0 di S verificante la (9) un *punto minimale* rispetto alla direzione α col valore λ del primo e p del secondo parametro.

5. CONDIZIONE DI LEGENDRE. - Se il punto $P_0[x_0, y_0, z(x_0, y_0)]$ di una superficie S è minimale, rispetto alla direzione $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ col primo parametro λ variabile in un certo intorno I_λ (destro oppure sinistro) di z_α^0 e col secondo parametro p fisso, e se la funzione $f(P_0, z_1, z_2)$ è dotata di derivate parziali di primo e second'ordine rispetto alle variabili z_1, z_2 , continue in un certo intorno del punto $z_1 = z_x^0, z_2 = z_y^0$, allora sussiste la relazione

$$(10) \quad \alpha_1^2 f_{z_1 z_1}(R_0) + 2 \alpha_1 \alpha_2 f_{z_1 z_2}(R_0) + \alpha_2^2 f_{z_2 z_2}(R_0) \geq 0,$$

dove R_0 è il punto (P_0, z_x^0, z_y^0) .

Dimostrazione. - Posto

$$t = \lambda - z_\alpha^0, \quad \varphi(t) = f(P_0, z_x^0 + \alpha_1 t, z_y^0 + \alpha_2 t)$$

la relazione di minimalità (9) si scrive

$$\Phi(t) \equiv \varphi(t) - \varphi(0) + p \left[\varphi\left(-\frac{t}{p}\right) - \varphi(0) \right] \geq 0$$

ed è valida per $t \geq 0$ oppure $t \leq 0$ secondoché I_λ è un intorno destro oppure sinistro. Essendo $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$, dev'essere $\Phi''(0) \geq 0$, cioè

$$\left(1 + \frac{1}{p}\right) \varphi''(0) \geq 0,$$

il che equivale alla (10).

CONDIZIONE DI WEIERSTRASS. - Se il punto $P_0[x_0, y_0, z(x_0, y_0)]$ di una superficie S è minimale rispetto alla direzione $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, col primo parametro λ fisso e col secondo infinitamente grande, e se la funzione $f(P_0, z_1, z_2)$ è dotata di un differenziale totale nel punto $z_1 = z_x^0, z_2 = z_y^0$, posto

$$(11) \quad \mu = z_x^0 + \alpha_1(\lambda - z_\alpha^0), \quad \nu = z_y^0 + \alpha_2(\lambda - z_\alpha^0),$$

sussiste la relazione

$$(12) \quad E(P_0, z_x^0, z_y^0, \mu, \nu) \equiv f(P_0, \mu, \nu) - f(P_0, z_x^0, z_y^0) - \\ - (\mu - z_x^0) f_{z_1}(P_0, z_x^0, z_y^0) - (\nu - z_y^0) f_{z_2}(P_0, z_x^0, z_y^0) \geq 0.$$

Dimostrazione. - La (9) può scriversi

$$(13) \quad f(P_0, \mu, \nu) - f(P_0, z_x^0, z_y^0) + \\ + p \left\{ f\left[P_0, z_x^0 + \frac{z_x^0 - \mu}{p}, z_y^0 + \frac{z_y^0 - \nu}{p}\right] - f(P_0, z_x^0, z_y^0) \right\} \geq 0.$$

Si ha per ipotesi:

$$f\left[P_0, z_x^0 + \frac{z_x^0 - \mu}{p}, z_y^0 + \frac{z_y^0 - \nu}{p}\right] - f(P_0, z_x^0, z_y^0) = \\ = f_{z_1}(P_0, z_x^0, z_y^0) \frac{z_x^0 - \mu}{p} + f_{z_2}(P_0, z_x^0, z_y^0) \frac{z_y^0 - \nu}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right) (p \rightarrow \infty),$$

e dunque, facendo $p \rightarrow \infty$ in (13), segue la (12).

Osserviamo che, se l'ipotesi è valida per qualunque direzione α e qualsiasi valore λ del primo parametro, la (I2) sussiste per ogni coppia μ, ν di valori reali. Infatti, le equazioni (II) hanno sempre almeno una soluzione $\alpha_1, \alpha_2, \lambda$ con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, comunque siano i valori di z_x^0, z_y^0, μ, ν .

CONDIZIONE DI PICONE. — Dato il punto $P_0[x_0, y_0, z(x_0, y_0)]$ sia $f(P_0, z_1, z_2)$ definita e continua per tutti valori reali di z_1, z_2 . Poniamo per due numeri reali α_1 e α_2 con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$

$$\lim'_{t \downarrow 0} t f\left(P_0, z_1 - \frac{\alpha_1}{t}, z_2 - \frac{\alpha_2}{t}\right) = l_f^{(+1)}(P_0, z_1, z_2, \alpha_1, \alpha_2),$$

$$\lim'_{t \downarrow 0} t f\left(P_0, z_1 + \frac{\alpha_1}{t}, z_2 + \frac{\alpha_2}{t}\right) = l_f^{(-1)}(P_0, z_1, z_2, \alpha_1, \alpha_2) \quad (4).$$

Se il punto P_0 è minimale rispetto alla direzione $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ col primo parametro $\lambda \neq z_a^0$ fisso e col secondo infinitesimo, sussiste la relazione

$$(I4) \quad f[P_0, z_x^0 + \alpha_1(\lambda - z_a^0), z_y^0 + \alpha_2(\lambda - z_a^0)] - f(P_0, z_x^0, z_y^0) + \\ + |\lambda - z_a^0| l_f^{(\pm 1)}(P_0, z_x^0, z_y^0, \alpha_1, \alpha_2) \geq 0,$$

dove ± 1 ha il segno di $\lambda - z_a^0$.

La (I4) segue dalla (9), ponendovi $p = t|\lambda - z_a^0|$ e facendo $t \downarrow 0$.

Se, per esempio,

$$f(x, y, z_0, z_1, z_2) = g(x, y, z_0) \sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2} + h(x, y, z_0),$$

la (I4) fornisce

$$g(P_0) \left\{ \sqrt{1 + [z_x^0 + \alpha_1(\lambda - z_a^0)]^2 + [z_y^0 + \alpha_2(\lambda - z_a^0)]^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{1 + (z_x^0)^2 + (z_y^0)^2} + |\lambda - z_a^0| \right\} \geq 0.$$

Essendo (sempre supposto che $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$)

$$\sqrt{1 + (x + \alpha_1 t)^2 + (y + \alpha_2 t)^2} - \sqrt{1 + x^2 + y^2} + |t| > 0$$

per qualsiasi valori reali di $x, y, t \neq 0$, si conclude $g(P_0) \geq 0$.

(4) Con \lim' indichiamo il limite inferiore. Accade spesso, che i limiti $l_f^{(+1)}, l_f^{(-1)}$ non dipendono da z_1, z_2 ; questo, però, non è valido in generale, come mostra il semplice esempio $f(P_0, z_1, z_2) = z_1 z_2$, per cui si ha

$$\lim_{t \downarrow 0} t \left(z_1 + \frac{\alpha_1}{t} \right) \left(z_2 + \frac{\alpha_2}{t} \right) = \begin{cases} z_1 & (\alpha_1 = 0) \\ z_2 & (\alpha_2 = 0) \\ \text{sgn}(\alpha_1 \alpha_2) \cdot \infty & (\alpha_1 \alpha_2 \neq 0). \end{cases}$$

Analisi matematica (Teoria degli Insiemi). — *Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti* (*). Nota I di TULLIO VIOLA, presentata (**) dal Socio Straniero W. SIERPIŃSKI

1. W. Sierpiński ha proposto alcuni anni fa il problema di costruire, nel piano euclideo, *un insieme E di punti, tale da risultare congruente ad ogni differenza ottenuta togliendo da E un punto p qualunque di E*:

$$(1) \quad E \simeq E - \{p\} \quad \text{per ogni } p \in E.$$

Vengo a sapere, per gentile comunicazione dello stesso Sierpiński, che a questo problema E. G. Straus è riuscito a dare recentemente risposta *negativa*. Nel lavoro di Straus, che sarà pubblicato nel prossimo volume (n. 43) della rivista « Fundamenta Mathematicae », viene dimostrato precisamente il teorema: *un insieme piano E contiene al più un punto p tale che* $E \simeq E - \{p\}$. È però di notevole interesse il fatto che J. Mycielski ⁽¹⁾, sfruttando un precedente lavoro del Sierpiński ⁽²⁾, sia riuscito a risolvere *positivamente* l'analogo problema *sulla superficie della sfera* ed anzi in modo da soddisfare a condizioni particolari notevolissime, quale ad esempio quella che ognuna delle congruenze (1) sia realizzabile mediante una conveniente rotazione della sfera intorno a un asse passante per il centro.

Lo studio della teoria Sierpiński-Mycielski, ammirevole per generalità e profondità di concetti, oltre che per ricchezza di risultati, mi ha suggerito l'idea di cercar di risolvere l'analogo problema *sul piano iperbolico*, nella presunzione che un tale ambiente debba godere, anche nei problemi riguardanti le congruenze degli insiemi, di proprietà simili a quelle della superficie della sfera.

Nei numeri che seguono esporrò la soluzione da me trovata appunto *per il piano iperbolico*, nella speranza che, pur ispirandomi anch'io, nei metodi, sia ad una precedente Nota del Sierpiński ⁽³⁾, sia ad un importante lavoro di J. v. Neumann ⁽⁴⁾, cui già lo stesso Sierpiński ebbe ad attingere ⁽⁵⁾, essa possa riuscire, soprattutto per la sua semplicità ed autonomia, di qual-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) J. MYCIELSKI, *About sets with strange isometrical properties* (I) (« Fundam. Mathemat. », 42, pp. 1-10 (1955)).

(2) W. SIERPIŃSKI, *Sur le paradoxe de la sphère* (« Fundam. Mathemat. », 33, pp. 235-244 (1945)).

(3) W. SIERPIŃSKI, *Sur un ensemble plan singulier* (« Fundam. Mathemat. », 37, pp. 1-4 (1950)).

(4) J. v. NEUMANN, *Zur allgemeinen Theorie des Massen* (« Fundam. Mathemat. », 13, pp. 73-116 (1929), cfr. soprattutto pp. 106-108).

(5) Nel lavoro citato alla nota (2).

che interesse ai fini d'una visione generale ed unitaria del problema. Una tale soluzione gioverà, forse, a chiarire le anomalie che si presentano nel piano euclideo e la cui natura profonda è ancora ben lungi dall'essere stata studiata.

I. — COSTRUZIONE DELL'INSIEME E.

2. L'insieme E che ci proponiamo di costruire risulterà numerabile: i suoi punti verranno indicati con

$$z_1, z_2, \dots, z_m, \dots$$

e si supporranno rappresentati da altrettanti numeri complessi ⁽⁶⁾.

La costruzione ha inizio con la scelta di due numeri z_1, λ_1 fra loro algebricamente indipendenti, z_1 a coefficiente dell'immaginario positivo, λ_1 reale trascendente, ma del resto arbitrari. Essa prosegue ordinatamente, per ogni successivo valore dell'indice $r = 2, 3, \dots$, prefissando un numero reale e trascendente λ_r , arbitrario purché algebricamente indipendente dai $2r - 1$ numeri $z_1, z_2, \dots, z_r, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r-1}$.

Inoltre, per ogni $m = 1, 2, \dots$, dovrà farsi uso del *movimento di prima specie*

$$z' = \lambda_m - \frac{1}{\lambda_m + z} = \frac{\lambda_m z + (\lambda_m^2 - 1)}{z + \lambda_m},$$

che indicheremo brevemente con

$$z' = \varphi_m z.$$

Tale movimento è manifestamente l'antitrasmuto della rotazione (di 180° intorno al punto i) $z' = -1/z$, che indichiamo con $z' = \omega z$, mediante la traslazione $z' = \lambda_m + z$, che indichiamo con $z' = \chi_m z$: si ha cioè $\varphi_m = = \chi_m \omega \chi_m$.

Cominciamo, partendo da z_1 , col costruire successivamente i punti $z_{1n} = \varphi_1^n z_1$ (con $n = 1, 2, \dots$), indi ordiniamo le infinite operazioni φ_i^i ($i = = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) in una ben determinata successione $\{\omega_{1n}\}$ ($n = = 1, 2, \dots$) ⁽⁷⁾.

Poniamo $z_2 = z_{11}$ e costruiamo successivamente i punti

$$(2)_1 \quad z'_{21} = \varphi_2 z_2, \quad z'_{22} = \varphi_2^2 z_2, \quad z'_{23} = \varphi_2^3 z_2, \dots$$

(6) Per la rappresentazione della geometria iperbolica sul semipiano $I(z) > 0$ (con $z = x + iy$), si può consultare ad esempio il trattato di G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa* (vol. II, Padova 1955), pp. 231-268.

(7) Se ψ è una qualunque operazione (movimento nel piano iperbolico), indichiamo, secondo l'uso, con ψ^{-1} l'operazione inversa della ψ , indi poniamo $\psi^0 = 1$ (identità), $\psi^1 = \psi$, $\psi^r = \psi^{r-1} \cdot \psi$, $\psi^{-r} = (\psi^r)^{-1}$ (per $r = 2, 3, \dots$).

Applichiamo poi a z_i e a tutti i punti z_{in} con $n > 1$, tutte le possibili operazioni dei tipi

$$(2)_i^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{1n_p} \varphi_{2^p}^i \omega_{1n_{p-1}} \varphi_{2^{p-1}}^i \dots \omega_{1n_2} \varphi_{2^2}^i \omega_{1n_1} \varphi_{2^1}^i \\ \text{e} \quad \varphi_{2^p}^i \omega_{1n_{p-1}} \varphi_{2^{p-1}}^i \dots \omega_{1n_2} \varphi_{2^2}^i \omega_{1n_1} \varphi_{2^1}^i \end{array} \right.$$

(p intero arbitrario > 0 ; n_1, n_2, \dots, n_p interi arbitrari > 0 ; i_1, i_2, \dots, i_p interi arbitrari ≥ 0).

Infine applichiamo a tutti i punti $(2)_i$, tutte le possibili operazioni dei tipi

$$(2)_i^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{2^p}^i \omega_{1n_p} \varphi_{2^{p-1}}^i \dots \varphi_{2^2}^i \omega_{1n_2} \varphi_{2^1}^i \omega_{1n_1} \\ \text{e} \quad \omega_{1n_p} \varphi_{2^p}^i \dots \varphi_{2^2}^i \omega_{1n_2} \varphi_{2^1}^i \omega_{1n_1} \end{array} \right. \quad (8).$$

Tutti i risultati ottenuti nel modo descritto, a partire dai $(2)_i$ (compresi) in poi, formano un'infinità numerabile: ordiniamoli in una semplice successione ed indichiamoli con z_{2n} ($n = 1, 2, \dots$). Parimenti tutte le operazioni $(2)_i^*$ formano un'infinità numerabile: ordiniamo anche queste in una semplice successione ed indichiamole con ω_{2n} ($n = 1, 2, \dots$).

Poniamo ora $z_3 = z_{21}$ e costruiamo successivamente i punti

$$(2)_2 \quad z'_{31} = \varphi_3 z_3, \quad z'_{32} = \varphi_3^2 z_3, \quad z'_{33} = \varphi_3^3 z_3, \dots$$

Applichiamo poi a z_i e a tutti i punti z_{in} e z_{2n} (con $n \geq 1$), fatta eccezione del solo z_3 , tutte le possibili operazioni dei tipi:

$$(2)_2^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{2n_p} \varphi_3^i \omega_{2n_{p-1}} \varphi_3^{i-1} \dots \omega_{2n_2} \varphi_3^{i_2} \omega_{2n_1} \varphi_3^{i_1} \\ \text{e} \quad \varphi_3^i \omega_{2n_{p-1}} \varphi_3^{i-1} \dots \omega_{2n_2} \varphi_3^{i_2} \omega_{2n_1} \varphi_3^{i_1} \end{array} \right.$$

Infine applichiamo a tutti i punti $(2)_2$, tutte le possibili operazioni dei tipi

$$(2)_2^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_3^i \omega_{2n_p} \varphi_3^{i-1} \dots \varphi_3^{i_2} \omega_{2n_2} \varphi_3^{i_1} \omega_{2n_1} \\ \text{e} \quad \omega_{2n_p} \varphi_3^i \dots \varphi_3^{i_2} \omega_{2n_2} \varphi_3^{i_1} \omega_{2n_1} \end{array} \right.$$

e ordiniamo tutti i risultati ottenuti nel modo descritto, a partire dai $(2)_2$ (compresi) in poi, in una semplice successione $\{z_{3n}\}$ ($n = 1, 2, \dots$). Parimenti ordiniamo tutte le operazioni $(2)_2^*$ in una semplice successione $\{\omega_{3n}\}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Così proseguiamo indefinitamente.

(8) Il significato degli indici p, n_1, n_2, \dots, n_p e degli esponenti i_1, i_2, \dots, i_p rimane, qui e nelle formule analoghe che seguiranno, quello poco sopra precisato.

3. All'esatta comprensione del procedimento di formazione di E, giova la considerazione della seguente tabella:

z_1	z_{11}	z_{12}	z_{13}	z_{14}	\dots
$z_2 = z_{11}$	z_{21}	z_{22}	z_{23}	z_{24}	\dots
$z_3 = z_{21}$	z_{31}	z_{32}	z_{33}	z_{34}	\dots
$z_4 = z_{12}$	z_{41}	z_{42}	z_{43}	z_{44}	\dots
$z_5 = z_{31}$	z_{51}	z_{52}	z_{53}	z_{54}	\dots
$z_6 = z_{22}$	z_{61}	z_{62}	z_{63}	z_{64}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Nella prima colonna sono ordinatamente disposti gli elementi di E. Nelle colonne successive figurano gli elementi a due indici z_{mn} , i quali tutti, riordinati opportunamente (secondo il procedimento diagonale chiaramente accennato sulla tabella stessa), vengono via via riscritti nella prima colonna.

Supposte scritte le prime $r-1$ righe della tabella (r intero arbitrario ≥ 2), formeremo gli elementi z_{rn} ($n = 1, 2, \dots$) con la legge seguente.

Dapprima costruiamo successivamente i punti

$$(2)_{r-1} \quad z'_{r1} = \varphi_r z_r, \quad z'_{r2} = \varphi_r^2 z_r, \quad z'_{r3} = \varphi_r^3 z_r, \dots$$

Applichiamo poi a z_1 e a tutti i punti $z_{1n}, z_{2n}, \dots, z_{r-1,n}$, con $n \geq 1$, fatta eccezione del solo z_r , tutte le possibili operazioni dei tipi:

$$(2)_{r-1}^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{r-1,n} \varphi_r^{i,n} \omega_{r-1,n-1} \varphi_r^{i,n-1} \dots \omega_{r-1,n_2} \varphi_r^{i,n_2} \omega_{r-1,n_1} \varphi_r^{i,n_1} \\ \text{e} \quad \varphi_r^{i,n} \omega_{r-1,n} \varphi_r^{i,n-1} \dots \omega_{r-1,n_2} \varphi_r^{i,n_2} \omega_{r-1,n_1} \varphi_r^{i,n_1} \end{array} \right.$$

Infine applichiamo a tutti i punti $(2)_{r-1}$, tutte le possibili operazioni dei tipi

$$(2)_{r-1}^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_r^{i,n} \omega_{r-1,n} \varphi_r^{i,n-1} \dots \varphi_r^{i,n_2} \omega_{r-1,n_2} \varphi_r^{i,n_1} \omega_{r-1,n_1} \\ \text{e} \quad \omega_{r-1,n} \varphi_r^{i,n} \varphi_r^{i,n-1} \dots \varphi_r^{i,n_2} \omega_{r-1,n_2} \varphi_r^{i,n_1} \omega_{r-1,n_1} \end{array} \right.$$

e ordiniamo tutti i risultati ottenuti nel modo descritto, a partire dai $(2)_{r-1}$ (compresi) in poi, in una semplice successione $\{z_{rn}\}$ ($n = 1, 2, \dots$). Parimenti ordiniamo tutte le operazioni $(2)_{r-1}^*$ in una semplice successione $\{\omega_{rn}\}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Useremo anche le notazioni

$$\omega_r^I, \omega_r^{II}, \omega_r^{III}, \omega_r^{IV} \quad (r = 2, 3, \dots)$$

per indicare generiche operazioni del tipo $(2)_{r-1}^*$ rispettivamente prima, seconda, terza e quarta riga; useremo le notazioni $z_r^I, z_r^{II}, z_r^{III}, z_r^{IV}$ per indicare i loro rispettivi risultati.

In una seconda Nota verranno studiate le proprietà dell'insieme E.

Analisi matematica. — *Alcune proprietà degli involucri*^(*). Nota di CARLO PUCCI, presentata ^(**) dal Socio MAURO PICONE.

Fissato un insieme X nello spazio euclideo E_n si indica con X_ρ ($\rho > 0$) l'involucro di raggio ρ dell'insieme X , vale a dire l'insieme dei punti di E_n che distano meno di ρ da X . In questa Nota proviamo che, per quasi tutti i valori positivi di ρ , $\mathcal{F}X_\rho$ è misurabile secondo Minkovski e tale misura coincide con la derivata rispetto a ρ della misura secondo Lebesgue di X_ρ . Ne segue una nuova espressione della misura di un insieme.

LA FRONTIERA DEGLI INVOLUCRI.

Indichiamo con $\underline{\mu} \mathcal{F}X$, $\bar{\mu} \mathcal{F}X$ la misura inferiore e superiore secondo Minkovski dell'insieme $\mathcal{F}X$ (frontiera di X) cioè

$$\underline{\mu} \mathcal{F}X = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\text{mis}(\mathcal{F}X)_\rho}{2\rho}, \quad \bar{\mu} \mathcal{F}X = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\text{mis}(\mathcal{F}X)_\rho}{2\rho}.$$

Se $\underline{\mu} \mathcal{F}X = \bar{\mu} \mathcal{F}X$, $\mathcal{F}X$ è misurabile secondo Minkovski ed indichiamo con $\mu \mathcal{F}X$ la sua misura.

Fissato un punto y di $\mathcal{F}X_\rho$ i punti x di $\mathcal{F}X$ distanti ρ da y si dicono *proiezioni* di y su $\mathcal{F}X$ e le rette xy *proiettanti* y su $\mathcal{F}X$. Se il punto y ha una sola proiezione si dice che esso è un punto *ordinario* di $\mathcal{F}X_\rho$ ed in caso contrario che è un punto di *pluriforcazione*. Considerato l'insieme delle frontiere $\mathcal{F}X_\rho$, con ρ positivo arbitrario, per ogni punto di $E_n - X$ ne passa una ed una sola e quindi ogni punto di $E_n - \bar{X}$ è ordinario o di pluriforcazione per X ⁽¹⁾.

Proviamo il seguente

LEMMA. — *Fissato un insieme limitato X nello spazio euclideo E_n ed un numero positivo τ , indicato con $A(\tau)$ l'insieme dei punti del complementare di X_τ che sono di massimo relativo per la funzione distanza da X , $A(\tau)$ è misurabile secondo Minkovski e $\mu A(\tau)$ risulta finita.*

Un qualsiasi punto x di $A(\tau)$ è di pluriforcazione per X e non esiste un vettore che formi un angolo minore di $\pi/2$ con ciascuna proiettante x su $\mathcal{F}X$ ⁽²⁾.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) Cfr. G. BOULIGAND [2] p. 93. Vi si trova dimostrato anche che l'insieme dei punti ordinari può ottenersi come somma dei punti di segmenti aperti ρ , due a due senza punti comuni ed aventi tutti un solo estremo su $\mathcal{F}X$. L'insieme dei punti di pluriforcazione è precisamente l'insieme degli altri estremi dei segmenti ρ .

(2) Cfr. G. BOULIGAND [2] p. 96.

Fissiamo in E_n un sistema di assi ortogonali x_1, x_2, \dots, x_n . Indichiamo con A_i i punti di $A(\tau)$ che hanno una proiettante che forma con x_i un angolo $\leq \arccos 1/n$ ed un'altra proiettante che forma un angolo $\geq \pi - \arccos 1/n$. Proviamo che ogni punto x di $A(\tau)$ deve appartenere a qualche A_i .

Se x non appartiene ad A_i possiamo supporre, a meno di un cambiamento di assi, che tutte le proiettanti x su \mathcal{FX} formino con x_i un angolo maggiore di $\arccos 1/n$ e cioè, indicato con $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ i coseni direttori di una qualsiasi proiettante, sia

$$(1) \quad \xi_1 < \frac{1}{n}.$$

Se x non appartenesse ad alcun A_i tale relazione sussisterebbe per ogni i . Determinando l'estremo superiore della funzione $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ con i vincoli dati dalle (1) e dalla relazione $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$ si prova facilmente

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n < 0.$$

Ciò è assurdo perché in tale caso il vettore $(-1, -1, \dots, -1)$ formerebbe con qualsiasi proiettante x su \mathcal{FX} un angolo $< \pi/2$, essendo il coseno di tale angolo

$$-\sqrt{\frac{1}{n}} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n).$$

Consideriamo una decomposizione coordinata di E_n in domini quadrati R_h di lato τ/n e poniamo $R_{hi} = A_i R_h$. Siccome X è limitato anche l'insieme $A(\tau)$ è limitato essendo esso contenuto in qualsiasi insieme convesso contenente X . Quindi gli insiemi R_{hi} non vuoti sono in numero finito e per provare il lemma basta mostrare che R_{hi} è misurabile secondo Minkovski con μR_{hi} finita per h ed i qualsiasi.

Consideriamo un generico R_{hi} . Siano x, x' due punti ad esso appartenenti indichiamo con ρ e ρ' rispettivamente la distanza di x e x' da \mathcal{FX} . Risulta

$$(2) \quad \overline{xx'} < \frac{\tau}{n} \quad ; \quad \rho, \rho' > \tau.$$

Inoltre senza alterare la generalità della dimostrazione possiamo supporre $\rho' \geq \rho$.

Sia y una proiezione di x su \mathcal{FX} . Indichiamo con θ l'angolo formato dai vettori $\overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xx'}$; indichiamo con θ_i (θ'_i) l'angolo formato dall'asse x_i con il vettore \overrightarrow{xy} ($\overrightarrow{xx'}$). Si ha evidentemente

$$(3) \quad \theta < \theta_i + \theta'_i,$$

ed osserviamo inoltre che appartenendo x ad A_i si può fissare y in modo che

$$(4) \quad \theta_i < \arccos \frac{1}{n}.$$

Per il teorema di Carnot è

$$\overline{yx'}^2 = \rho^2 + \overline{xx'}^2 - 2\rho \overline{xx'} \cos \theta,$$

ed essendo

$$\overline{yx'} \geq \rho' \geq \rho,$$

si ottiene

$$\overline{xx'} - 2\rho \cos \theta \geq 0.$$

Per le (2)

$$\cos \theta \leq \frac{1}{2n}, \quad \theta \geq \arccos \frac{1}{2n},$$

e per le (3), (4)

$$(5) \quad \theta'_i > \arccos \frac{1}{2n} - \arccos \frac{1}{n}.$$

Per la definizione di θ'_i segue che non vi sono due punti di R_{h_i} che hanno uguale la prima coordinata e pertanto l'insieme R_{h_i} è dotato di rappresentazione cartesiana

$$x_i = f(x_2, \dots, x_n),$$

risultando f definita nella proiezione di R_{h_i} sull'iperpiano $x_i = 0$. Tale funzione inoltre per la (5) è lipschitziana e quindi per un teorema di Kneser ([4] teorema 2) R_{h_i} è misurabile secondo Minkovski e μR_{h_i} è finita.

MISURA DEGLI INVOLUCRI.

Posto

$$(6) \quad f(\rho) = \text{mis } X_\rho, \quad \rho > 0,$$

Bouligand ha provato che per qualsiasi ϑ e ρ positivi, $\vartheta < 1$, sussistono le disuguaglianze

$$(7) \quad f(\rho) > f(\vartheta\rho) > \vartheta^n f(\rho) \quad (3).$$

La funzione $f(\rho)$ è quindi continua, crescente in $(0, +\infty)$ ed è assolutamente continua in qualsiasi intervallo (ρ_1, ρ_2) con $0 < \rho_1 < \rho_2 < +\infty$; se $\text{mis } X = 0$, $f(\rho)$ è assolutamente continua in $(0, \rho_2)$.

La funzione $f(\rho)$ può non essere sempre derivabile (4). Proviamo che:

Fissato comunque un insieme limitato X in E_n la funzione $f(\rho)$, definita dalla (6), è quasi ovunque derivabile in $(0, +\infty)$ e si ha quasi ovunque

$$(8) \quad f'(\rho) = \mu \mathfrak{F}(X_\rho).$$

(3) Vedi [1] p. 332.

(4) Basta ad esempio considerare l'insieme piano X costituito da tre lati di un quadrato. In tale caso $f(\rho)$ non è derivabile per ρ uguale alla metà della lunghezza di un lato. Nella nota [1] vi è erroneamente affermata la derivabilità di $f(\rho)$.

Essendo

$$[\mathfrak{F}(X_0)]_\tau = (X_{0+\tau} - X_0) + X_0 \cdot [\mathfrak{F}(X_0)]_\tau \subset X_{0+\tau} - X_{0-\tau}, \quad (\tau < \rho),$$

risulta

$$f(\rho + \tau) - f(\rho) \geq \text{mis } [\mathfrak{F}(X_0)]_\tau,$$

cioè a meno di un insieme di misura nulla ove non è definita $f'(\rho)$, si ha

$$(9) \quad f'(\rho) \geq \underline{\mu} \mathfrak{F}(X_0).$$

D'altra parte per la definizione dell'insieme $A(\tau)$

$$X_{0+\tau} - X_{0-\tau} \subset [\mathfrak{F}(X_0)]_\tau + \{[A(\sigma_1)]_\tau - [A(\sigma_2)]_\tau\},$$

ove σ_1, σ_2 e sono due qualsiasi numeri positivi verificanti le condizioni $\sigma_1 < \rho - \tau, \sigma_2 > \rho + \tau$. Per il lemma precedente ove esiste $f'(\rho)$ risulta

$$f'(\rho) \leq \underline{\mu} \mathfrak{F}(X_0) + \mu A(\sigma_1) - \mu A(\sigma_2).$$

La funzione $\mu A(\rho)$ è non crescente per $\rho > 0$ e quindi quasi ovunque continua. Pertanto per tutti i valori di ρ per i quali $A(\rho)$ è continua per l'arbitrarietà di σ_1 e σ_2 si ottiene

$$f'(\rho) \leq \underline{\mu} \mathfrak{F}(X_0)$$

e dalla (9) segue che la (8) sussiste quasi ovunque in $(0, +\infty)$.

Osserviamo anche che con considerazioni analoghe a quelle svolte da Bouligand per dimostrare la relazione (7) si può provare la seguente disuguaglianza isoperimetrica:

Per ogni insieme misurabile, limitato X di E_n sussiste la relazione

$$R(X) \underline{\mu}(X) \geq n \text{ mis } X,$$

ove $R(X)$ è il raggio della più piccola ipersfera contenente X .

FORMULE DI RIDUZIONE PER GLI INTEGRALI.

Fissato un insieme X dotato di punti interni e un numero negativo ρ indichiamo con X_ρ l'insieme dei punti di E_n la cui distanza dal complementare di X è maggiore di $-\rho$. Indichiamo con $-r(X)$ l'estremo inferiore dei valori di ρ per i quali X_ρ non è vuoto. L'insieme X_ρ risulta quindi definito e non vuoto per qualsiasi valore di $\rho > -r(X)$.

Se l'insieme X è limitato e

$$(10) \quad \text{mis } \mathfrak{F}X = 0,$$

si ha

$$(11) \quad \text{mis } X = \int_{-r(X)}^0 \underline{\mu} \mathfrak{F}(X_\rho) d\rho.$$

La funzione

$$(12) \quad \varphi(\rho) = \text{mis}(\mathcal{F}X)_\rho - \text{mis} X_\rho$$

è quasi ovunque derivabile per $\rho > 0$ e per il teorema precedente

$$\varphi'(\rho) = \mu \mathcal{F}[(\mathcal{F}X)_\rho] - \mu \mathcal{F}(X_\rho).$$

Essendo

$$\mathcal{F}[(\mathcal{F}X)_\rho] = \mathcal{F}(X_\rho) + \mathcal{F}(X_{-\rho})$$

otteniamo

$$(13) \quad \varphi'(\rho) = \mu \mathcal{F}(X_\rho).$$

Abbiamo già osservato che nella ipotesi (10) le due funzioni $\text{mis} X_\rho$, $\text{mis}(\mathcal{F}X)_\rho$ sono assolutamente continue in $[0, r(X)]$ e quindi tale è pure $\varphi(\rho)$ per la (12).

Perciò

$$\varphi[r(X)] - \varphi(0) = \int_0^{r(X)} \varphi'(\rho) d\rho,$$

ed essendo

$$\varphi[r(X)] = 0, \quad \varphi(0) = \text{mis} X,$$

dalla (12) segue la (11).

Nel piano E_2 , se gli insiemi $\mathcal{F}X_\rho$ sono curve rettificabili secondo Jordan, per un teorema di Favard ([3] p. 76) la loro misura secondo Jordan coincide con la loro misura secondo Minkovski e si ha

$$\text{mis} X = \int_{-r(X)}^0 d\rho \int_{\mathcal{F}(X_\rho)} d\rho.$$

Con queste ipotesi sulla frontiera degli involucri si può dimostrare che se $f(x)$ è continua in X sussiste la seguente formula di riduzione

$$\int_X f(x) d\tau = \int_{-r(X)}^0 d\rho \int_{\mathcal{F}(X_\rho)} f(x) d\rho.$$

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. BOULIGAND, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, « Bull. Sc. Math. », II, 52, pp. 320-344 e pp. 361-376 (1928).
- [2] G. BOULIGAND, *Géométrie infinitésimale directe*, Paris, 1932.
- [3] I. FAVARD, *La longueur et l'aire d'après Minkovski*, « Bull. Soc. Math. France » 61, pp. 63-84 (1933).
- [4] M. KNESER, *Einige Bemerkungen über das Minkovskische Flächenmas*, « Archiv der Math. », 6, pp. 382-390 (1955).

Matematica. — *Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.*
 Nota III di MARIO VOLPATO, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

In questa completo le ricerche iniziate nelle Note I e II, conservando i simboli e proseguendo la numerazione dei paragrafi, formule e note a piè di pagina.

13. Il teorema I è immediatamente suscettibile dell'estensione espressa dal seguente

TEOREMA 2. — *Le funzioni $\alpha(y), \beta(y)$ siano definite nell'intervallo $J (c \leq y \leq d)$ e la funzione $f(x, y)$ sia definita nel rettangolo $R = I \times J$, I essendo l'intervallo: $a \leq x \leq b$. Inoltre:*

I) *le funzioni $\alpha(y), \beta(y)$ siano assolutamente continue in J e vi soddisfino le*

$$a \leq \alpha(y) \leq b \quad ; \quad a \leq \beta(y) \leq b;$$

II) *la funzione $f(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x , assolutamente continua rispetto ad y per quasi tutti i valori di x in I , e maggiorata, in modulo, da una funzione $M(x)$ sommabile in J ;*

III) *i prodotti: $f[\alpha(y), y] \alpha'(y), f[\beta(y), y] \beta'(y)$ siano (misurabili e) sommabili in J ;*

IV) *la derivata parziale: $f'_y(x, y)$, che esiste quasi ovunque in R ed è ivi misurabile, sia sommabile in R .*

In queste ipotesi sussiste la seguente formula di Green:

$$(43) \quad \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(t, y) dt = \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f(t, c) dt + \int_c^y f[\beta(t), t] \beta'(t) dt - \\ - \int_c^y f[\alpha(t), t] \alpha'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\alpha(\eta)}^{\beta(\eta)} f'_y(t, \eta) dt.$$

La dimostrazione è pressoché immediata. Infatti, a norma del teorema I, si ha

$$(44) \quad \int_{\alpha(y)}^{\alpha(c)} f(t, y) dt = - \int_c^y f[\alpha(t), t] \alpha'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\alpha(\eta)}^{\alpha(c)} f'_y(t, \eta) dt,$$

e

$$(45) \quad \int_{\beta(c)}^{\beta(y)} f(t, y) dt = \int_c^y f[\beta(t), t] \beta'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\beta(c)}^{\beta(\eta)} f'_y(t, \eta) dt.$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1956.

Inoltre, per ogni fissato y di J , risulta

$$(46) \quad \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f(t, y) dt = \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} \{f(t, y) - f(t, c)\} dt + \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f(t, c) dt = \\ = \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} dt \int_c^y f'_y(t, \eta) d\eta + \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f(t, c) dt = \int_c^y d\eta \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f'_y(t, \eta) dt + \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f(t, c) dt.$$

E allora, sommando membro a membro le (44), (45), (46) si ottiene la (43), cioè la formula da dimostrarsi.

La (43) contiene, come caso particolare, l'analoga formula (2) del teorema 1 (Nota I). La (2), infatti, si deduce dalla (43), ponendo ivi $\beta(y) = \varphi(y)$ e $\alpha(y) = \varphi(c)$. In altre parole, il ruolo che nella (2) ha la retta $x = \varphi(c)$ è ora assunto dalla curva di equazione $x = \alpha(y)$.

La (43) mette in evidenza l'assoluta continuità dell'integrale

$$(47) \quad \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(t, y) dt.$$

Derivando i due membri della (43) si trova, quasi ovunque in J , la classica formula di derivazione sotto il segno di integrale

$$(48) \quad \frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(t, y) dt = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(t, y) dt + f[\beta(y), y] \beta'(y) - f[\alpha(y), y] \alpha'(y),$$

che così è stabilita, come volevamo, senza supporre la monotonia delle funzioni $\alpha(y)$ e $\beta(y)$. Tuttavia questo risultato non comprende ancora il teorema di derivazione dimostrato nella mia Nota già citata in ⁽¹⁾. Per raggiungere anche quello basterà provare il seguente

TEOREMA 3. - Si ammetta che:

I) le funzioni $\alpha(y)$, $\beta(y)$ siano assolutamente continue nell'intervallo J ($c \leq y \leq d$) e vi soddisfino la

$$(49) \quad \alpha(y) < \beta(y).$$

Nell'insieme

$$B: \quad \alpha(y) \leq x \leq \beta(y) \quad , \quad c \leq y \leq d,$$

sia definita una funzione $f(x, y)$ e supponiamo che, posto: $a = \min_J \alpha(y)$, $b = \max_J \beta(y)$ e detto I l'intervallo: $a \leq x \leq b$, siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

II) la funzione $f(x, y)$ sia misurabile rispetto ad x , assolutamente continua rispetto ad y per quasi tutti i valori di x in I , e maggiorata, in modulo da una funzione $M(x)$, sommabile in I ;

III) i prodotti: $f[\alpha(y), y] \alpha'(y)$, $f[\beta(y), y] \beta'(y)$, $M(\alpha(y)) \alpha'(y)$, $M(\beta(y)) \beta'(y)$ siano misurabili in J e i primi due vi siano anche sommabili⁽¹⁷⁾;

IV) la derivata parziale: $f'_y(x; y)$, che esiste quasi ovunque su quasi tutte le sezioni verticali di B ⁽¹⁸⁾ sia (misurabile e) sommabile in B .

In queste ipotesi sussiste la seguente formula di Green:

$$(50) \quad \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(t, y) dt = \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f(t, c) dt + \int_c^y f[\beta(t), t] \beta'(t) dt - \\ - \int_c^y f[\alpha(t), t] \alpha'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\alpha(\eta)}^{\beta(\eta)} f'_y(t, \eta) dt,$$

come verrà stabilito nei numeri successivi.

14. Proviamo dapprima il teorema 3 nell'ipotesi supplementare che la funzione $f(x, y)$ sia limitata in B , che si abbia, cioè, $|f(x, y)| \leq M^*$, con M^* costante opportuna.

Ciò premesso, dimostriamo anzitutto che:

fissato un numero $\varepsilon > 0$, sufficientemente piccolo, sussiste la formula:

$$(51) \quad \int_{\alpha(y)+\varepsilon}^{\beta(y)-\varepsilon} f(t, y) dt = \int_{\alpha(c)+\varepsilon}^{\beta(c)-\varepsilon} f(t, c) dt + \int_c^y f[\beta(t)-\varepsilon, t] \beta'(t) dt - \\ - \int_c^y f[\alpha(t)+\varepsilon, t] \alpha'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\alpha(\eta)+\varepsilon}^{\beta(\eta)-\varepsilon} f'_y(t, \eta) dt.$$

Fissiamo il numero positivo ε , sufficientemente piccolo, in maniera tale che risulti

$$(52) \quad \alpha(\eta) + \varepsilon < \beta(\eta) - \varepsilon \quad \text{per} \quad c \leq \eta \leq y,$$

(17) Nel teorema di derivazione dimostrato nella Nota citata in (1) si richiedeva che: le funzioni $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ fossero assolutamente continue e monotone in senso stretto nell'intervallo J e la funzione $f(x, y)$ soddisfacesse, in B , le: $|f(x, y)| \leq M(x)$, $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M(x) |y_1 - y_2|$. Come si è allora osservato (cfr. n. 2, p. 148 loco cit. in (1)) è possibile supporre che $f(x, y)$ sia addirittura definita su tutto il rettangolo $R = I \times J$ ed abbia ivi tutte le proprietà postulate in B . Questo fatto e la proposizione stabilita nel n. 8 (Nota II) mostrano allora che, nelle condizioni del teorema della Nota citata in (1), i prodotti, $f[\alpha(y), y] \alpha'(y)$, $f[\beta(y), y] \beta'(y)$ sono senz'altro misurabili e sommabili. Altrettanto può dirsi per i prodotti $M(\alpha(y)) \alpha'(y)$, $M(\beta(y)) \beta'(y)$. D'altronde, la sommabilità di questi, attesa la monotonia ed assoluta continuità di $\alpha(y)$, $\beta(y)$ e la sommabilità di $M(x)$, è un fatto ben noto indipendente dalla nostra proposizione del n. 8 (cfr., per esempio, L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Zanichelli, Bologna (1921), cap. IV, § 4, b), p. 179).

(18) Cfr. SAKS, *Théorie de l'intégrale*, «Monografie Matematyczne», Varsavia (1933), p. 150 teor. 2 e p. 151 teor. (8.1).

e poi suddividiamo l'intervallo: $c \leq \eta \leq y$ in un numero n , sufficientemente grande, di parti uguali, mediante i punti

$$(53) \quad \eta_0 = c < \eta_1 < \dots < \eta_{n-1} < \eta_n = y,$$

in maniera tale che nell'intervallo: $\eta_{i-1} \leq \eta \leq \eta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) risulti

$$(54) \quad \max [\alpha(\eta)] < \min [\alpha(\eta) + \varepsilon] \quad ; \quad \max [\beta(\eta) - \varepsilon] < \min [\beta(\eta)].$$

Osserviamo ora che sommando, membro a membro, le n relazioni

$$(55) \quad \int_{\alpha(\eta_i) + \varepsilon}^{\beta(\eta_i) - \varepsilon} f(t, \eta_i) dt = \int_{\alpha(\eta_{i-1}) + \varepsilon}^{\beta(\eta_{i-1}) - \varepsilon} f(t, \eta_{i-1}) dt + \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} f[\beta(t) - \varepsilon, t] \beta'(t) dt - \\ - \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} f[\alpha(t) + \varepsilon, t] \alpha'(t) dt + \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} d\eta \int_{\alpha(\eta) + \varepsilon}^{\beta(\eta) - \varepsilon} f'_y(t, \eta) dt, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

si ottiene la (51). Questa sarà allora acquisita non appena avremo provato che, per ogni fissato $i = 1, 2, \dots, n$, sussiste la (55). È quello che ora faremo. Osserviamo intanto che l'insieme

$$B_{n,i}(\varepsilon): \quad \alpha(\eta) + \varepsilon \leq x \leq \beta(\eta) - \varepsilon, \quad \eta_{i-1} \leq \eta \leq \eta_i,$$

può essere pensato, in grazia delle (54), come una porzione di un opportuno rettangolo $R_{n,i}(\varepsilon)$, contenuto in B e ottenuto, segnando con due convenienti verticali, la striscia orizzontale: $\eta_{i-1} \leq \eta \leq \eta_i$. Nel rettangolo $R_{n,i}(\varepsilon)$ la funzione $f(x, \eta)$ è definita, vi soddisfa le ipotesi II), IV) e vi è inoltre limitata. Allora, per l'osservazione che abbiamo fatto alla fine del n. 6 (Nota I), segue che i prodotti

$$(56) \quad f[\alpha(\eta) + \varepsilon, \eta] \alpha'(\eta) \quad ; \quad f[\beta(\eta) - \varepsilon, \eta] \beta'(\eta)$$

sono misurabili e sommabili nell'intervallo: $\eta_{i-1} \leq \eta \leq \eta_i$. Pertanto, nel rettangolo $R_{n,i}(\varepsilon)$, le funzioni: $\alpha(\eta) + \varepsilon, \beta(\eta) - \varepsilon, f(x, \eta)$ soddisfano a tutte le ipotesi del teorema 2 e quindi, a norma di questo teorema, sussiste la (55).

15. Ora la limitatezza della $f(x, y)$ e la sommabilità in B della $f'_y(x, y)$ porgono

$$(57) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha(y) + \varepsilon}^{\beta(y) - \varepsilon} f(t, y) dt = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(t, y) dt,$$

$$(58) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_c^y d\eta \int_{\alpha(\eta) + \varepsilon}^{\beta(\eta) - \varepsilon} f'_y(t, \eta) dt = \int_c^y d\eta \int_{\alpha(\eta)}^{\beta(\eta)} f'_y(t, \eta) dt,$$

e quindi, per completare la dimostrazione del teorema 3 basta provare che

$$(59) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_c^y f[\alpha(t) + \varepsilon, t] \alpha'(t) dt = \int_c^y f[\alpha(t), t] \alpha'(t) dt,$$

$$(60) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_c^y f[\beta(t) - \varepsilon, t] \beta'(t) dt = \int_c^y f[\beta(t), t] \beta'(t) dt.$$

A tale scopo, detto σ un numero positivo e arbitrario, determiniamo un numero positivo $\rho(\sigma)$ in maniera tale che, per ogni sottoinsieme H di J per cui la $\text{mis } H < \rho(\sigma)$, si abbia

$$(61) \quad \int_H |\alpha'(t)| dt < \sigma \quad ; \quad \int_H |\beta'(t)| dt < \sigma.$$

Indichiamo poi con $\mathcal{H}(\alpha')$, $\mathcal{H}(\beta')$ le porzioni di J ove non esistono oppure sono nulle, rispettivamente, $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$, e diciamo: τ_1, τ_2, \dots una successione di intervalli (chiusi) di J che ricoprono l'insieme misurabile $\mathcal{H}(\alpha') \cup \mathcal{H}(\beta')$ e tale che, posto $T = \bigcup_i \tau_i$, si abbia

$$(62) \quad \text{mis} \{T - [\mathcal{H}(\alpha') \cup \mathcal{H}(\beta')]\} < \rho(\sigma).$$

Segue allora la

$$(63) \quad \left| \int_c^y \{f[\alpha(t) + \varepsilon, t] - f[\alpha(t), t]\} \alpha'(t) dt \right| \leq \\ \leq \left| \int_{J-T} |f[\alpha(t) + \varepsilon, t] - f[\alpha(t), t]| |\alpha'(t)| dt \right| + 2 M^* \sigma.$$

Osserviamo ora che, a norma dell'ipotesi III), nell'insieme: $\{J - [\mathcal{H}(\alpha') \cup \mathcal{H}(\beta')]\}$, sono misurabili le funzioni composte: $f[\alpha(y), y]$, $f[\beta(y), y]$, e quindi le seguenti funzioni

$$(64) \quad \psi_\alpha(y) = \begin{cases} f[\alpha(y), y] & \text{ove } \alpha'(y) \neq 0 \\ 0 & \text{ove } \alpha'(y) = 0 \end{cases};$$

$$\psi_\beta(y) = \begin{cases} f[\beta(y), y] & \text{ove } \beta'(y) \neq 0 \\ 0 & \text{ove } \beta'(y) = 0, \end{cases}$$

sono misurabili in J . Di qui, segue l'esistenza di una porzione aperta $J[\rho(\sigma)]$ di J per la quale la

$$(65) \quad \text{mis} \{J - J[\rho(\sigma)]\} < \rho(\sigma),$$

e tale che nell'insieme chiuso $J - J[\rho(\sigma)]$ le funzioni $\psi_\alpha(y)$, $\psi_\beta(y)$ sono continue. Ebbene, diciamo s_1, s_2, \dots gli intervalli (chiusi) di J contigui all'insieme $J - J[\rho(\sigma)]$ e definiamo nel rettangolo $R = I \times J$ una funzione

$f_{\sigma}(x, y)$ nel modo che segue. Su ogni sezione orizzontale $Y(y)$ di R con y che non sia interno a nessuno degli intervalli: $s_1, s_2, \dots; \tau_1, \tau_2, \dots$ poniamo

$$f_{\sigma}(x, y) = \begin{cases} \psi_{\alpha}(y) & \text{se } a \leq x \leq \alpha(y), \\ f(x, y) & \text{se } \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), \\ \psi_{\beta}(y) & \text{se } \beta(y) \leq x \leq b, \end{cases}$$

mentre su ogni striscia orizzontale: $I \times s_i, I \times \tau_i; (i = 1, 2, \dots)$ definiamo $f_{\sigma}(x, y)$ in maniera tale da risultare, per ogni fissato x di I , continua e lineare in y . Di qui, dalla (65) e dalla (61) segue la

$$(66) \quad \left| \int_{j-T}^j |f[\alpha(t) + \varepsilon, t] - f[\alpha(t), t]| |\alpha'(t)| dt \right| \leq \\ \leq \left| \int_{j-T-J[\varrho(\sigma)]}^j |f_{\sigma}[\alpha(t) + \varepsilon, t] - f_{\sigma}[\alpha(t), t]| |\alpha'(t)| dt \right| + 2M^* \sigma.$$

Ora osserviamo che $f_{\sigma}(x, y)$ è misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad y , di guisa che, a norma dei risultati di G. Scorza Dragoni⁽¹⁹⁾, fissato un numero positivo e arbitrario ρ^* , esiste una porzione aperta Δ di R , avente proiezione $\Delta(x)$, sull'asse x , di misura minore di ρ^* , tale che nella porzione chiusa $R - \Delta$ la $f_{\sigma}(x, y)$ sia uniformemente continua rispetto ad (x, y) . Ebbene, diciamo $E(\Delta(x), \alpha), E(\Delta(x), \alpha + \varepsilon)$ gli insiemi dei punti di J per i quali, rispettivamente, $\alpha(y)$ e $\alpha(y) + \varepsilon$ appartengono a $\Delta(x)$. In base ad un lemma indicato da G. Darbo⁽²⁰⁾, segue che se ρ^* è minore di un conveniente numero positivo $\rho^*[\rho(\sigma), \alpha']$, indipendente da ε , sussistono le

$$\text{mis}\{E(\Delta(x), \alpha + \varepsilon) - \mathcal{H}(\alpha')\} < \frac{\rho(\sigma)}{2}, \quad \text{mis}\{E(\Delta(x), \alpha) - \mathcal{H}(\alpha')\} < \frac{\rho(\sigma)}{2},$$

e quindi la

$$(67) \quad \text{mis}\{E(\Delta(x), \alpha + \varepsilon) \cup E(\Delta(x), \alpha) - \mathcal{H}(\alpha')\} < \rho(\sigma).$$

Ovviamente, se y appartiene all'insieme $J - E(\Delta(x), \alpha + \varepsilon) \cup E(\Delta(x), \alpha)$ allora i punti, di R , di coordinate $[\alpha(y) + \varepsilon, y], [\alpha(y), y]$ appartengono alla porzione chiusa $R - \Delta$, di R , ove $f_{\sigma}(x, y)$ è uniformemente continua. Ebbene, è possibile allora scegliere ε in maniera tale che risulti

$$(68) \quad |f_{\sigma}[\alpha(y) + \varepsilon, y] - f_{\sigma}[\alpha(y), y]| < \sigma.$$

Di qui, dalle (67) e (61), e dal fatto che essendo

$$\{J - T - J[\rho(\sigma)]\} \cap \{E(\Delta(x), \alpha + \varepsilon) \cup E(\Delta(x), \alpha) \cap \mathcal{H}(\alpha')\} = 0,$$

(19) Si veggia il loco cit. in (7).

(20) G. DARBO, *Sulle condizioni sufficienti per la continuità di un integrale*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », vol. XXII, pp. 134-142, p. 135, n. 1. (1953).

è

$$J - T - J [\rho(\sigma)] = \{J - T - J [\rho(\sigma)] - E(\Delta(x), \alpha + \varepsilon) \cup E(\Delta(x), \alpha)\} + \\ + \{J - T - J [\rho(\sigma)]\} \cap \{E(\Delta(x), \alpha + \varepsilon) \cup E(\Delta(x), \alpha) - \mathcal{M}(\alpha')\},$$

segue la

$$(69) \quad \left| \int_{J-T-J[\rho(\sigma)]} |f_{\sigma}[\alpha(t) + \varepsilon, t] - f_{\sigma}[\alpha(t), t]| |\alpha'(t)| dt \right| \leq \sigma \int_c^d |\alpha'(t)| dt + 2M^* \sigma.$$

Di qui, dalla (66) e dalla (63), attesa l'arbitrarietà di σ , segue la (59). In modo analogo si prova la (60). Con ciò il teorema 3 è dimostrato nell'ipotesi supplementare della limitatezza della $f(x, y)$ in B.

16. Liberiamoci ora dall'ipotesi che $f(x, y)$ sia limitata in B. A tale scopo, su ogni fissata sezione verticale $X(x)$ di B, poniamo

$$(70) \quad f_n(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } M(x) \leq n \\ 0 & \text{se } M(x) > n, \end{cases}$$

di guisa che, su $X(x)$, risulta

$$(71) \quad f'_{ny}(x, y) = \begin{cases} f'_y(x, y) & \text{se } M(x) \leq n \\ 0 & \text{se } M(x) > n. \end{cases}$$

Per qualsivoglia n sussistono le

$$(72) \quad |f_n(x, y)| \leq |f(x, y)| \leq M(x) \quad ; \quad |f'_{ny}(x, y)| \leq |f'_y(x, y)|,$$

rispettivamente, in B e quasi ovunque in B; mentre, per ogni fissato n , risulta in B

$$(73) \quad |f_n(x, y)| \leq n.$$

Inoltre $f_n(x, y)$ è assolutamente continua, rispetto ad y , su quasi tutte le verticali e misurabile, rispetto ad x , su tutte le orizzontali. La derivata $f'_{ny}(x, y)$ esiste quasi ovunque in B, ivi è misurabile a norma della (71) e inoltre vi è sommabile per la seconda delle (72).

Esaminiamo la misurabilità e sommabilità dei prodotti: $f_n[\alpha(y), y] \alpha'(y)$, $f_n[\beta(y), y] \beta'(y)$. Essi risultano così definiti:

$$f_n[\alpha(y), y] \alpha'(y) = \\ = \begin{cases} f[\alpha(y), y] \alpha'(y) & \text{nei punti di J ove } M(\alpha(y)) |\alpha'(y)| \leq n |\alpha'(y)|, \\ 0 & \text{nei punti di J ove } M(\alpha(y)) |\alpha'(y)| > n |\alpha'(y)|; \end{cases}$$

$$f_n[\beta(y), y] \beta'(y) = \\ = \begin{cases} f[\beta(y), y] \beta'(y) & \text{nei punti di J ove } M(\beta(y)) |\beta'(y)| \leq n |\beta'(y)|, \\ 0 & \text{nei punti di J ove } M(\beta(y)) |\beta'(y)| > n |\beta'(y)|. \end{cases}$$

Di qui, dalla misurabilità delle funzioni: $M(\alpha(y))\alpha'(y)$, $M(\beta(y))\beta'(y)$, $n\alpha'(y)$, $n\beta'(y)$ e quindi delle porzioni di J ove sussistono le: $M(\alpha(y))|\alpha'(y)| \leq n|\alpha'(y)|$; $M(\beta(y))|\beta'(y)| \leq n|\beta'(y)|$, segue la misurabilità dei prodotti: $f_n[\alpha(y), y]\alpha'(y)$, $f_n[\beta(y), y]\beta'(y)$.

La loro sommabilità segue poi dalle disuguaglianze:

$$|f_n[\alpha(y), y]\alpha'(y)| \leq |f[\alpha(y), y]\alpha'(y)|;$$

$$|f_n[\beta(y), y]\beta'(y)| \leq |f[\beta(y), y]\beta'(y)|.$$

Per ogni fissato n , sussiste allora la formula:

$$(74) \quad \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f_n(t, y) dt = \int_{\alpha(c)}^{\beta(c)} f_n(t, c) dt + \int_c^y f_n[\beta(t), t]\beta'(t) dt -$$

$$- \int_c^y f_n[\alpha(t), t]\alpha'(t) dt + \int_c^y d\eta \int_{\alpha(\eta)}^{\beta(\eta)} f'_{ny}(t, \eta) dt.$$

Di qui, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ottiene la formula (50) da dimostrarsi.

Teoria delle equazioni a derivate parziali. — *Sulla funzione di Green per problema di Dirichlet relativo alle equazioni lineari ellittiche* (*). Nota di BENEDETTO PETTINEO, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Nei suoi *Appunti di Analisi Superiore* il prof. Picone propone un metodo per risolvere i problemi al contorno relativi alle equazioni lineari del secondo ordine, con l'uso delle equazioni integrali lineari di prima specie (1).

In questa Nota mostrerò in che modo l'applicazione di tale metodo, qualora l'equazione sia di tipo ellittico, possa condurre alla rapida determinazione della funzione di Green per problema di Dirichlet.

1. Si consideri l'equazione lineare

$$(1) \quad E[u] \equiv \sum_{h,k} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = f(X),$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli (1940), pp. 731-774. Dello stesso metodo si è occupato ancora il prof. Picone in tre Note Lincee (*Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*, vol. II, 1947); il metodo in questione è il secondo fra i tre proposti in tali Note.

coi coefficienti a_{hk} , b_h , c funzioni del punto $X(x_1, \dots, x_r)$ in un campo limitato C dello spazio S_r a r dimensioni. La (1) sia ellittico-positiva in C , cioè per ogni X di C la forma quadratica $\sum_{h,k} a_{hk}(X) \lambda_h \lambda_k$ sia definita positiva ed abbia senz'altro il discriminante $\|a_{hk}\| = 1$.

Sia D un dominio contenuto in C , con la frontiera $\mathfrak{F}D$ costituita da un numero finito di ipersuperficie regolari, chiuse, semplici, a due a due senza punti in comune; inoltre ad ogni punto X di $\mathfrak{F}D$ si possa associare un'ipersfera $\Gamma(X)$ di centro X , in modo che la porzione di $\mathfrak{F}D$ contenuta in $\Gamma(X)$ sia suscettibile, rispetto ad un sistema di assi ξ_1, \dots, ξ_r con l'origine in X , di una rappresentazione del tipo $\xi_r = \zeta(\xi_1, \dots, \xi_{r-1})$, con ζ funzione definita in un conveniente campo, ivi di classe $C^{(3,\lambda)}$ (cioè a derivate terze λ -hölderiane), nulla con le sue derivate prime nel punto X ⁽²⁾. Per un rapido conseguimento dei risultati, supporrò inoltre i coefficienti a_{hk} , b_h , c rispettivamente di classe $C^{(3,\lambda)}$, $C^{(2,\lambda)}$, $C^{(1,\lambda)}$ in D . Accanto alla (1) si può considerare allora l'equazione aggiunta

$$(1^*) \quad E^*[u] \equiv \sum_{h,k} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_h b_h^* \frac{\partial u}{\partial x_h} + c^* u = 0,$$

dove

$$b_h^* = -b_h + 2 \sum_k \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k}, \quad c^* = c + \sum_h \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\sum_k \frac{\partial a_{hk}}{\partial x_k} - b_h \right).$$

Supporrò infine, ma solo per il momento, $c < 0$, $c^* < 0$ in D .

Sia n_X (o semplicemente n) la normale interna a $\mathfrak{F}D$ nel punto X e sia n'_X (o semplicemente n') la conormale interna relativa alla (1) (ed alla (1^*)), definita — com'è noto — dalle relazioni

$$a(X) \cos(x_h, n') = \sum_k a_{hk}(X) \cos(x_k, n) \quad (\text{con } a > 0) \quad (h = 1, \dots, r).$$

Nelle ipotesi ammesse esiste la funzione di Green $G(X, Y)$ per il problema di Dirichlet relativo alla (1) (ed alla (1^*)) nel dominio D ; si ha, com'è noto, $E_X[G(X, Y)] = E_Y[G(X, Y)] = 0$ rispettivamente per X e per Y in $D - \mathfrak{F}D$ ed inoltre $G(X, Y) = 0$ per X o per Y su $\mathfrak{F}D$.

Se F è funzione di classe $C^{(\alpha,\lambda)}$ in D , la funzione U_0 definita ponendo

$$(2) \quad U_0(X) = - \int_D G(X, Y) F(Y) dY$$

è nulla su $\mathfrak{F}D$, verifica (in $D - \mathfrak{F}D$) l'equazione $E[U_0] = F$ ed inoltre risulta di classe $C^{(3,\lambda)}$ in D (*C. Miranda*, loc. cit. ⁽²⁾, teor. 36, I ⁽³⁾).

(2) Cfr. *C. MIRANDA, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, « *Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete* », Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1955).

(3) Tale teorema è senz'altro applicabile perché nella (1) si è supposto $c < 0$.

Nella porzione T di D contenuta in un opportuno intorno iperspaziale di $\mathfrak{F}D$ la distanza $\delta(X)$ del punto X da $\mathfrak{F}D$ è funzione di classe $C^{(2,\lambda)}$ (almeno). Si può prolungare allora (ed in vari modi) la funzione $\delta(X)$ in tutto D in maniera che quivi si mantenga di classe $C^{(2,\lambda)}$ ed inoltre positiva in $D - \mathfrak{F}D$. Orbene, posto

$$(3) \quad \varphi = U_0/\delta \quad \text{in } D - \mathfrak{F}D, \quad \varphi = \partial U_0/\partial n \quad \text{su } \mathfrak{F}D,$$

si ottiene una funzione di classe $C^{(2)}$ (almeno), cioè a derivate seconde continue, in D .

Basta riconoscere che ciò è vero nella porzione T di D (in cui $\delta(X)$ è proprio la distanza di X da $\mathfrak{F}D$). È lecito supporre che ad ogni punto X di T corrisponda uno ed un sol punto X_0 di $\mathfrak{F}D$ in maniera che X si trovi sulla normale n_{X_0} (e $\delta(X)$ sia la lunghezza del segmento $\overline{X_0 X}$). Si consideri allora un sistema di assi ortogonali ξ_1, \dots, ξ_r con l'origine in X , in maniera che $\xi_i \equiv n_{X_0}$ e si osservi che $\partial\varphi/\partial x_h$ e $\partial^2\varphi/\partial x_h\partial x_k$ si possono esprimere linearmente per mezzo delle derivate $\partial\varphi/\partial\xi_i$ e $\partial^2\varphi/\partial\xi_i\partial\xi_j$ (e viceversa). Per esempio, per ogni punto X di $T - \mathfrak{F}D$,

$$\partial^2\varphi/\partial x_h\partial x_k = \sum_i \alpha_i \partial\varphi/\partial\xi_i + \sum_{i,j} \alpha_{ij} \partial^2\varphi/\partial\xi_i\partial\xi_j,$$

dove le α_i, α_{ij} (continue in T) sono limitabili per mezzo delle curvature di $\mathfrak{F}D$. Si ha, per esempio,

$$\partial^2\varphi/\partial\xi_1^2 = 2 \left(U_0 - \delta \partial U_0/\partial\xi_1 + \frac{\delta^2}{2} \partial^2 U_0/\partial\xi_1^2 \right) / \delta^3$$

e poiché $U_0(X_0) = 0$ e U_0 è di classe $C^{(3,\lambda)}$ in D , si deduce la continuità di $\partial^2\varphi/\partial\xi_1^2$. Lo stesso avviene per le altre derivate seconde. Per la particolare natura della frontiera $\mathfrak{F}D$, è facile riconoscere che la funzione φ (di classe $C^{(2)}$ in D) è traccia di funzione pure di classe $C^{(2)}$ in tutto un dominio rettangolare R (dell' S_r) contenente internamente D . (Cfr. pure, per esempio, C. Miranda, loc. cit. ⁽²⁾, N. 16).

Ciò posto, sia $\{v_s\}$ un sistema (numerabile) di funzioni, completo in ogni insieme chiuso interno a R per l'approssimazione lineare puntuale uniforme, derivabile due volte in modo uniforme, delle funzioni di classe $C^{(2)}$ in R ⁽⁴⁾. Se si pone

$$w_s = \delta v_s \quad (\text{in } D),$$

i due sistemi di funzioni $\{E[w_s]\}$ e $\{E^*[w_s]\}$ risultano hilbertianamente completi in D .

Poiché ogni funzione hilbertiana (cioè di quadrato sommabile) in D , è quivi limite in media di funzioni F di classe $C^{(1,\lambda)}$, basta dimostrare che

(4) M. PICONE, loc. cit. ⁽¹⁾, pp. 516-536. Un particolare sistema $\{v_s\}$ è quello dei monomi $x_1^{\lambda_1} \dots x_r^{\lambda_r}$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_r = 0, 1, 2, \dots$).

F, cioè (per le (2) e (3)) che $E[\delta\varphi]$ è limite in media di combinazioni lineari di funzioni del sistema $\{E[w_s]\}$. Ora è facile riconoscere che $E[\delta\varphi]$ è addirittura limite uniforme (in D) di funzioni $E[\delta P]$, con

$$P(X) = \sum_{s=1}^v \alpha_s v_s(X).$$

Basta ricordare all'uopo che φ è traccia di funzione di classe $C^{(2)}$ in R ed osservare che si ha

$$E[\delta\varphi] - E[\delta P] = \delta(E[\varphi] - E[P]) + \sum_h A_h \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_h} - \frac{\partial P}{\partial x_h} \right) + B(\varphi - P),$$

con le A_h, B funzioni continue in D.

In modo analogo si prova la completezza hilbertiana del sistema $\{E^*[w_s]\}$.

2. Si sopprimano adesso le ipotesi restrittive $c < 0$ e $c^* < 0$ in D.

Si può sempre trovare un numero $\lambda > 0$ tale che si abbia $c - \lambda < 0$ e $c^* - \lambda < 0$ (in D). Posto $E_\lambda = E - \lambda$, i due sistemi $\{E_\lambda[w_s]\}$ e $\{E_\lambda^*[w_s]\}$ sono allora hilbertianamente completi in D.

Denotando con q i valori prescritti su $\mathfrak{F}D$ per la soluzione u della (1), il teorema di reciprocità applicato alle funzioni w_s (nulle su $\mathfrak{F}D$) fornisce

$$(4) \quad \int_D E^*[w_s] u dX = \int_D w_s f dX - \int_{\mathfrak{F}D} a \frac{\partial w_s}{\partial n'} q d\sigma(X).$$

(Si noti che $a \partial w_s / \partial n' = a \cos(n, n') \partial w_s / \partial n = v_s \sum_{h,k} a_{hkh} \cos(x_h, n) \cos(x_k, n)$ su $\mathfrak{F}D$).

Dalle (4) si deducono le seguenti

$$(4_\lambda) \quad \int_D E_\lambda^*[w_s] u dX = \int_D w_s (f - \lambda u) dX - \int_{\mathfrak{F}D} a \frac{\partial w_s}{\partial n'} q d\sigma(X)$$

(e viceversa).

Sia u una soluzione hilbertiana (in D) delle (4) (e (4_λ)); si denoti con G_λ la funzione di Green pel problema di Dirichlet relativo all'operatore E_λ e si ponga

$$u'(X) = - \int_D G_\lambda(X, Y) \{f(Y) - \lambda u(Y)\} dY + \int_{\mathfrak{F}D} a(Y) \frac{\partial G_\lambda(X, Y)}{\partial n'_Y} q(Y) d\sigma(Y).$$

Moltiplicando ambo i membri della precedente per $E_\lambda^*[w_s]$ ed integrando in D, dopo di avere osservato che

$$- \int_D G_\lambda(X, Y) E_\lambda^*[w_s(X)] dX = w_s(Y),$$

si ottiene

$$\int_D E_\lambda^* [w_s] u' dX = \int_D w_s (f - \lambda u) dX - \int_{\mathfrak{F}D} a \frac{\partial w_s}{\partial n'} q d\sigma (X)$$

e confrontando con le (4_λ), per la completezza del sistema $\{E_\lambda^* [w_s]\}$, si conclude che $u' \equiv u$.

Dunque ogni soluzione u (hilbertiana) delle (4) è soluzione dell'equazione di Fredholm

$$u(X) = - \int_D G_\lambda(X, Y) \{f(Y) - \lambda u(Y)\} dY + \int_{\mathfrak{F}D} a(Y) \frac{\partial G_\lambda(X, Y)}{\partial n'_Y} q(Y) d\sigma(Y).$$

Si deduce che u è soluzione del problema

$$(5) \quad E[u] = f \quad \text{in} \quad D - \mathfrak{F}D, \quad u = q \quad \text{su} \quad \mathfrak{F}D.$$

Se per tale problema vale il teorema di unicità, il sistema $\{E^* [w_s]\}$ è hilbertianamente completo (in D).

Riassumendo:

Ogni soluzione u hilbertiana (in D) del sistema (4) di equazioni integrali di Fischer-Riesz è quasi ovunque eguale ad una soluzione del problema (5) di Dirichlet⁽⁵⁾. Se per tale problema vale il teorema di unicità, il sistema di funzioni $\{E^ [w_s]\}$ è (in D) hilbertianamente completo.*

3. La circostanza che le funzioni w_s si annullano su $\mathfrak{F}D$ è vantaggiosa ai fini della determinazione della funzione di Green.

Si supponga che pel problema (5) valga il teorema di unicità e sia $G(X, Y)$ la funzione di Green corrispondente.

Col procedimento di ortonormalizzazione di Schmidt si trasformi il sistema $\{E^* [w_s]\}$ nel sistema ortonormale $\{E^* [W_s]\}$ (la W_s è combinazione lineare delle w_1, \dots, w_s). Se, nelle (4), si pone W_s in luogo di w_s , si perviene alla formula risolutiva

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} E^* [W_s] \left(\int_D W_s f dX - \int_{\mathfrak{F}D} a \frac{\partial W_s}{\partial n'} q d\sigma (X), \right.$$

con la serie convergente in media in D . Tale serie continua a convergere sia per $q = 0$ che per $f = 0$ e pertanto

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} E^* [W_s] \int_D W_s f dX - \sum_{s=1}^{\infty} E^* [W_s] \int_{\mathfrak{F}D} a \frac{\partial W_s}{\partial n'} q d\sigma (X),$$

con le due serie convergenti in media in D .

(5) Si noti che f e q possono benissimo essere soltanto hilbertiane (rispettivamente in D ed in $\mathfrak{F}D$), nel qual caso u è soluzione *generalizzata* del problema (5).

Dopo di ciò, d'accordo col prof. Picone, si può senz'altro ritenere che la serie

$$-\sum_{s=1}^{\infty} E^* [W_s(X)] W_s(Y)$$

rappresenti la funzione di Green pel problema di Dirichlet (5).

Si può aggiungere che, negli spazi S_2 e S_3 tale serie, per ogni punto Y di D , converge in media (in D) verso G .

Infatti, per ogni punto Y di D , la $G(X, Y)$ è funzione del punto X hiltbertiana in D nell' S_2 e nell' S_3 ; pertanto, per la completezza del sistema ortogonale $\{E^* [W_s]\}$, si ha

$$G(X, Y) = \sum_{s=1}^{\infty} E^* [W_s(X)] \int_D G(X, Y) E^* [W_s(X)] dX,$$

con la serie convergente in media. D'altra parte

$$-\int_D G(X, Y) E^* [W_s(X)] dX = W_s(Y).$$

Geometria. — *Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti.* Nota I di GIUSEPPE TALLINI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. Denoteremo, con B. Segre, $S_{n,q}^{(1)}$ uno spazio lineare (proiettivo) finito di dimensione n , costruito su un corpo γ di Galois di ordine q . È ben noto (2) che l'ordine q di γ è un numero del tipo $q = p^h$, d'altronde qualunque, ove $p \geq 2$, $h \geq 1$ sono interi e p è primo (uguale alla caratteristica di γ); e che ogni $S_k \subseteq S_{n,q}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) contiene $Q_k = \sum_{l=0}^k q^l$ punti.

In un $S_{2,q}$ chiamiamo, con B. Segre, k -arco (3) un insieme di k punti di $S_{2,q}$ a tre a tre non allineati. È noto (4) allora che una conica non degenera costituisce un $(q+1)$ -arco. Inoltre essa ammette $q+1$ tangenti distinte. Se $p = 2$, ed allora soltanto, queste passano tutte per un punto C , distinto dai punti della conica (5). In questo caso il punto C e i punti della conica

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) Cfr. B. SEGRE [12], p. 357.

(2) Cfr. ad esempio B. SEGRE [7], §§ 12, 17.

(3) Cfr. B. SEGRE [12], p. 359, dove è dato, più in generale, la nozione di k -arco in un $S_{n,q}$ con n qualunque.

(4) Cfr. B. SEGRE [8], p. 138, e [12], p. 358. Cfr. anche con quanto è detto ai nn. 2, 3 della presente Nota.

(5) Cfr. B. QVIST [6]. Per una proprietà più generale, cfr. la nota (6) di B. SEGRE [12]. Cfr. anche con quanto è detto al n. 3 della presente Nota.

formano un $(q+2)$ -arco; ne segue che, escludendo dal $(q+2)$ -arco un punto distinto da C , si ottiene un $(q+1)$ -arco che, se $q > 4$, non può essere una conica, in quanto il suddetto $(q+1)$ -arco e la conica hanno $q \geq 5$ punti in comune e per un 5-arco passa una e una sola conica. Dunque, se $p = 2$ e $q > 4$, esistono in $S_{2,q}$ dei $(q+1)$ -archi che non sono coniche.

B. Segre ha dimostrato ⁽⁶⁾ che questo è il solo caso d'eccezione, cioè che: *se $p \neq 2$, ogni $(q+1)$ -arco di $S_{2,q}$ è una conica*, giungendo così a caratterizzare con sole proprietà grafiche le coniche di un $S_{2,q}$, con $p \neq 2$.

In un successivo lavoro ⁽⁷⁾ dello stesso Autore questa caratterizzazione è stata estesa alle cubiche sghembe di un $S_{3,q}$, e sono stati posti – e parzialmente risolti – problemi analoghi per le curve razionali normali di un $S_{n,q}$.

Le suddette ricerche ed i numerosi problemi che da esse nascono furono argomento di alcune lezioni del Corso di Geometria Superiore tenute a Roma dal prof. Segre nel maggio del 1955. In esse questi propose, tra l'altro, di caratterizzare con sole proprietà grafiche, analogamente a quanto era stato fatto per le coniche di un $S_{2,q}$, le quadriche di un $S_{n,q}$ ⁽⁸⁾. È ciò che ci siamo proposti di fare. Nella Nota II, che seguirà questa, riassumeremo i risultati da noi ottenuti, dando anche qualche rapido cenno sulle dimostrazioni: queste saranno compiutamente stabilite in un successivo lavoro.

Nella trattazione non escluderemo che possa anche essere $p = 2$, poichè, a differenza del caso piano, negli spazi di dimensioni superiori molto di ciò che sarà detto nel caso $p \neq 2$ si potrà trasportare al caso $p = 2$, per quanto resti una sostanziale differenza fra i due casi.

In questa Nota daremo alcuni cenni, indispensabili per la comprensione del seguito, sulla teoria delle quadriche negli spazi finiti ⁽⁹⁾, distinguendo i casi $p \neq 2$ e $p = 2$, nei quali la teoria presenta di fatto notevoli differenze.

2. In un $S_{n,q}$ con $n \geq 2$ e $p \neq 2$, una quadrica (conica se $n = 2$) è – per definizione – il luogo dei punti le cui coordinate proiettive omogenee soddisfano ad una equazione del tipo:

$$(I) \quad \sum_{i,k=0}^n a_{ik} x_i x_k = 0,$$

dove le a_{ik} sono elementi del corpo γ su cui è costruito l' $S_{n,q}$.

Diremo che la quadrica (1) è non specializzata se $\det |a_{ik}| \neq 0$, specializzata in caso contrario, e denomineremo rango della quadrica il rango della relativa matrice $\|a_{ik}\|$.

(6) Cfr. B. SEGRE [10], [11].

(7) Cfr. B. SEGRE [12].

(8) Risultati in quest'ordine di idee, relativi solamente al caso di un $S_{3,q}$, sono stati poi trovati da A. BARLOTTI [1] e G. PANELLA [4].

(9) La teoria delle quadriche in un $S_{n,q}$ si trova sotto l'aspetto algebrico in L. E. DICKSON [3], cap. VII, cap. VIII. Cfr. anche B. SEGRE [8].

In ogni caso, se $m + 1$ è il rango della quadrica (1) (con $0 \leq m \leq n$), è sempre possibile⁽¹⁰⁾ effettuare un cambiamento di coordinate in modo che la (1) si riduca alla forma:

$$a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_m x_m^2 = 0, \quad (\text{con } a_0 a_1 \cdots a_m \neq 0).$$

È noto⁽¹¹⁾ poi che si può sempre effettuare in $S_{n,q}$ un ulteriore cambiamento di coordinate in modo da ridurre la precedente equazione nella forma:

$$(2) \quad x_0^2 + x_1^2 + \cdots + \mu x_m^2 = 0,$$

dove $\mu = 1$ per m pari, e $\mu = 1$ o è un particolare elemento di γ - non quadrato in γ - per m dispari.

Si ha dunque che:

Ogni quadrica (1) di rango $m + 1$ (con $0 \leq m \leq n$, e $m = n$ se e solo se la quadrica è non specializzata) si può sempre ridurre alla forma canonica (2), mediante un opportuno cambiamento di coordinate in $S_{n,q}$.

Dalla proposizione precedente e da quanto è detto in E. J. F. Prime-rose [5], si deducono senz'altro le seguenti proprietà.

In un $S_{2r,q}$ tutte le quadriche non specializzate sono proiettivamente equivalenti tra loro, ammettono come spazi massimi degli S_{r-1} e sono costi-

tuite da $Q_{2r-1} = \sum_{l=0}^{2r-1} q^l$ punti.

In un $S_{2r+1,q}$ le quadriche non specializzate sono di due tipi distinti, quelle di uno stesso tipo essendo proiettivamente equivalenti tra loro. E precisamente:

Quadriche che posseggono $Q_{2r} - q^r$ punti, che saranno dette di *tipo ellittico*. Esse posseggono come spazi massimi degli S_{r-1} .

Quadriche che posseggono $Q_{2r} + q^r$ punti, che saranno dette di *tipo iperbolico*. Esse posseggono come spazi massimi degli S_r .

Un iperpiano tangente le interseca in un cono con vertice nel punto di contatto, e questo cono, da un S_{2r-1} contenuto nell'iperpiano tangente e non passante per il vertice, vien segato in una quadrica dello stesso tipo.

In un $S_{n,q}$ ogni quadrica specializzata di rango $m + 1$ è un cono quadrico, proiettante da un S_{n-m-1} una quadrica non specializzata di un S_m sghembo con l' S_{n-m-1} vertice.

I coni quadrici, aventi come spazio vertice un $S_{2\delta-n+1}$ ($(n-1)/2 \leq \delta \leq n-1$), con δ fissato, sono tutti equivalenti proiettivamente tra loro, posseggono Q_{n-1} punti e hanno come spazi massimi degli S_δ .

I coni quadrici aventi come spazio vertice un $S_{2\delta-n}$ ($n/2 \leq \delta \leq n-1$), con δ fissato, sono di due tipi proiettivamente distinti, a seconda che un $S_{2(n-\delta)-1}$, sghembo con l' $S_{2\delta-n}$ vertice, l'intersechi in una quadrica di tipo ellittico o di tipo iperbolico. Essi saranno detti rispettivamente *coni di tipo ellittico* e *coni di tipo iperbolico*. I coni di tipo ellittico posseggono $Q_{n-1} - q^\delta$

(10) Cfr. ad esempio B. SEGRE [7], n. 147.

(11) Cfr. L. E. DICKSON [3], n. 169.

punti ed hanno come spazi massimi degli $S_{\delta-1}$. I coni di tipo iperbolico posseggono $Q_{n-1} + q^\delta$ punti e hanno come spazi massimi degli S_δ .

3. In un $S_{n,q}$, con $n \geq 2$ e $p = 2$, una quadrica (conica se $n = 2$) è - per definizione - il luogo dei punti le cui coordinate proiettive omogenee soddisfano ad un'equazione del tipo:

$$(3) \quad \sum_{i=0}^n a_i x_i^2 + \sum_{i < k}^{0,n} a_{ik} x_i x_k = 0,$$

dove le a_i, a_{ik} sono elementi del corpo γ su cui è costruito $S_{n,q}$.

Se le a_{ik} sono tutte nulle, la (3) si riduce alla

$$\sum_{i=0}^n a_i x_i^2 = 0,$$

ossia alla

$$\left(\sum_{i=0}^n \sqrt{a_i} x_i \right)^2 = 0,$$

essendo le $\sqrt{a_i}$ elementi di $\gamma^{(12)}$. In questo caso dunque la (3) rappresenta l'iperpiano di $S_{n,q}$ di equazione $\sum_{i=0}^n \sqrt{a_i} x_i = 0$.

Escluso questo caso, alla quadrica (3) rimane sempre associata la polarità nulla di matrice $\|a_{ik}\|$, dove si è posto $a_{ik} = -a_{ki} = a_{ki}$ per $i \neq k$ e $a_{ii} = 0$, ($i, k = 0, 1, \dots, n$). La matrice $\|a_{ik}\|$ ha sempre rango pari $2m^{(13)}$ (con $0 < 2m \leq n+1$), quindi lo spazio singolare della polarità nulla sarà un S_{n-2m} .

In ogni caso la suddetta polarità nulla ha un significato geometrico ben determinato in relazione alla quadrica (3). Precisamente, chiamando tangente alla quadrica una retta che la incontra in due punti coincidenti, si ha che:

Il complesso lineare di rette determinato dalla polarità nulla, coincide con l'insieme delle rette tangenti od appartenenti alla quadrica. Ne discende che le rette tangenti o eventualmente appartenenti alla quadrica uscenti da un punto y di $S_{n,q}$ riempiono un iperpiano di $S_{n,q}$, che allora è l'iperpiano polare di y rispetto alla polarità nulla, oppure invadono tutto l' $S_{n,q}$, nel quale caso l'iperpiano polare della polarità nulla è indeterminato ed il punto y appartiene al suo spazio singolare.

La dimostrazione di questa proprietà si effettua facilmente nel modo seguente: siano x e y due punti distinti, e d'altronde qualunque, di $S_{n,q}$; un punto della retta che li congiunge avrà coordinate $\lambda x_i + \mu y_i$. Sostituendo queste coordinate nella (3) si ottiene l'equazione di secondo grado in μ/λ :

$$\begin{aligned} \lambda^2 \left[\sum_{i=0}^n a_i x_i^2 + \sum_{i < k}^{0,n} a_{ik} x_i x_k \right] + \mu^2 \left[\sum_{i=0}^n a_i y_i^2 + \sum_{i < k}^{0,n} a_{ik} y_i y_k \right] + \\ + \lambda \mu \left[\sum_{i < k}^{0,n} a_{ik} x_i y_k + \sum_{i < k}^{0,n} a_{ik} x_k y_i \right] = 0 \end{aligned}$$

le cui radici - sostituite nell'espressioni delle coordinate stesse - danno i punti d'incontro della retta xy con la quadrica (3).

(12) Cfr. B. SEGREG [7], p. 74.

(13) Cfr. B. SEGREG [7], p. 162.

Tre casi sono possibili per l'equazione precedente: o i suoi coefficienti sono tutti nulli, nel qual caso essa è indeterminata e tutta la retta xy appartiene alla quadrica; o il coefficiente di $\lambda\mu$ è non nullo, nel qual caso essa ammette due radici distinte in γ o in una estensione di γ ⁽¹⁴⁾ ed allora la retta xy è rispettivamente secante (in due punti distinti) o esterna alla quadrica; o il coefficiente di $\lambda\mu$ è nullo, senza che siano nulli gli altri coefficienti, nel qual caso l'equazione ammette due radici coincidenti in γ ⁽¹⁵⁾ e la retta xy risulta tangente alla quadrica in un punto.

Fissato ora comunque y in $S_{n,q}$, tutte e sole le rette yx tangenti o appartenenti alla quadrica sono quelle per cui

$$\sum_{i < k}^{0, n} a_{ik} x_i y_k + \sum_{i < k}^{0, n} a_{ik} x_k y_i = 0.$$

Posto $a_{ik} = a_{ki}$, $a_{ii} = 0$ ($i, k = 0, 1, \dots, n$), la precedente relazione si scrive:

$$\sum_{i, k=0}^n a_{ik} x_i y_k = 0.$$

Questa equazione, se non è indeterminata, rappresenta l'iperpiano polare di y rispetto alla polarità nulla, onde l'asserto.

Diremo che la quadrica (3) è *non specializzata* se, essendo n dispari, la matrice $\|a_{ik}\|$ ha rango massimo $n+1$; ed anche se, essendo n pari, la matrice $\|a_{ik}\|$ ha rango massimo n e l' S_0 singolare della polarità nulla non appartiene alla quadrica. In ogni altro caso diremo che essa è *specializzata*.

Per le quadriche non specializzate si ha la proposizione seguente ⁽¹⁶⁾.

Se la quadrica (3) è non specializzata, si può sempre scegliere in $S_{n,q}$ un riferimento proiettivo per il quale l'equazione della quadrica assuma la forma canonica.

$$(4) \quad x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} + x_n^2 = 0 \quad (\text{se } n \text{ è pari}),$$

$$(5) \quad x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + \lambda (x_{n-1}^2 + x_n^2) = 0 \quad (\text{se } n \text{ è dispari}),$$

dove λ è zero o è un qualunque fissato dei valori λ' per cui la forma $Q \equiv x_{n-1} x_n + \lambda' (x_{n-1}^2 + x_n^2)$ sia irriducibile in γ .

Supponiamo ora che la quadrica (3) sia specializzata, la polarità nulla ad essa associata avrà equazione:

$$u_i = \sum_{k=0}^n a_{ik} x_k, \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Sia $2m$ ($0 < m \leq n$) il rango della matrice $\|a_{ik}\|$, onde lo spazio singolare della polarità nulla è un S_{n-2m} . Sceltolo come spazio fondamentale delle coordinate di equazioni $x_0 = x_1 = \dots = x_{2m-1} = 0$, e conservando per semplicità le notazioni usate finora, l'equazioni della polarità nulla dovranno ridursi alla forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = \sum_{k=0}^{2m-1} a_{ik} x_k, \quad \text{con } \det |a_{ik}| \neq 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 2m-1), \\ u_j = 0, \quad (j = 2m, \dots, n), \end{array} \right.$$

(14) Cfr. B. SEGRE [7], p. 75.

(15) Cfr. B. SEGRE [7], p. 75.

(16) Cfr. L. E. DICKSON [3], n. 199.

onde la (3) si ridurrà alla

$$(3') \quad \sum_{i=0}^n a_i x_i^2 + \sum_{i < k}^{0, 2m-1} a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \text{con} \quad \det |a_{ik}| \neq 0.$$

La (3') è intersecata dall' S_{n-2m} fondamentale di equazioni $x_0 = x_1 = \dots = x_{2m-1} = 0$ nella

$$\sum_{i=2m}^n a_i x_i^2 = 0,$$

ossia:

$$\left(\sum_{i=2m}^n \sqrt{a_i} x_i \right)^2 = 0,$$

dove le $\sqrt{a_i}$ sono elementi di γ .

Due casi sono ora possibili: o la precedente equazione è identicamente soddisfatta, oppure no. Nel primo caso la (3') si riduce ulteriormente alla forma

$$(3'') \quad \sum_{i=0}^{2m-1} a_i x_i^2 + \sum_{i < k}^{0, 2m-1} a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \text{con} \quad \det |a_{ik}| \neq 0,$$

che rappresenta un cono (quadrico) avente come vertice l' S_{n-2m} fondamentale $x_0 = x_1 = \dots = x_{2m-1} = 0$ e proiettante da esso la quadrica non specializzata dell' S_{2m-1} fondamentale $x_{2m} = \dots = x_n = 0$, di equazione (3''). Per quanto è detto precedentemente circa la riduzione a forma canonica delle quadriche non specializzate, si potrà sempre scegliere il riferimento proiettivo nell' S_{2m-1} in modo da ridurre la (3'') alla forma canonica:

$$(6) \quad x_0 x_1 + x_2 x_3 + \dots + x_{2m-2} x_{2m-1} + \lambda (x_{2m-2}^2 + x_{2m-1}^2) = 0,$$

dove λ è zero o è uno particolare dei valori λ' per cui la forma $Q \equiv x_{2m-2} x_{2m-1} + \lambda' (x_{2m-2}^2 + x_{2m-1}^2)$ risulti irriducibile in γ . Nel secondo caso l'equazione $\sum_{i=2m}^n \sqrt{a_i} x_i = 0$ rappresenta nell' S_{n-2m} $x_0 = x_1 = \dots = x_{2m-1} = 0$ un iperpiano, che può essere sempre scelto come iperpiano $x_{2m} = 0$. Dopodiché la (3') riducesi ulteriormente alla forma

$$(3''') \quad \sum_{i=0}^{2m} a_i x_i^2 + \sum_{i < k}^{0, 2m-1} a_{ik} x_i x_k = 0, \quad \det |a_{ik}| \neq 0,$$

che rappresenta un cono (quadrico) proiettante dall' S_{n-2m-1} fondamentale $x_0 = x_1 = \dots = x_{2m} = 0$, la quadrica non specializzata dell' S_{2m} $x_{2m+1} = \dots = x_n = 0$, di equazione (3'''). Anche in questo caso, scegliendo opportunamente nell' S_{2m} fondamentale $x_{2m+1} = \dots = x_n = 0$ il riferimento proiettivo, si può ridurre la (3''') alla forma canonica:

$$(7) \quad x_0 x_1 + \dots + x_{2m-2} x_{2m-1} + x_{2m}^2 = 0.$$

Si conclude con la proposizione seguente.

Comunque si consideri una quadrica specializzata di $S_{n,q}$, detto S_{n-2m} lo spazio singolare della polarità nulla ad essa associata, due casi sono possibili: o l' S_{n-2m} è completamente contenuto nella quadrica, oppure la interseca in un S_{n-2m-1} . Nel primo caso la quadrica risulta un cono (quadrico), avente come spazio vertice quell' S_{n-2m} e proiettante da esso una quadrica non specializzata di un S_{2m-1} sghembo con l' S_{n-2m} ; inoltre la sua equazione può ridursi, con un opportuno cambiamento del riferimento in $S_{n,q}$, alla forma canonica (6). Nel secondo caso la quadrica risulta un cono (quadrico), avente come spazio vertice il suddetto S_{n-2m-1} e proiettante da esso una quadrica non specia-

lizzata di un S_{2m} sghembo con l' S_{n-2m-1} ; inoltre la sua equazione può ridursi alla forma canonica (7).

Dalle due proposizioni precedenti e da quanto è detto in E. J. F. PRIMROSE [5], circa il numero di punti situati su una quadrica, si deducono facilmente proprietà riguardanti l'equivalenza proiettiva delle quadriche, gli spazi massimi in esse contenute e il numero di punti di cui esse sono costituite, analoghe a quelle enunciate al n. 2 per le quadriche di uno spazio costruito su un corpo di caratteristica $\neq 2$.

Notiamo ora talune proprietà notevoli delle quadriche non specializzate, che si deducono direttamente dalle forme canoniche (4) e (5). In ogni S_{2r} , ad una quadrica non specializzata rimane associato un punto, C: l' S_0 singolare a cui si riduce lo spazio singolare della relativa polarità nulla. Esso risulta il centro ⁽¹⁷⁾ del complesso lineare delle rette tangenti alla quadrica: lo chiameremo perciò il *centro* della quadrica.

Il punto C gode della seguente proprietà: fissato comunque un punto y di S_{2r} , distinto da C, si consideri la retta Cy ; essa incontrerà la quadrica in un punto x , eventualmente coincidente con y . L'iperpiano tangente in x alla quadrica coincide allora con l'iperpiano polare di y rispetto alla polarità nulla e interseca la quadrica in un cono quadrico con vertice in x .

In S_{2r+1} , si consideri una quadrica non specializzata, comunque si scelga un punto x non appartenente alla quadrica, l'iperpiano polare di x rispetto alla polarità nulla associata alla quadrica interseca quest'ultima in una quadrica non specializzata con centro in x .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. BARLOTTI, *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, « Boll. U.M.I. » (3), 10, 498-506 (1955).
- [2] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ed. (Messina, Principato, 1923).
- [3] L. E. DICKSON, *Linear groups, with an exposition of the Galois field theory* (Leipzig, Teubner, 1901).
- [4] G. PANELLA, *Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito*. « Boll. U.M.I. » (3), 10, 507-513 (1955).
- [5] E. J. F. PRIMROSE, *Quadrics in finite geometries*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », 47, 299-304 (1951).
- [6] B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*. « Ann. Acad. Sci. Fennicae » (A, I), 134 (1952).
- [7] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948).
- [8] B. SEGRE, *Problèmes arithmétiques en géométrie algébrique*, Colloque de Géométrie algébrique (Liège, CBRM, 1949), pp. 123-142.
- [9] B. SEGRE, *Arithmetical questions on algebraic varieties* (London, The Athlone Press, 1951).
- [10] B. SEGRE, *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 17, 141-142 (1954).
- [11] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, « Canadien Jour. of Math. », 7, 414-416 (1955).
- [12] B. SEGRE, *Curve razionali normali e k -archi negli spazi finiti*, « Ann. di Mat. » (4), 39, 357-379 (1955).

(17) Cfr. E. BERTINI [2], p. 124.

Geometria. — *Sulle relazioni a tre termini fra le coordinate di Grassmann.* Nota II di LUCILLA BASSOTTI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Questa Nota è dedicata alla dimostrazione dei teoremi contenuti nella Nota I (**), alla quale rimandiamo per gli enunciati e per le notazioni. Essa consta dei nn. 5, 6, 7 che si riferiscono ordinatamente ai nn. 2, 3, 4 della prima.

5. Per dimostrare il teorema I. 2, procediamo alla risoluzione del sistema $(2_{n,2})$ tenendo conto della condizione $(3_{n,2})$. Sostituendo il secondo gruppo di relazioni $(2_{n,2})$ nel primo, avuto riguardo alla $(3_{n,2})$, si ottiene facilmente il sistema

$$(4_{n,2}) \quad \begin{cases} p^{a_i b_j b_l} = 0 \\ p^{a_i b_j d_r} = 0 \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, 2; r = 1, \dots, n-5),$$

che ci permette intanto di affermare che, se una $p^{b_0 b_1 b_2}$ non è determinata dalle relazioni a tre termini rispetto a $p^{a_0 a_1 a_2}$, anche la $p^{a_0 a_1 a_2}$ non è parimente determinata rispetto a $p^{b_0 b_1 b_2}$.

Le $(4_{n,2})$, sostituite nelle relazioni $(2_{n,2})$, conducono al sistema

$$(5_{n,2}) \quad \begin{cases} p^{a_i a_j d_r} \cdot p^{b_l b_m d_r} = 0 \\ p^{a_i a_j d_r} \cdot p^{b_l d_r d_s} = 0 \\ p^{b_l b_j d_r} \cdot p^{a_l d_r d_s} = 0 \end{cases} \quad (i, j, l, m = 0, 1, 2; r, s = 1, \dots, n-5).$$

Per lo studio delle varie alternative poste dal primo gruppo di relazioni $(5_{n,2})$, fissiamo un intero h ($0 \leq h \leq n-5$) e indichiamo con r, s, t, \dots , indici variabili fra 1 e h , con R, S, T, \dots indici variabili fra $h+1$ e n , con ρ, σ, \dots indici variabili fra 1 e $n-5$, convenendo che, qualora $h=0$, restino soltanto gli indici R, S, T, \dots , variabili fra 1 e $n-5$. In corrispondenza ad ogni h , consideriamo il caso in cui risultino

$$(6_{n,2,h}) \quad p^{a_i a_j d_r} = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2; r = 1, \dots, h),$$

e, per ogni valore di R , esista almeno una coppia di indici i e j per cui

$$(7_{n,2,h}) \quad p^{a_i a_j d_R} \neq 0.$$

Dal sistema $(5_{n,2})$ si ottiene allora, in base alle $(7_{n,2,h})$, che

$$(8_{n,2,h}) \quad p^{b_l b_m d_R} = 0 \quad (l, m = 0, 1, 2; R = h+1, \dots, n-5);$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(**) Pubblicata alle pp. 200-204 di questo volume dei « Rendiconti ».

sostituendo queste e le $(6_{n,2,h})$ nelle relazioni $(2_{n,2})$, si ottiene il sistema

$$(9_{n,2,h}) \quad \begin{cases} p^{a_i d_r d_q} = 0 \\ p^{b_i d_r d_q} = 0 \end{cases}$$

$$(i=0, 1, 2; r=1, \dots, h; R=h+1, \dots, n-5; \rho=1, \dots, n-5),$$

il quale, sempre in base alle $(2_{n,2})$, conduce alla uguaglianze

$$\begin{cases} p^{a_i a_j d_R} p^{d_R d_r d_s} = 0 \\ p^{b_i b_j d_R} p^{d_R d_r d_s} = 0 \end{cases} \quad (i, j=0, 1, 2; r, s=1, \dots, h; R, S=h+1, \dots, n-5).$$

Dalle prime di queste, in forza delle $(7_{n,2,h})$, discendono le relazioni

$$(10_{n,2,h}) \quad p^{d_r d_r d_s} = 0 \quad (r, s=1, \dots, h; R=h+1, \dots, n-5),$$

mentre dalle ultime si traggono le relazioni consimili

$$(11_{n,2,h}) \quad p^{d_r d_R d_s} = 0 \quad (r=1, \dots, h; R, S=h+1, \dots, n-5),$$

qualora si faccia l'ipotesi, analoga alla $(7_{n,2,h})$, che per ogni valore di r , esista una coppia di indici i e j per cui

$$(12_{n,2,h}) \quad p^{b_i b_j d_r} \neq 0.$$

Riassumendo i risultati fin qui ottenuti, possiamo affermare che, in tali ipotesi, le p^{\dots} non nulle possono suddividersi in due insiemi

$$\{\ell_1^{(h)}\} = (p^{a_0 a_1 a_2}, p^{a_i a_j d_R}, p^{a_i d_R d_S}, p^{d_R d_S d_T}),$$

$$\{\ell_2^{(h)}\} = (p^{b_0 b_1 b_2}, p^{b_i b_j d_r}, p^{b_i d_r d_s}, p^{d_r d_s d_t}),$$

tali che le p^{\dots} di un insieme siano relative a indici $a_0, a_1, a_2, d_{h+1}, \dots, d_{n-5}$, tutti diversi dagli indici $b_0, b_1, b_2, d_1, \dots, d_h$ delle p^{\dots} dell'altro.

Resta ancora da esaminare il caso in cui non siano soddisfatte le $(12_{n,2,h})$, cioè il caso in cui, per qualche valore di r , si abbia

$$(13_{n,2,h}) \quad p^{b_i b_j d_r} = 0 \quad (i, j=0, 1, 2).$$

Denotiamo con r', s', t', \dots , quei particolari indici, variabili fra 1 e h , per cui valgono le $(13_{n,2,h})$; sostituendo le $(13_{n,2,h})$ nelle $(2_{n,2})$, e tenendo presente la $(3_{n,2})$, si ottengono le

$$p^{b_i d_{r'} d_q} = 0,$$

per ogni valore degli indici; sostituendo invece le $(10_{n,2,h})$ nelle $(2_{n,2})$, si perviene al sistema formato da tutte le relazioni

$$p^{d_{r'} d_R d_S} \cdot p^{d_{r'} d_r d_s} = 0.$$

Se allora ciascuna delle $p^{d_r d_R d_S}$ è nulla, è ancora possibile distinguere le p^{\dots} non nulle in due insiemi contenuti rispettivamente in $\{e_1^{(h)}\}$ e $\{e_2^{(h)}\}$. Supponiamo che ciò non accada, onde per qualche valore di r' esisterà una coppia di indici R, S per cui

$$(14_{n,2,h}) \quad p^{d_{r'} d_R d_S} \neq 0;$$

poiché in corrispondenza agli stessi indici r' valgono le

$$p^{d_{r'} d_r d_s} = 0,$$

è ancora possibile distinguere le p^{\dots} non nulle in due insiemi, contenuti rispettivamente in $\{e_1^{(l)}\}$ e $\{e_2^{(l)}\}$ ove $l < h$, pur di includere fra gli indici che abbiamo denotato con R , gli indici r' per cui si verifichino le $(14_{n,2,h})$.

Esaurite allora tutte le alternative possibili, al sistema $(2_{n,2})$ e alla condizione $(3_{n,2})$ può sostituirsi lo studio delle relazioni a tre termini fra le p^{\dots} appartenenti agli insiemi $\{e_1^{(h)}\}$ e $\{e_2^{(h)}\}$, essendo tutte le altre uguali a zero. Consideriamo perciò la varietà $F^*(n-h-3, 2)$ sezione della $F(n, 2)$ con lo spazio ottenuto annullando le coordinate che non appartengono a $\{e_1^{(h)}\}$, e la varietà $F^*(h+2, 2)$ sezione della $F(n, 2)$ con lo spazio ottenuto annullando le coordinate che non appartengono a $\{e_2^{(h)}\}$: poiché non intercedono relazioni a tre termini fra le p^{\dots} dei due insiemi, possiamo affermare che le relazioni quadratiche a tre termini fra le p^{\dots} di $\{e_1^{(h)}\}$ e $\{e_2^{(h)}\}$ rappresentano, nel sottospazio di S_N ottenuto annullando le p^{\dots} rimanenti, la varietà $K^{(h)}$ generata dalle rette che si appoggiano alle due varietà $F^*(n-h-3, 2)$ e $F^*(h+2, 2)$ ⁽⁸⁾, il che appunto dimostra il teorema.

Per dimostrare il teorema II. 2, procediamo per induzione completa rispetto a n . All'uopo osserviamo anzitutto che il teorema, ovvio per $n=3$ e $n=4$, è vero per $n=5$, in quanto, a norma del teorema I. 2, la $F(5, 2)$ ammette come componenti irriducibili la $G(5, 2)$ e le rette fondamentali $A_{i_0 i_1 i_2} A_{i_3 i_4 i_5} (i_0, \dots, i_5)$ essendo una permutazione dei numeri $0, \dots, 5$. Supponiamo allora $n > 5$ e rileviamo che, sempre in base al teorema I. 2, la $F(n, 2)$ ammette come componenti irriducibili la $G(n, 2)$ - che è una particolare W_τ - e le varietà generate dalle rette che si appoggiano alle componenti irriducibili delle coppie di varietà $F^*(h+2, 2)$ e $F^*(n-h-3, 2)$.

Per l'induzione ammessa, le componenti di una $F^*(h+2, 2)$ sono varietà $W_{\tau'}$, corrispondenti a partizioni τ' di $h+3$ indici $b_0, b_1, b_2, d_1, \dots, d_h$ in m' insiemi $I'_1, \dots, I'_{m'}$, mentre le componenti della $F^*(n-h-3, 2)$ corrispondente sono $W_{\tau''}$, relative a partizioni τ'' degli $n-h-2$ indici rimanenti $a_0, a_1, a_2, d_{h+1}, \dots, d_{n-5}$ in m'' insiemi $I''_1, \dots, I''_{m''}$.

Le componenti irriducibili di $F(n, 2)$ distinte da $G(n, 2)$, essendo generate dalle rette che si appoggiano ad una $W_{\tau'}$ e ad una $W_{\tau''}$, sono allora evidentemente varietà W_τ relative a partizioni τ degli indici $0, \dots, n$ negli $m' + m''$ insiemi $I'_1, \dots, I'_{m'}, I''_1, \dots, I''_{m''}$: il teorema è così provato.

(8) Notiamo che le varietà $F^*(n-h-3, 2)$ e $F^*(h+2, 2)$ sono senz'altro determinate, non appena sia fissata la disposizione di indici (2) e l'intero h .

La dimensione di una componente W_τ di $F(n, 2)$ si calcola immediatamente (teor. III. 2), osservando che gli spazi di appartenenza delle $G_\tau(h_1, 2), \dots, G_\tau(h_m, 2)$ definenti una W_τ sono fra loro indipendenti. Il teorema è ovvio per $m = 1 - W_\tau$ riducendosi in tal caso a $G(n, 2)$ - e quindi potremo supporre $m > 1$. Una varietà W_τ è allora costituita dalla totalità, ∞^s , degli S_{m-1} che si appoggiano in un punto a ciascuna delle $G_\tau(h_1, 2), \dots, G_\tau(h_m, 2)$, dove s è uguale alla somma delle dimensioni delle suddette grassmanniane: ne segue che la dimensione di W_τ è espressa dal numero

$$s + m - 1 = 3(h_1 - 2) + 3(h_2 - 2) + \dots + 3(h_m - 2) + m - 1 = 3n - 8m + 2,$$

$$\text{essendo } \sum_{t=1}^m h_t = n - m + 1.$$

Per determinare l'ordine di una componente W_τ di $F(n, 2)$ e stabilire quindi il teorema IV. 2, potremo ancora supporre $m > 1$, il che porta soltanto ad escludere la componente $G(n, 2)$ per la quale il teorema è ovvio. Sia allora W_τ generata dagli S_{m-1} che si appoggiano in un punto a ciascuna $G_\tau(h_1, 2), \dots, G_\tau(h_m, 2)$: denotiamo, per semplicità, con d_t la dimensione, con r_t l'ordine e con $S_{N_t}^{(t)}$ lo spazio di appartenenza relativi a $G_\tau(h_t, 2)$ ($t = 1, \dots, m$).

In ogni spazio $S_{N_t}^{(t)}$, consideriamo uno spazio $S_{N_t-d_t}$ generico, nel senso che incontri $G_\tau(h_t, 2)$ in r_t punti distinti; gli spazi $S_{N_1-d_1}, \dots, S_{N_m-d_m}$, essendo fra loro linearmente indipendenti (in quanto tali sono gli spazi $S_{N_1}^{(1)}, \dots, S_{N_m}^{(m)}$), sono congiunti da uno spazio \bar{S} di dimensione $N_1 + \dots + N_m - d_1 - \dots - d_m + m - 1$, il quale, per costruzione, ha in comune con $W_\tau, r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_m S_{m-1}$ distinti. Basta allora segare W_τ con un sottospazio generico di \bar{S} , avente dimensione $N_1 + \dots + N_m - d_1 - \dots - d_m$, per ottenere quanto asserito nel teorema.

6. Le omografie di S_N che mutano in sé $F(n, 2)$ - delle quali vogliamo ora occuparci allo scopo di stabilire il teorema I. 3 - costituiscono, in base a quanto abbiamo osservato sulle componenti di $F(n, 2)$, un sottogruppo Ψ del gruppo delle omografie che lasciano invariata $G(n, 2)$. Le omografie di tale sottogruppo debbono necessariamente trasformare in sé il simpleso fondamentale di S_N , ogni vertice del quale è, a norma del teorema II. 2, vertice di un cono il quale risulta componente di $F(n, 2)$.

Una omografia di S_N che trasformi in sé $F(n, 2)$ e il simpleso di riferimento, è immagine (cfr. ad esempio [6], pp. 310-311⁽⁹⁾) di una omografia di un S_n che lascia fisso il sistema dei piani fondamentali e quindi il simpleso di riferimento dell' S_n .

Consideriamo allora una omografia di S_n che ai punti fondamentali per le coordinate A^0, A^1, \dots, A^n , faccia corrispondere ordinatamente i punti A^0, A^1, \dots, A^n , avente pertanto equazioni

$$(5) \quad \rho y_k = \rho_k x_{i_k} \quad (\rho \cdot \rho_0 \cdot \dots \cdot \rho_n \neq 0; k = 0, 1, \dots, n).$$

(9) I numeri fra [] rinviano alla bibliografia posta alla fine della Nota I.

L'immagine di tale omografia, nell' S_N , l'omografia di equazioni,

$$(6) \quad \rho q^{klj} = \rho_k \rho_l \rho_j p^{i_k i_l i_j} \quad (k, l, j = 0, 1, \dots, n).$$

la quale lascia fissa $F(n, 2)$, mutando manifestamente in sé il sistema delle relazioni a tre termini.

In corrispondenza al sistema continuo ∞^n delle omografie di S_n che operano la fissata sostituzione sui punti fondamentali, si ha un sistema continuo ∞^n di omografie di S_N , le quali operano una medesima sostituzione sui punti fondamentali dell' S_N ; si ottengono così $(n+1)!$ sistemi continui, relativi alle diverse permutazioni degli indici $0, \dots, n$.

Le considerazioni svolte permettono di calcolare agevolmente il numero delle componenti di $F(n, 2)$ e quindi provare il teorema II. 3. Prendiamo infatti in esame il sottogruppo Φ_h di Ψ costituito dalle omografie che mutano in sé una varietà $K^{(h)}$. Se $h+2 \neq n-h-3$, cioè $h \neq n-5/2$, tale sottogruppo è costituito da tutte e sole le omografie che mutano in sé le varietà $F^*(h+2, 2)$ e $F^*(n-h-3, 2)$ definenti $K^{(h)}$; se invece $h+2 = n-h-3$, e ciò si verifica se $h = n-5/2$, esso è costituito, oltre che dalle omografie precedenti, anche dalle omografie che mutano le varietà $F^*(h+2, 2)$ e $F^*(n-h-3, 2)$ l'una nell'altra. Nel primo caso l'indice del sottogruppo Φ_h in Ψ è $\binom{n+1}{h+3}$, nell'altro è $\frac{1}{2} \binom{n+1}{h+3}$.

Osserviamo ora che le varietà $K^{(h)}$ e $K^{(n-5-h)}$ sono fra loro omograficamente equivalenti, ed inoltre che, se v_n denota il numero delle componenti irriducibili di $F(n, 2)$, il numero delle componenti irriducibili di $K^{(h)}$ è $v_{h+2} \cdot v_{n-h-3}$. Pertanto il numero, $v_n - 1$, delle componenti irriducibili di $F(n, 2)$, distinte da $G(n, 2)$, è dato da

$$\frac{1}{2} \sum_{h=0}^{n-5} \binom{n+1}{h+3} v_{h+2} \cdot v_{n-h-3},$$

ciò che prova l'asserto.

7. Studiamo ora la varietà $F(7, 3)$ allo scopo di determinarne le componenti irriducibili, dimostrando così il teorema I. 4. Abbiamo già osservato che tale determinazione è legata alla risoluzione di due sistemi distinti, che si ottengono in corrispondenza ai valori 0 e 1 dell'indice r (cfr. n. 1 e n. 4).

Cominciamo dal caso $r = 1$ e, riferendoci alla suddivisione degli indici (4), consideriamo il sistema

$$(2_{7,3}) \quad \begin{cases} P(i_2 i_3; i_0 i_1 j_0 j_1) = 0 \\ p^{c_1 a_i b_j d_l} = 0 \end{cases} \quad (i, j, l = 0, 1, 2)$$

sotto la condizione

$$(3_{7,3}) \quad p^{c_1 a_0 a_1 a_2} \cdot p^{c_1 b_0 b_1 b_2} \neq 0.$$

Sostituendo i valori dati dal secondo gruppo di relazioni $(2_{7,3})$ nel primo e tenendo presente la $(3_{7,3})$ si perviene facilmente al sistema

$$(4_{7,3}) \quad \begin{cases} p^{c_1 a_i a_j b_l} = 0 \\ p^{c_1 a_i b_j d_1} = 0 \\ p^{a_i a_j b_l b_m} = 0 \end{cases} \quad (i, j, l, m = 0, 1, 2),$$

in base al quale, dalle $(2_{7,3})$ seguono le relazioni

$$p^{a_0 a_1 a_2 b_i} \cdot p^{b_0 b_1 b_2 a_j} = 0.$$

Per la simmetria con cui intervengono gli indici a e b , non è restrittivo supporre

$$(5_{7,3}) \quad p^{a_0 a_1 a_2 b_j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2);$$

sostituendo i valori dati dalle ultime relazioni e dalle $(4_{7,3})$ in $(2_{7,3})$ si hanno le

$$(7_{7,3}) \quad \begin{cases} p^{a_0 a_1 a_2 d_1} \cdot p^{b_i b_j a_l d_1} = 0 \\ p^{c_1 a_i a_j d_1} \cdot p^{c_1 b_i b_j d_1} = 0. \end{cases}$$

Qualora le

$$(8_{7,3}) \quad p^{c_1 a_i a_j d_1} \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

non siano tutte nulle, dalle $(7_{7,3})$ seguono in modo immediato le

$$(9_{7,3}) \quad p^{c_1 b_i b_j d_1} = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2),$$

sicché le $(2_{7,3})$ forniscono le uguaglianze

$$(10_{7,3}) \quad p^{b_i b_j a_l d_1} = 0,$$

le quali, insieme alle $(9_{7,3})$ rendono identicamente soddisfatto il sistema $(7_{7,3})$

In base a quanto precede, le $p \dots$ non nulle sono tali che fra esse non intercedono relazioni a tre termini: possiamo allora concludere che lo spazio fondamentale congiungente i punti

$$A^{c_1 a_0 a_1 a_2} A^{a_0 a_1 a_2 d_1} A^{c_1 a_i a_j d_1} A^{b_0 b_1 b_2 a_j} A^{c_1 b_0 b_1 b_2} A^{b_0 b_1 b_2 d_1} \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

appartiene a $F(7, 3)$.

Se invece supponiamo tutte le $(8_{7,3})$ nulle, il primo gruppo di relazioni $(7_{7,3})$ pone due alternative, secondo che

$$(11_{7,3}) \quad p^{a_0 a_1 a_2 d_1} = 0,$$

oppure

$$(12_{7,3}) \quad p^{b_i b_j a_l d_1} = 0 \quad (i, j, l = 0, 1, 2).$$

Nel caso in cui valga la $(11_{7,3})$, le p^{\dots} non nulle si riducono alle

$$p^{c_1 a_0 a_1 a_2} p^{b_0 b_1 b_2 d_1} p^{c_1 b_0 b_1 b_2} p^{c_1 b_i b_j d_1} p^{b_0 b_1 b_2 a_i} p^{b_i b_j a_l d_1} \quad (i, j, l = 0, 1, 2).$$

Osserviamo allora che non possono esistere relazioni a tre termini fra $p^{c_1 a_0 a_1 a_2}$ e le rimanenti, ed inoltre che queste ultime differiscono tutte per un indice da $p^{b_0 b_1 b_2 d_1}$. Possiamo allora affermare che il cono che dal punto fondamentale $A^{c_1 a_0 a_1 a_2}$ proietta la sezione della $G(7, 3)$ con lo spazio ad essa tangente nel punto $A^{b_0 b_1 b_2 d_1}$, appartiene a $F(7, 3)$.

Rimane ancora da esaminare il caso in cui valgano le $(12_{7,3})$. Sostituendo nelle $(2_{7,3})$, si ottengono le relazioni

$$(13_{7,3}) \quad p^{b_0 b_1 b_2 a_i} p^{c_1 b_i b_j d_1} = 0,$$

onde consegue che, se le $p^{c_1 b_i b_j d_1}$ sono tutte nulle, si cade in un caso già esaminato; altrimenti, sono necessariamente nulle tutte le $p^{b_0 b_1 b_2 a_i}$ e si verifica che ci si può ancora ricondurre ad un caso precedentemente esaminato, pur di scambiare gli indici a_0, a_1, a_2 con gli indici b_0, b_1, b_2 .

Abbiamo con ciò completato l'esame del sistema $(2_{7,3})$ relativo ad $r = 1$; occupiamoci ora del caso in cui sia $r = 0$. Riferendoci alla suddivisione di indici (3), esaminiamo il sistema

$$(2'_{7,3}) \quad \begin{cases} P(i_2 i_3; i_0 i_1 j_0 j_1) = 0 & (i_0, \dots, i_3, j_0, j_1, \dots, n) \\ p^{a_i a_j b_l b_m} = 0 & (i, j, l, m = 0, \dots, 3), \end{cases}$$

sotto la condizione

$$(3'_{7,3}) \quad p^{a_0 a_1 a_2 a_3} \cdot p^{b_0 b_1 b_2 b_3} = 0.$$

Potremo senz'altro supporre, il che non è restrittivo, che non esista alcuna p^{\dots} diversa da zero e non determinata dalle relazioni a tre termini rispetto ad un'altra differente dalla prima per tre indici.

Sostituendo i valori dati dal secondo gruppo di relazioni $(2'_{7,3})$ nel primo gruppo, si ottengono le

$$p^{a_i a_j a_l b_i} \cdot p^{b_i b_j b_l a_i} = 0 \quad (i, j, l = 0, \dots, 3).$$

Se vi fosse una $p^{a_i a_j a_l b_i}$ diversa da zero, questa risulterebbe non determinata dalle relazioni a tre termini rispetto a $p^{b_0 b_1 b_2 b_3}$, il che è contro l'ipotesi fatta. Ripetendo la considerazione precedente per una $p^{b_i b_j b_l a_i}$, si ha che:

$$\begin{cases} p^{a_i a_j a_l b_i} = 0 \\ p^{b_i b_j b_l a_i} = 0 \end{cases} \quad (i, j, l = 0, \dots, 3).$$

Poiché le p^{\dots} non nulle sono soltanto $p^{a_0 a_1 a_2 a_3}$ e $p^{b_0 b_1 b_2 b_3}$, le rette fondamentali congiungenti i punti $A^{a_0 a_1 a_2 a_3}$ e $A^{b_0 b_1 b_2 b_3}$ appartengono a $F(7, 3)$.

Con ciò risulta dimostrato il teorema I.4⁽¹⁰⁾.

Proviamo infine il teorema II. 4. Fissata una permutazione $b_0, \dots, b_{k-1}, c_k, \dots, c_n$, degli indici $0, \dots, n$, consideriamo i coni che dallo spazio fondamentale S_{n-k} congiungente i punti $A^{b_0 \dots b_{k-1} c_i}$ ($i = k, \dots, n$) proiettano la $G(n-k, k)$, sezione della $G(n, k)$ con lo spazio fondamentale ottenuto annullando le $p \dots$ che contengono almeno un indice b_0, \dots, b_{k-1} . Si verifica facilmente che tali coni sono contenuti in $F(n, k)$, cioè appartengono alle componenti di $F(n, k)$. Poiché la dimensione

$$n - k + (n - 2k)(k + 1) + 1 = (n - k)(k + 1) + [n + 1 - k(k + 2)]$$

di tali coni supera, per $n > k(k+2) - 1$, quelle della $G(n, k)$, ne consegue il teorema.

Geometria. — *Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione.* Nota II^(*) di DAVID KIRBY, presentata^(**) dal Socio B. SEGRE.

§ II. — ANELLI E SEMIGRUPPI CANONICI.

4. In questo numero e nel successivo riassumeremo brevemente — con qualche complemento — alcuni risultati di C. A. Più precisamente, soltanto l'estensione del Teor. V, il risultato precedente la Def. VIII, e quello seguente al Def. XIII sono nuovi; però il trattamento attuale è diverso da quello in C. A., e forse più semplice, i risultati noti essendo qui esposti di nuovo per completezza, in vista degli sviluppi che daremo nella Nota III.

Sia $W = \{0, v_1, v_2, \dots\}$ il semigruppo di elementi di $H(t)$, e sia I_r l'ideale di $H(t)$ formato dagli elementi di $H(t)$ aventi ordine maggiore di v_{r-1} ($r \geq 1$, ove $v_0 = 0$). Denotiamo con I_r/Q_r l'insieme delle serie di potenze della forma $P(t)/Q_r(t)$, ove $P(t)$ sia un qualunque elemento di I_r , e $Q_r(t)$ sia un elemento di $H(t)$ di ordine v_r . Quindi ogni elemento di $H(t)$ risulta un elemento di I_r/Q_r . Denotiamo con $[I_r/Q_r]$ l'intersezione degli anelli completi contenenti I_r/Q_r . Si ha allora che $[I_r/Q_r]$ risulta *un anello completo generato da* $P_1(t)/Q_r(t), P_2(t)/Q_r(t), \dots, P_l(t)/Q_r(t), Q_r(t)$, ove $P_1(t), P_2(t), \dots, P_l(t)$ hanno ordine maggiore di v_r , e, con $Q_r(t)$, generano l'anello $K + I_r$.

Inoltre $[I_r/Q_r]$ non dipende dalla scelta di $Q_r(t)$; e, se vale la $I_r/Q_r \doteq [I_r/Q_r]$ per una certa $Q_r(t)$, la stessa uguaglianza sussiste per ogni scelta di $Q_r(t)$.

(10) Osserviamo che le rette fondamentali di cui sopra non sono componenti di $F(7,3)$ perché contenute nei coni di $F(7,3)$.

(*) Continuatione della Nota I pubblicata a pp. 179-184 di questi « Rendiconti ».

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

È chiaro che, se $H(t)$ e $H'(t)$ sono associati, $[I_r/Q_r]$ e $[I'_r/Q'_r]$ risultano pure associati.

Chiameremo $[I_r/Q_r]$ la r -esima estensione, $H_r(t)$, di $H(t)$. Parimente, designeremo come la r -esima estensione, W_r , di un semigruppoo $W = \{0, v_1, v_2, \dots\}$ il semigruppoo generato dagli interi $0, v_{r+1} - v_r, v_{r+2} - v_r, \dots$. Ne segue che $W(H_r) \supseteq \{W(H)\}_r$, questa relazione potendo anche valere in senso stretto.

La prima estensione, $H_1(t)$, di $H(t)$ ammette l'interpretazione geometrica data dal seguente

TEOREMA V. - *Il ramo algebroide Γ generi $H(t)$. Se Γ' si ottiene da Γ mediante una trasformazione quadratica speciale, applicata al centro di Γ , allora Γ' genera $H_1(t)$.*

Poggiando su un risultato generale con riguardo a dilatazioni⁽¹⁾, e sul Teor. III del n. 2, risulta lecito sostituire «una trasformazione quadratica speciale» con «una dilatazione puntuale» nell'enunciato del Teor. V, ottenendo così un risultato più profondo.

DEFINIZIONE VII. - Diciamo che (a) $H(t)$ è canonico quando, per ciascun intero r , $I_r/P_r = [I_r/P_r]$; (b) se Γ genera un anello canonico, Γ verrà detto un ramo canonico; (c) il semigruppoo $W = \{0, v_1, v_2, \dots\}$ si dirà canonico quando, per ciascun intero r , si ha $W_r = \{0, v_{r+1} - v_r, v_{r+2} - v_r, \dots\}$.

Si verifica che, se $H(t)$ e W sono canonici, allora:

- 1° Ogni anello associato a $H(t)$ risulta canonico;
- 2° Ogni estensione di $H(t)$ risulta canonica;
- 3° Ogni estensione di W risulta canonica;
- 4° $W(H)$ risulta canonico.

Si stabilisce poi anche, senza difficoltà, il

TEOREMA VI. - *L'intersezione di un insieme di anelli canonici risulta un anello canonico⁽²⁾.*

Ne segue che l'intersezione di un insieme di semigruppoo canonici risulta un semigruppoo canonico.

Si mostra facilmente che la dimensione di un anello canonico $H(t)$ uguaglia il minimo elemento positivo v_1 di $W(H)$. Tenuto conto delle osservazioni che seguono le Def. IV e V, si vede che i caratteri e i caratteri base di un anello canonico costituiscono uno stesso insieme di interi.

Introdurremo ora un'operazione sopra un anello (o semigruppoo) che lo muti in un sottoanello (o sottosemigruppoo) e che si possa riguardare come inversa dell'operazione di estensione.

DEFINIZIONE VIII. - a) $W(H) = \{0, v_1, v_2, \dots\}$ sia il semigruppoo di $H(t)$, e $P_r(t)$ denoti un elemento di $H(t)$ avente ordine v_r . L'insieme delle serie di potenze della forma $\alpha + P_r(t)P(t)$, ove $\alpha \in K$ e $P(t) \in H(t)$, risulta un

(1) Cfr. *Local dilatation*, di J. G. SEMPLE e D. KIRBY, « Journ. L.M.S. », 30 417 (1955).

(2) La dimostrazione del Teor. VI dato in C. A. vale soltanto per un insieme finito di anelli canonici; però la stessa dimostrazione si estende facilmente ad un qualsiasi insieme di anelli canonici.

anello completo, $H^r(t)$, che chiameremo *una r -esima riversione di $H(t)$* , ossia, più specificatamente, *la riversione di $H(t)$ relativa a $P_r(t)$* .

b) Se $W = \{0, v_1, v_2, \dots\}$, il semigruppone $\{0, v_r, v_r + v_1, v_r + v_2, \dots\} = W^r$ verrà detto *la r -esima riversione di W* .

È importante notare che il suddetto anello $H^r(t)$ dipende dalla scelta dell'elemento $P_r(t)$ avente ordine v_r . Si vede poi, senza difficoltà, che *la prima estensione di ciascuna riversione di $H(t)$ viene a coincidere con l'anello $H(t)$ medesimo*, e che *ogni riversione di un anello canonico risulta canonica*. Risultati analoghi valgono ovviamente per ogni semigruppone W .

Da C. A. risulta che ogni anello canonico può venir costruito mediante una successione opportuna di riversioni dell'anello $K\{t\}$. Parimenti, ogni semigruppone canonico può venir costruito mediante una successione di riversioni del semigruppone di tutti gli interi non negativi.

5. Le nozioni del n. 4 erano state introdotte principalmente in vista della seguente

DEFINIZIONE IX. — a) Chiameremo *chiusura canonica di $H(t)$* e la designeremo con $*H(t)$, l'intersezione degli anelli canonici contenenti un anello $H(t)$.

b) Chiameremo *chiusura canonica di W* , e la designeremo con $*W$, l'intersezione dei semigruppone canonici contenenti un semigruppone W .

Dal Teor. VI, e dalle considerazioni che lo seguono, si trae che $*H(t)$ risulta un anello canonico e che $*W$ risulta un semigruppone canonico.

DEFINIZIONE X. — Se due rami L e L' rispettivamente generano anelli $H(t)$ e $H'(t)$ tali che $*H(t)$ e $*H'(t)$ risultino associati, diremo che Γ e Γ' sono *canonicamente equivalenti*.

È chiaro che il legame fra Γ e Γ' è una relazione di equivalenza, e che le chiusure di due anelli associati sono del pari associate. Ne segue che, *se due rami sono regolarmente equivalenti, essi risultano canonicamente equivalenti*.

Si può costruire la chiusura canonica, $*H(t)$, di un anello $H(t)$ nel modo seguente. Sia ${}_1H(t) (= H(t))$, ${}_2H(t)$, ${}_3H(t)$, \dots una successione di anelli, ove ${}_iH(t)$ è la prima estensione di ${}_{i-1}H(t)$ per $i = 2, 3, \dots$; e sia $*P_i(t)$ un elemento di ${}_iH(t)$ tale che $O\{*P_i(t)\}$ risulti il minimo elemento positivo di $W({}_iH)$. Per ogni intero r , abbastanza grande, si ha allora ${}_rH(t) = K\{t\}$. Pertanto ${}_rH(t) = {}_rH(t)$, ed inoltre, successivamente, ${}_iH(t)$ è la riversione di ${}_{i+1}H(t)$ relativa a $*P_i(t)$ (per $i = r-1, r-2, \dots, 1$). Notiamo che ${}_iH(t) (= *H(t))$ non dipende dalle $*P_1(t)$, $*P_2(t)$, \dots usate nella sua costruzione.

Parimenti si costruisce la chiusura canonica di un semigruppone W .

Il semigruppone di una chiusura canonica di un anello possiede un significato geometrico importante, espresso dal seguente teorema, che si deduce facilmente dal Teor. V.

TEOREMA VII. — Se $W = \{0, v_1, v_2, \dots\}$ è il semigruppone della chiusura canonica dell'anello generato dal ramo Γ , le molteplicità dei successivi punti del ramo Γ valgono $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \dots$.

Tenuto conto della Def. X e delle osservazioni che la seguono si vede che:
Se i rami Γ e Γ' sono canonicamente (regolarmente) equivalenti, essi posseggono la stessa successione di molteplicità.

Considereremo ora certi insiemi di elementi di un anello canonico ${}^*H(t)$, generanti ${}^*H(t)$ in modo speciale.

DEFINIZIONE XI. - Sia $H(t)$ un anello avente la chiusura canonica ${}^*H(t)$. Sia ${}^*P_1(t)$ un elemento di ${}^*H(t)$ scelto in guisa che $O\{{}^*P_1(t)\}$ sia il minimo elemento positivo di $W({}^*H)$; scegliamo inoltre ${}^*P_i(t)$ (per $i = 2, 3, \dots$) come un elemento di ${}^*H(t)$ tale che $O\{{}^*P_i(t)\}$ risulti il minimo elemento di $W({}^*H)$ che non sia un elemento di $W({}^*K\{{}^*P_1(t), {}^*P_2(t), \dots, {}^*P_{i-1}(t)\})$. L'insieme ${}^*P_1(t), {}^*P_2(t), \dots$ verrà allora detto *una base canonica di $H(t)$* .

Il numero degli elementi in una base canonica di $H(t)$ risulta così finito; ma è chiaro che una tale base non è unica. Però si mostra (cfr. C. A.) che *il gruppo degli ordini degli elementi di una base canonica risulta unico*, onde possiamo dare la seguente

DEFINIZIONE XII. - Gli ordini ${}^*\chi_1, {}^*\chi_2, \dots, {}^*\chi_n$ degli elementi di una base canonica di $H(t)$ si chiameranno *i caratteri base canonici di $H(t)$* . Inoltre, se Γ genera $H(t)$, chiameremo ${}^*\chi_1, {}^*\chi_2, \dots, {}^*\chi_n$ *i caratteri base canonici di Γ* .

In pari modo, rispetto ad un semigruppò, poniamo la

DEFINIZIONE XIII. - Sia W un semigruppò avente la chiusura canonica *W . Posto ${}^*\eta_1 = v_1$ (questo essendo il minimo elemento positivo di W e di *W), si designi con ${}^*\eta_i$ il minimo elemento di *W che non sia un elemento della chiusura canonica del semigruppò generato dalle ${}^*\eta_1, {}^*\eta_2, \dots, {}^*\eta_{i-1}$. Gli interi ${}^*\eta_1, {}^*\eta_2, \dots$ si chiameranno *i caratteri canonici di W* .

Si dimostra, senza difficoltà, che *i caratteri canonici di W risultano caratteri di W* . Quindi il numero di caratteri canonici è finito.

Inoltre si dimostra che *i caratteri canonici di W sono precisamente i caratteri dell'intersezione di tutti i semigruppò aventi *W come la loro chiusura canonica*. Questa proprietà è usata in C. A. per la definizione di tali invarianti.

Ciò suggerisce la seguente definizione di un quarto insieme di invarianti di un ramo rispetto all'equivalenza regolare; esso coincide con il secondo insieme di invarianti rispetto all'equivalenza canonica.

DEFINIZIONE XIV. - Se Γ genera l'anello $H(t)$ avente la chiusura canonica ${}^*H(t)$, i caratteri canonici di $W({}^*H)$ verranno anche detti *caratteri canonici di Γ* .

Si vede, senz'altro, che due rami posseggono gli stessi caratteri canonici se, e soltanto se, essi hanno la stessa successione di molteplicità. Si mostra anche facilmente che *i caratteri base canonici di Γ risultano sempre caratteri canonici di Γ* .

Gli insiemi di invarianti introdotti nelle Def. IV, VI, XII e XIV non risultano indipendenti, per esempio il primo elemento è lo stesso in ciascuno di quegli insiemi.

Geometria. — *Sulle superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggiano a piani assegnati.* Nota di DIONISIO GALLARATI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. In una Nota in corso di stampa in questo volume dei « Rendiconti » ⁽¹⁾, che è da riguardarsi come preliminare alla presente, mi sono occupato delle varietà V_k dello spazio S_r i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati ed ho approfondito il caso, assai semplice, delle superficie dello spazio S_4 .

Ora mi occupo di superficie di S_5 , limitandomi all'unico caso degno di rilievo, e cioè quello delle superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggiano ad alcuni piani assegnati a due a due non contenuti in un S_3 ⁽²⁾. Sebbene i metodi impiegati siano elementari, i risultati ottenuti sembrano non privi di interesse. Ad esempio, dimostro che per caratterizzare una superficie di Veronese non è necessario sapere che i suoi piani tangenti sono tutti a due a due incidenti ⁽³⁾, ma basta sapere ch'essi si appoggiano tutti a *cinque* piani ⁽⁴⁾, a due a due incidenti e del resto generici, i quali risultano di conseguenza tangenti alla superficie; tale risultato appare particolarmente significativo quando si pensi che esistono in S_5 due famiglie di superficie, generalmente trascendenti, i cui piani tangenti sono appoggiati a *quattro* piani a due a due incidenti e del resto generici; superficie che qui caratterizzo determinandone gli invarianti proiettivi.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) D. GALLARATI, *Alcune osservazioni sulle varietà i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati.* A questa Nota, che indicherò con la lettera A, rinvio il lettore per le indicazioni bibliografiche.

(2) Gli altri casi si esauriscono in poche parole. Infatti se i piani tangenti di una superficie F di S_5 segano in rette uno spazio lineare α di dimensione *tre* oppure *due*, il cono che proietta F da α ha dimensione *quattro* oppure *tre* (A, n. 2), ed F si compone di parti ciascuna delle quali appartiene ad un S_4 , oppure ad un S_3 , passante per α ; viceversa è ben chiaro che i piani tangenti d'una superficie F siffatta segano α in rette. Inoltre, se i piani tangenti d'una superficie F si appoggiano ad una retta a , F è luogo di ∞^1 curve piane situate in piani passanti per a .

(3) Cfr. DEL PEZZO, *Sulle superficie dell'n° ordine immerse nello spazio ad n dimensioni*, « Rend. Palermo », I (1887), n. 12; ed anche: E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa 1907, p. 316.

(4) Ricordiamo a questo proposito il seguente teorema di A. COMESSATTI: l'unica superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggino tutti ad infiniti piani di un (conveniente) S_4 , senza appoggiarsi di conseguenza ad una retta, è la superficie di Veronese, e quello S_4 la tocca lungo una delle sue coniche. Esso trovasi nella Memoria: *Intorno alle superficie algebriche irregolari con $p_g \geq 2$ ($p_a + 2$) e ad un problema analitico ad esse collegato*, « Rend. Palermo », XLVI, pp. 1-48 (1922). Successivamente A. TERRACINI, nella Nota: *Su una proprietà caratteristica della superficie di Veronese*, « Atti Soc. Naturalisti e Matematici di Modena » (5), 8 (1922), ha dimostrato che la sola superficie non rigata di S_r con $r \geq 5$, i cui piani tangenti si appoggiano ad (almeno) ∞^1 piani, senza appoggiarsi di conseguenza ad una retta, è la superficie di Veronese.

2. Sia F una superficie differenziabile dell' S_5 proiettivo: se i suoi piani tangenti *si appoggiano ad un dato piano* α , avendo in comune con α un unico punto, essa possiede un sistema Σ almeno ∞^1 e d'indice positivo di curve ciascuna delle quali sta in un S_3 passante per α ⁽⁵⁾, ed il cono αF che proietta F da α ha dimensione *quattro* (A, n. 2). Pertanto, se riferiamo i punti di S_5 ad un sistema di coordinate proiettive ed omogenee x_0, x_1, \dots, x_5 scelto in guisa che le equazioni di α siano: $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, F può essere rappresentata con equazioni della forma:

$$(I) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = \varphi_0(u) : \varphi_1(u) : \varphi_2(u) : \varphi_3(u, v) : \varphi_4(u, v) : \varphi_5(u, v).$$

Se F è un cono ed α un piano passante pel suo vertice, oppure una rigata ed α un piano contenente una sua direttrice, Σ è il sistema delle generatrici di F ; se F è una superficie di Veronese ed α un suo piano tangente, Σ è il sistema delle ∞^1 coniche di F passanti per il punto di contatto di F con α ; e ciascuna delle coniche di Σ appartiene appunto ad un S_3 passante per α . In ciascuno di questi tre casi avviene, com'è ben noto, che i piani tangenti ad F nei punti d'una medesima curva di Σ sono a due a due incidenti. Tale proprietà sussiste per ogni superficie avente un sistema Σ di curve appartenenti ad S_3 passanti per un piano dato α (A, n. 2): la verifica analitica è, del resto, immediata.

Se F è algebrica ed irriducibile, il piano α sega F in un gruppo di punti, e solo eccezionalmente può contenere una curva di F ; e da ogni retta di α non incontrante F , la superficie stessa vien proiettata multiplamente. Se α ed F hanno in comune un unico punto, o questo è per F un punto multiplo, oppure F è ivi toccata dal piano α (A, n. 3).

3. Sia F una *superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggino a due piani tra loro sghembi* α, β . Essa (A, n. 5) appartiene alla V_3 delle rette appoggiate a due curve γ_α e γ_β contenute rispettivamente in α ed in β , e pertanto *può essere composta*:

a) *di coni proiettanti γ_α da un punto di γ_β , o γ_β da un punto di γ_α* (e quindi appartenenti a degli S_3);

b) *di rigate aventi γ_α e γ_β , o loro parti, come direttrici piane*;

c) *di superficie incontrate da ∞^2 rette appoggiate a γ_α ed a γ_β in almeno un punto non appartenente* (in generale) *né a γ_α , né a γ_β* ⁽⁶⁾.

Per una superficie del tipo c) avviene (A, n. 5) che se A, B sono i punti in cui si appoggia a γ_α e γ_β la retta di V_3 passante per un generico punto P di F , il piano tangente in P ad F congiunge P con un punto della tangente in A a γ_α , ed un punto della tangente in B a γ_β .

Rileviamo che tra le superficie del tipo c) rientrano i piani appoggiati ad α ed a β . Detto infatti π un tale piano, denotiamo con α^* e β^* rispettivamente l' $S_4: \alpha\pi$ e l' $S_4: \beta\pi$, e con a, b rispettivamente le rette $\alpha\beta^*$ e $\beta\alpha^*$. L' S_3 comune ad α^* e β^* contiene a, b e π ; e pertanto le ∞^2 rette appoggiate ad a, b son tutte incidenti a π .

Notiamo ancora che se F è algebrica, irriducibile e non rigata, essa passa per γ_α e per γ_β , ed è incontrata ulteriormente da ogni retta appoggiata a γ_α ed a γ_β .

(5) F. SEVERI e B. SEGRE, *L'involuppo di un sistema più volte infinito di curve piane*, « Ann. Matem. » (4), 8, pp. 173-199 (1930); cfr. anche: A, n. 2.

(6) Da ciò segue subito che: *condizione necessaria e sufficiente affinché i piani tangenti di una superficie F di S_5 siano tutti incidenti a tre piani α, β, γ , a due a due sghembi, è che F sia l'intersezione (eventualmente parziale) di tre S_2 -coni aventi α, β, γ come vertici.*

Tutto ciò si ritrova analiticamente in modo assai semplice. Supponiamo che le equazioni di α siano: $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, e quelle di β : $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Poiché i piani tangenti di F si appoggiano ad α , potremo supporre che le equazioni di F siano della forma (1); ma ora le funzioni $\varphi_3(u, v)$, $\varphi_4(u, v)$, $\varphi_5(u, v)$ saranno tre integrali d'un'equazione lineare alle derivate parziali:

$$(2) \quad \lambda(u, v) \theta + \mu(u, v) \theta^u + \nu(u, v) \theta^v = 0 \quad (?);$$

e pertanto, se $\omega(u, v)$ è un integrale non identicamente nullo di tale equazione, esiste ⁽⁸⁾ una funzione $g(u, v)$ tale che:

$$\varphi_i(u, v) = \omega(u, v) \cdot \Phi_i[g(u, v)] \quad (i = 3, 4, 5);$$

ed occorre distinguere due casi:

a) $g^v \equiv 0$: in tal caso $g(u, v)$ è funzione della sola u , ed è quindi lecito assumere quali nuovi parametri u ed $\omega(u, v)$, ottenendo per F una rappresentazione della forma:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = \varphi_0(u) : \varphi_1(u) : \varphi_2(u) : v\varphi_3(u) : v\varphi_4(u) : v\varphi_5(u);$$

F è una rigata avente due direttrici piane situate sui piani α e β , oppure un cono.

b) se $g^v \neq 0$, assumendo u e $g(u, v)$ come nuovi parametri, si ha per F la rappresentazione:

$$(3) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = \varphi_0(u) : \varphi_1(u) : \varphi_2(u) : \omega(u, v) \varphi_3(v) : \omega(u, v) \varphi_4(v) : \omega(u, v) \varphi_5(v);$$

e viceversa si riconosce immediatamente che son tutti appoggiati ad α ed a β i piani tangenti di ogni superficie rappresentata da equazioni come le (3).

Consideriamo la curva γ_α luogo del punto $[0, 0, 0, \varphi_3(v), \varphi_4(v), \varphi_5(v)]$, e la curva γ_β luogo del punto $[\varphi_0(u), \varphi_1(u), \varphi_2(u), 0, 0, 0]$. Le (3) mostrano chiaramente che ogni retta appoggiata a γ_α ed a γ_β incontra F in un punto. Viceversa, se γ_α e γ_β son due curve situate in due piani sghembi α e β , e se ogni retta appoggiata a γ_α ed a γ_β contiene un punto di una superficie F non appartenente (generalmente) né a γ_α né a γ_β , F può esser rappresentata con equazioni come le (3), e quindi i suoi piani tangenti son tutti appoggiati ad α ed a β .

Qualora F sia algebrica, essa sega α e β rispettivamente in γ_α ed in γ_β , che son le curve luoghi di poli e di zeri per la funzione $\omega(u, v)$.

4. Consideriamo ora una superficie F di S_5 i cui piani tangenti incontrino due piani α e β appartenenti ad uno stesso S_4 , ma non ad uno stesso S_3 . Supponiamo che le equazioni di α siano: $x_0 = x_1 = x_3 = 0$, e quelle di β : $x_0 = x_2 = x_4 = 0$, sicché α e β appartengano all' S_4 : $x_0 = 0$ ed abbiano a comune il punto $A_5(0, 0, 0, 0, 0, 1)$; ed escludiamo il caso ovvio in cui tutti i piani tangenti di F seghino α e β nello stesso punto, e quindi F sia un cono di vertice A_5 . La proiezione di F da A_5 sull' S_4 : $x_5 = 0$, è una superficie di S_4 i cui piani tangenti si appoggiano a due rette sghembe a, b

(7) Denoteremo con f^x, f^y, \dots le derivate d'una funzione $f(x, y, \dots)$, fatte rispetto ad x, y, \dots .

(8) Se $\omega(u, v)$ è un integrale non identicamente nullo della (2), e se $\theta(u, v)$ è un qualsiasi altro integrale della stessa equazione, posto: $\theta(u, v) = \omega(u, v) \varphi(u, v)$, si trova, sostituendo nella (2) e tenendo conto delle ipotesi fatte, che $\varphi(u, v)$ è un integrale dell'equazione: $\mu(u, v) \theta^u + \nu(u, v) \theta^v = 0$. Esiste allora una funzione $g(u, v)$ tale che $\varphi(u, v) = \Phi[g(u, v)]$; e pertanto: $\theta(u, v) = \omega(u, v) \Phi[g(u, v)]$.

($a: x_0 = x_1 = x_3 = x_5 = 0$; $b: x_0 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$); e quindi (A, n. 7) ogni falda di F si può rappresentare con equazioni della forma:

$$(4) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = 1 : \varphi_1(u) : \varphi_2(v) : \varphi_3(u) : \varphi_4(v) : \varphi_5(u, v).$$

Rientra in questo tipo di superficie la F^4 di Veronese, la quale, com'è ben noto, può esser rappresentata con le equazioni:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = 1 : u : v : u^2 : v^2 : uv,$$

che sono appunto un caso speciale delle (4).

5. Si presenta di particolare interesse lo studio delle superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggino a tre o più piani a due a due incidenti, ma del resto generici.

Sia F una superficie di S_5 i cui piani tangenti incontrino (in un sol punto) tre piani α, β, γ a due a due incidenti ma non passanti per uno stesso punto, né contenuti in uno stesso S_4 . Se α, β, γ hanno equazioni:

$$\alpha) x_0 = x_1 = x_3 = 0 \quad ; \quad \beta) x_0 = x_2 = x_4 = 0 \quad ; \quad \gamma) x_1 = x_2 = x_5 = 0,$$

F potrà esser rappresentata con equazioni della forma (4), ove però $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_5(u, v)$ siano tre integrali d'un'equazione del tipo (2), e quindi ⁽⁸⁾:

$$(5) \quad \varphi_2(v) = \varphi_1(u) \Phi_2^*[g(u, v)] \quad ; \quad \varphi_5(u, v) = \varphi_1(u) \Phi_5^*[g(u, v)];$$

ed anzi la prima delle (5) implica che $g(u, v)$ sia funzione del rapporto $\varphi_2(v)/\varphi_1(u)$; assumendo allora come nuovi parametri $\varphi_1(u)$ e $\varphi_2(v)$, si ottiene per F la rappresentazione:

$$(6) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = 1 : u : v : \theta_3(u) : \theta_4(v) : u \Phi_5(u^{-1}v).$$

Viceversa, si verifica subito che tutti i piani tangenti d'una superficie avente equazioni come le (6), incontrano α, β, γ ⁽⁹⁾.

6. Occupiamoci ora delle superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggino a quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aventi a due a due uno ed un solo punto a comune, ma non passanti a tre a tre per un medesimo punto, ed a tre a tre non contenuti in uno stesso S_4 .

Limitandoci al caso più generale, che è l'unico che abbia veramente interesse, partiamo da una superficie F come la (6), i cui piani tangenti son già tutti incidenti ai tre piani α, β, γ del n. 5. Si può, senza limitare la generalità, supporre che le equazioni di δ siano: $x_3 = x_4 = x_5 = 0$; resta allora da imporre ai piani tangenti di F la condizione:

$$\begin{vmatrix} \theta_3(u) & \theta_4(v) & u \Phi_5(u^{-1}v) \\ \theta_3^u(u) & 0 & \Phi_5(u^{-1}v) - u^{-1}v \Phi_5'(u^{-1}v) \\ 0 & \theta_4^v(v) & \Phi_5(u^{-1}v) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

(9) Se F non appartiene ad alcun S_4 , risulta: $\varphi_1^u(u) \varphi_2^v(v) \neq 0$, e quindi il cambiamento di parametri che abbiamo effettuato è certamente lecito.

ossia:

$$(7) \quad \Phi'_5(u^{-1}v) [v\theta_3\theta_4^v - u\theta_3^u\theta_4] \equiv \Phi'_5(u^{-1}v) [\theta_3 - u\theta_3^u] u\theta_4^v.$$

Se si esclude che F appartenga a qualche S_4 , risulta, per generici valori di u, v :

$$\theta_3^u(u)\theta_4^v(v)\Phi'_5(u^{-1}v) [v\theta_3\theta_4^v - u\theta_3^u\theta_4] \neq 0 \quad (10);$$

la (7) implica allora che dipenda soltanto dal rapporto $u^{-1}v$ la funzione:

$$(8) \quad \begin{aligned} u\theta_4^v(\theta_3 - u\theta_3^u)(v\theta_3\theta_4^v - u\theta_3^u\theta_4)^{-1} = \\ = (u\theta_3/\theta_3^u - u^2)(v\theta_3/\theta_3^u - u\theta_4/\theta_4^v)^{-1} \equiv \Phi'_5(u^{-1}v)/\Phi_5(u^{-1}v). \end{aligned}$$

D'altra parte, posto:

$$(9) \quad \theta_3(u) = \theta_3^u[u + \rho(u)] \quad ; \quad \theta_4(v) = \theta_4^v[v + \sigma(v)],$$

la (8) diviene:

$$(10) \quad u\rho(v\rho - u\sigma)^{-1} = (u^{-1}v - \rho^{-1}\sigma)^{-1} \equiv \Phi'_5(u^{-1}v)/\Phi_5(u^{-1}v);$$

onde dipende soltanto da $u^{-1}v$ la funzione $\rho^{-1}\sigma$. Il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee porge allora: $u\rho^{-1}\rho^u \equiv v\sigma^{-1}\sigma^v$; e pertanto i due membri di questa uguaglianza sono uguali ad una medesima costante a :

$$(11) \quad \rho^{-1}\rho^u = au^{-1} \quad ; \quad \sigma^{-1}\sigma = av^{-1}.$$

Dobbiamo distinguere due casi:

1°) $a = 0$. Le (11) danno: $\rho^u \equiv \sigma^v \equiv 0$; quindi ρ e σ son due costanti: $\rho = b, \sigma = c$; le (9), (10) forniscono allora: $\theta_3(u) = M(u+b)$; $\theta_4(v) = N(v+c)$; $\Phi_5(u^{-1}v) = Ru^{-1}(bv - cu)$, con M, N, R costanti; ed F è un piano appoggiato ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

2°) $a \neq 0$. Le (11) danno: $\rho = ku^a$; $\sigma = hv^a$, con h e k costanti; ne segue:

$$\theta_3(u)/\theta_3^u(u) = u + ku^a \quad ; \quad \theta_4(v)/\theta_4^v(v) = v + hv^a;$$

ed integrando:

$$\theta_3(u) = A \exp. \int (u + ku^a)^{-1} du \quad ; \quad \theta_4(v) = B \exp. \int (v + hv^a)^{-1} dv,$$

A e B essendo due nuove costanti. La (10) fornisce allora:

$$\Phi'_5(u^{-1}v)/\Phi_5(u^{-1}v) = (u^{-1}v - k^{-1}hu^{-a}v^a)^{-1},$$

e quindi:

$$\Phi_5(u^{-1}v) = C \exp. \int [u^{-1}v - k^{-1}h(u^{-1}v)^a]^{-1} d(u^{-1}v) \quad (\text{con } C \text{ costante}).$$

(10) Si noti che se $v\theta_3\theta_4^v - u\theta_3^u\theta_4 \equiv 0$ e $\theta_4^v\Phi'_5 \neq 0$, la (7) può sussistere solo se: $\theta_3 = Au, \theta_4 = Bv$ con A, B costanti.

Supponiamo ora $a \neq 1$, e notiamo che risulta (se p è una costante):

$$\int (t + p t^a)^{-1} dt = (1 - a)^{-1} \log (p + t^{1-a});$$

e quindi, ponendo $(1 - a)^{-1} = m$:

$$\theta_3(u) = A (u^{1/m} + k)^m; \quad \theta_4(v) = B (v^{1/m} + h)^m;$$

$$\Phi_5(u^{-1}v) = C [(u^{-1}v)^m - k^{-1}h]^m = C u^{-1} k^{-m} (k v^{1/m} - h u^{1/m})^m.$$

Le equazioni di F sono allora della forma:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = 1 : u : v : A (u^{1/m} + k)^m : B (v^{1/m} + h)^m : C k^{-m} (k v^{1/m} - h u^{1/m})^m.$$

Infine, assumendo come nuovi parametri $k^{-1} u^{1/m}$ ed $h^{-1} v^{1/m}$, ed operando un'opportuna scelta del punto unità, si ottengono per F le equazioni:

$$(12) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = 1 : u^m : v^m : (u + 1)^m : (v + 1)^m : (u - v)^m.$$

Un semplice calcolo conferma che viceversa ogni superficie come la (12), ha tutti i piani tangenti appoggiati ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

7. Per $a = 1$, le (11) danno: $\rho = ku, \sigma = hv$ (h, k costanti finite e non nulle), e le (9) divengono:

$$(13) \quad \theta_3(u) = (1 + k) u \theta_3^u(u); \quad \theta_4(v) = (1 + h) v \theta_4^v(v).$$

Un'analisi priva di difficoltà mostra che se $(h + 1)(k + 1)(h - k) = 0$, F sta in qualche S_4 . Sia allora: $(h + 1)(k + 1)(h - k) \neq 0$, e poniamo: $(1 + k)^{-1} = m; (1 + h)^{-1} = n$, sicché risulterà: $mn(m - 1)(n - 1)(m - n) \neq 0$.

Le (13) danno allora: $\theta_3(u) = Au^m; \theta_4(v) = Bv^m$, con A, B costanti; e la (7), che diviene: $n(m - 1)u\Phi_5 + (n - m)v\Phi_5' = 0$, fornisce: $\Phi_5(u^{-1}v) = C(u^{-1}v)^\lambda$, ove C è una costante ed ove si è posto: $\lambda = n(1 - m)(n - m)^{-1}$.

Si ottengono così le superficie di equazioni:

$$(14) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = 1 : u : v : u^m : v^n : u^\lambda v^\mu,$$

λ, μ essendo la soluzione del sistema $\lambda + \mu = m^{-1}\lambda + n^{-1}\mu = 1$ (sicché: $\lambda\mu(\lambda - 1)(\mu - 1) \neq 0$).

Si verifica subito che, viceversa, le superficie (14) soddisfano le condizioni volute.

Dunque: esistono due tipi diversi di superficie di S_5 , non contenute in spazi di dimensione inferiore, con i piani tangenti appoggiati a quattro piani aventi a due a due uno ed un solo punto a comune, ma a tre a tre non passanti per un punto né contenuti in un S_4 . Una prima famiglia è costituita da superficie rappresentabili con equazioni della forma (12), aventi un invariante proiettivo; una seconda famiglia è costituita da superficie rappresentabili con equazioni della forma (14), aventi due invarianti proiettivi. Due superficie della medesima famiglia con gli stessi invarianti son tra loro omografiche.

8. Relativamente alle superficie (12), notiamo che:

a) se m è un numero reale ≥ 1 , F è tangente; come subito visto, ai quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nei punti che si ottengono per le seguenti quattro coppie di valori dei parametri, $u, v: (0, \infty); (\infty, 0); (0, 0); (-1, -1)$;

b) tra le superficie (12) ci sono in particolare, per m intero ≥ 1 , tutte le superficie razionali F_m^2 di S_5 rappresentabili sul piano con un sistema lineare ∞^5 di curve d'ordine m contenente i sei lati d'un quadrangolo completo ciascuno contato m volte. I quattro vertici di tale quadrangolo sono immagini dei quattro punti ove la superficie tocca i quattro piani dati $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Per $m = 2$ si ha una F^4 di Veronese; ed il fatto che i suoi piani tangenti siano a due a due incidenti, si rispecchia in ciò che il sistema lineare di tutte le coniche del piano contiene ogni retta contato due volte.

9. Determiniamo ora le superficie di S_5 i cui piani tangenti siano appoggiati a cinque piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ aventi a due a due uno ed un sol punto a comune, ma a tre a tre non passanti per un punto né appartenenti ad un S_4 .

Siano ancora $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, i piani del n. 6; ed ε un piano ulteriore incidente ad essi, ma del resto generico, le cui equazioni possiamo assumere nella forma:

$$ax_0 + bx_1 + x_3 = cx_0 + dx_2 + x_4 = ex_1 + fx_2 + x_5 = 0,$$

ove: $ade + bcf = 0$. Affinché esso non appartenga ad alcuno degli S_4 contenenti due dei piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, occorre che sia non nullo uno almeno degli elementi delle tre coppie $(a, b), (c, d), (e, f)$.

Operiamo un cambiamento di riferimento in guisa che le equazioni di ε divengano: $y_3 = y_4 = y_5 = 0$. E precisamente poniamo:

$$\begin{aligned} y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 = \\ = x_0 : x_1 : x_2 : (ax_0 + bx_1 + x_3) : (cx_0 + dx_2 + x_4) : (ex_1 + fx_2 + x_5). \end{aligned}$$

Dopo di ciò le equazioni (12) vanno sostituite con le:

$$\begin{aligned} (15) \quad y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 = \\ = 1 : u^m : v^m : [a + bu^m + (u+1)^m] : [c + dv^m + (v+1)^m] : [eu^m + fv^m + (u-v)^m]; \end{aligned}$$

e le (14) vanno sostituite con le:

$$\begin{aligned} (16) \quad y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5 = \\ = 1 : u : v : [a + bu + u^m] : [c + dv + v^m] : [eu + fv + u^\lambda v^\mu], \end{aligned}$$

ove: $\lambda\mu mn(\lambda-1)(\mu-1)(m-1)(n-1)(m-n) \neq 0$, ed inoltre: $\lambda + \mu = m^{-1}\lambda + n^{-1}\mu = 1$.

Incominciamo a dimostrare che i piani tangenti di una superficie rappresentata da equazioni come le (16), non possono essere tutti incidenti ad ε .

La condizione necessaria e sufficiente affinché tutti i piani tangenti della superficie (16) incontrino ε , è che risulti identicamente rispetto ad u, v :

$$\begin{vmatrix} a + bu + u^m & c + dv + v^m & eu + fv + u^\lambda v^\mu \\ b + mu^{m-1} & 0 & e + \lambda u^{\lambda-1} v^\mu \\ 0 & d + nv^{n-1} & f + \mu u^\lambda v^{\mu-1} \end{vmatrix} \equiv 0;$$

ossia, tenendo presente che $\lambda + \mu = 1$:

$$(17) \quad [a - (m-1)u^m][d + nv^{n-1}][e + \lambda u^{\lambda-1}v^\mu] + \\ + [c - (n-1)v^n][b + mu^{m-1}][f + \mu u^\lambda v^{\mu-1}] \equiv 0.$$

Si vede subito che per valori generici di u, v e qualunque siano i numeri $a, b, c, d, e, f, m, n, \lambda, \mu$, purché soddisfacenti alle condizioni di cui si è detto, risulta:

$$[c - (n-1)v^n][b + mu^{m-1}][f + \mu u^\lambda v^{\mu-1}] \neq 0;$$

la (17) può allora scriversi:

$$(18) \quad M(u)N(v)R(uv^{-1}) + 1 \equiv 0,$$

ove si è posto per abbreviare:

$$M(u) = [a - (m-1)u^m][b + mu^{m-1}]^{-1},$$

$$N(v) = [d + nv^{n-1}][c - (n-1)v^n]^{-1},$$

$$R(uv^{-1}) = [e + \lambda u^{\lambda-1}v^\mu][f + \mu u^\lambda v^{\mu-1}]^{-1} = \\ = [e(uv^{-1})^\mu + \lambda][f(uv^{-1})^\mu + \mu(uv^{-1})]^{-1}.$$

La (18) implica che $M(u)N(v)$ sia funzione soltanto di uv^{-1} ; e quindi, per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee: $uM^uN + vMN^v = 0$. Esiste allora una costante p tale che: $M^uM^{-1} = pu^{-1}$; $N^vN^{-1} = -pv^{-1}$, sicché risulta: $M = M_0u^p$; $N = N_0^{-1}v^{-p}$ (M_0 ed N_0 essendo due nuove costanti, *entrambe non nulle*). Deve dunque essere:

$$(19) \quad [a - (m-1)u^m][b + mu^{m-1}]^{-1} \equiv M_0u^p$$

$$(20) \quad [c - (n-1)v^n][d + nv^{n-1}]^{-1} \equiv N_0v^p.$$

La (19) può scriversi:

$$(21) \quad mM_0u^{m+p-1} + (m-1)u^m + bM_0u^p - a \equiv 0,$$

e poiché $m(m-1) \neq 0$ una tale identità potrebbe sussistere solo se $m = m + p - 1$, oppure se $m = p$. Ma se $p = 1$ la (21) diviene: $(mM_0 + m - 1)u^m + bM_0u - a \equiv 0$, e questa è assurda perché a e b non sono entrambi nulli ed $m(m-1) \neq 0$; se $p = m$ la (21) diviene: $mM_0u^{2m-1} + (bM_0 + m - 1)u^m - a \equiv 0$, e potrebbe sussistere solo per $m = 1/2$. In modo analogo si riconosce che la (20) potrebbe sussistere solo per $n = 1/2$; e quindi, poiché $m - n \neq 0$, le (19), (20) non possono sussistere simultaneamente.

10. Occupiamoci ora d'una superficie rappresentabile con equazioni della forma (15). La condizione necessaria e sufficiente affinché tutti i piani tangenti d'una tal superficie incontrino il piano ε , è che risulti, identicamente rispetto ad u, v :

$$\begin{vmatrix} a + bu^m + (u+1)^m & c + dv^m + (v+1)^m & eu^m + fv^m + (u-v)^m \\ bu^{m-1} + (u+1)^{m-1} & 0 & eu^{m-1} + (u-v)^{m-1} \\ 0 & dv^{m-1} + (v+1)^{m-1} & fv^{m-1} - (u-v)^{m-1} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

e questa può scriversi nella forma (18), ove:

$$M(u) = [a + (u + 1)^{m-1}] [bu^{m-1} + (u + 1)^{m-1}]^{-1},$$

$$N(v) = [dv^{m-1} + (v + 1)^{m-1}] [c + (v + 1)^{m-1}]^{-1},$$

$$R(uv^{-1}) = [eu^{m-1} + (u - v)^{m-1}] [fv^{m-1} + (u - v)^{m-1}]^{-1}.$$

Ragionando come al n. 9, si riconosce l'esistenza di due costanti M_0, p ($M_0 \neq 0$) tali che risulti identicamente:

$$[a + (u + 1)^{m-1}] [bu^{m-1} + (u + 1)^{m-1}]^{-1} \equiv M_0 u^p,$$

ossia:

$$(22) \quad a + (u + 1)^{m-1} (1 - M_0 u^p) \equiv M_0 bu^{m+p-1}.$$

Derivando rispetto ad u e moltiplicando poi i due membri per u^{2-m-p} , si ha:

$$\begin{aligned} (u + 1)^{m-2} [-M_0(m + p - 1) u^{2-m} - M_0 p u^{1-m} + (m - 1) u^{2-m-p}] \equiv \\ \equiv M_0 b(m + p - 1); \end{aligned}$$

derivando ancora rispetto ad u e moltiplicando poi i due membri per $u^m(u + 1)^{3-m}$, si ottiene:

$$(23) \quad (m - 1) [M_0(m + p - 2)u + M_0 p - pu^{2-p} - (m + p - 2)u^{1-p}] \equiv 0.$$

Se $m = 1$, F è un piano; se $m \neq 1$, deriviamo due volte rispetto ad u : si ottengono successivamente le identità:

$$(24) \quad M_0(m + p - 2) + p(p - 2)u^{1-p} + (p - 1)(m + p - 2)u^{-p} \equiv 0,$$

$$(25) \quad p(p - 1)u^{-p-1} [(p - 2)u + (m + p - 2)] \equiv 0.$$

Poiché non possono essere entrambi nulli i numeri $p - 2$ ed $m + p - 2$ (essendo $m \neq 0$), la (25) implica: $p(p - 1) = 0$. Per $p = 0$ la (24) diviene: $(m - 2)(M_0 - 1) = 0$; se $m = 2$, F è una superficie di Veronese; se $m \neq 2$ ed $M_0 = 1$, la (22) diviene: $a \equiv bu^{m-1}$, e poiché $m \neq 1$, implica $a = b = 0$; ma ciò è escluso perché $\alpha, \beta, \varepsilon$ non appartengono, per ipotesi, ad uno stesso S_4 . Se $p = 1$ (ed $m \neq 1$), la (23) diviene: $u[M_0(m - 1) - 1] + M_0 - (m - 1) \equiv 0$, ed implica: $m(m - 2) = 0$, ossia $m = 2$.

Osserviamo ora che una superficie F i cui piani tangenti siano appoggiati ad $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ deve appartenere ad uno spazio di dimensione ≤ 5 . Se infatti il generico piano tangente di F sega ad esempio α e β in punti distinti, esso sega in una retta l' $S_4: \alpha\beta$; quindi (A, n. 2) F si compone di parti ciascuna delle quali sta in un S_5 passante per quell' S_4 ; e lo stesso discorso può ripetersi per ogni altra coppia di piani estratta dalla quintupla $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ e seganti il generico piano tangente di F in punti distinti. Ne segue che F sta nell' S_5 che contiene $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$.

Si giunge così al seguente teorema: *Una superficie F i cui piani tangenti siano tutti incidenti a cinque piani aventi a due a due uno ed un solo punto comune, ma a tre a tre non passanti per un punto e non contenuti in un S_4 , si compone di piani appoggiati ai cinque piani dati e di superficie di Veronese tangenti ai piani stessi.*

11. Da ultimo indico una nuova dimostrazione, che mi sembra particolarmente semplice, del ben noto teorema secondo cui la superficie di Veronese è l'unica superficie non cono d'uno spazio di dimensione ≥ 5 , i cui piani tangenti siano a due a due incidenti. Premesso che una superficie non cono con i piani tangenti a due a due incidenti sta in qualche S_5 (n. 10), sia F una superficie di S_5 verificante tale proprietà, non cono e non situata in S_4 ; e siano A, B due suoi punti generici, α e β i relativi piani tangenti, O ed ω il punto e l' S_4 ch'essi determinano. F possiede un sistema $\Sigma_\alpha \infty^1$ d'indice positivo di curve situate in S_3 passanti per α , ed un analogo sistema Σ_β relativo al piano β . Le curve di Σ_α e Σ_β passanti per un punto comune ad F ed ω , giacciono in ω , che quindi sega F in una linea, passante per A e B , composta di curve comuni ai due sistemi. Ne segue che il piano AOB contiene una curva di F passante per A e per B , la quale al variare di B descrive un sistema ∞^1 e d'indice positivo di curve piane appartenenti ad F e passanti per A ; e similmente esistono su F ∞^1 curve piane passanti per B , costituenti un sistema d'indice positivo. Ma allora la proiezione di F dalla retta AB sopra un generico S_3 , che non può essere multipla⁽¹¹⁾, è una superficie doppiamente rigata: poichè si esclude subito che F sia rigata, essa è una superficie di Veronese.

Scienza delle costruzioni. — *Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico.* Nota II di LEO FINZI, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

In questa Nota riprendo l'argomento svolto in una precedente Nota I, della quale proseguo la numerazione dei paragrafi e delle formule.

§ 7. — SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA FUNZIONE DI CONGRUENZA. — Si può dare della funzione di congruenza Ω , oltre al significato energetico dato nella Nota I, anche la seguente semplice interpretazione geometrica.

Riferiamoci per semplicità al caso piano e a coordinate cartesiane ortogonali x_1 e x_2 . In tal caso Ω può interpretarsi come la derivata seconda mista relativa a due direzioni x_1 e x_2 dello scorrimento γ ad esse relativo che si deve aggiungere allo scorrimento originario ξ_{12} per rendere congruente la deformazione.

Infatti, se:

$$(18) \quad \Omega \equiv \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \xi_{ik/rs} \neq 0,$$

la funzione di congruenza relativa alla defomazione $\xi_{11}, \xi_{12} + \gamma, \xi_{22}$ sarà:

$$(19) \quad \bar{\Omega} \equiv \Omega - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1 \partial x_2}$$

e $\bar{\Omega}$ è nullo allora e allora soltanto che:

$$(20) \quad \Omega = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

La (20) giustifica appunto l'interpretazione pocanzi data della funzione di congruenza Ω .

(11) Infatti i piani trisecanti di una superficie di S_5 non possono essere tutti quadrisecanti; cfr. F. ENRIQUES, *Sulle singolarità che nascono per proiezione di una superficie o varietà algebrica*, «Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari», Pavia 1936, pp. 351-352.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

Nel caso spaziale, sempre riferendosi a coordinate cartesiane ortogonali, la funzione di congruenza Ω^{hj} può esprimersi ancora mediante le derivate seconde di tre scorrimenti secondo le coppie di assi di riferimento. Precisamente, se ci limitiamo a considerare le componenti di Ω^{hj} ad indici diversi (le duali delle funzioni di Morera) che da sole bastano uguagliate a zero a dare le tre condizioni indipendenti di congruenza, in luogo della (20) con ovvio significato dei simboli si ha:

$$(21) \quad \Omega^{12} = \frac{\partial^2 \gamma^{12}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \Omega^{23} = \frac{\partial^2 \gamma^{23}}{\partial x_2 \partial x_3}, \quad \Omega^{31} = \frac{\partial^2 \gamma^{31}}{\partial x_3 \partial x_1}.$$

Ritorniamo al caso piano bidimensionale, riferendoci a coordinate generali. La (18) può scriversi così:

$$(22) \quad \Omega \equiv \Delta\theta - \xi_{ik}^{/ki} \neq 0.$$

Consideriamo la funzione di congruenza relativa alla deformazione $\xi_{ik} + \theta a_{ik}$ ottenuta aggiungendo alla deformazione originaria una deformazione isotropa. La corrispondente funzione di congruenza:

$$(23) \quad \bar{\Omega} = \Omega + \Delta\bar{\theta}$$

sarà nulla allora e allora soltanto che:

$$(24) \quad \Omega = -\Delta\theta.$$

Possiamo perciò dare una ulteriore interpretazione della funzione di congruenza Ω : essa è opposta al Laplaciano della dilatazione cubica $\bar{\theta}$ di una deformazione isotropa che si deve aggiungere alla deformazione originaria per renderla congruente.

Quest'ultima interpretazione si estende facilmente anche alle membrane tese su superfici a curvatura costante K . In tal caso, per la (9), al secondo membro della (24) occorre aggiungere l'addendo $-K\bar{\theta}$ ottenendo:

$$(25) \quad \Omega = -(\Delta\bar{\theta} + K\bar{\theta}).$$

§ 8. — LEGAME GENERALE FRA EQUILIBRIO E CONGRUENZA. — Le equazioni di equilibrio di un generico continuo privo di forze distribuite nel campo C che lo rappresenta, sono le tre equazioni alle derivate parziali del primo ordine (4). Le corrispondenti equazioni di congruenza sono le sei equazioni differenziali del secondo ordine (6) che, grazie alla identità (7), si riducono a tre sole distinte.

Se il continuo considerato è soggetto a vincoli distribuiti nel campo C , come tipicamente avviene nel caso di una membrana tesa su una superficie prestabilita, le equazioni indefinite di equilibrio contengono le reazioni vincolari λ a priori incognite, e le condizioni di congruenza sono subordinate alle relazioni geometriche che traducono i vincoli.

Sia dalle equazioni di equilibrio che da quelle di congruenza si possono trarre delle equazioni *pure*, liberate cioè dalle reazioni vincolari λ e indipendenti da relazioni esprimenti i vincoli. Un esempio semplice di tale fatto

può essere ravvisato nelle membrane tese su una superficie a curvatura costante di cui si è detto al § 4: le equazioni pure di equilibrio sono le (1) e le (8) ne danno l'integrale generale; la condizione pure di congruenza è la (9).

Come si passa per un generico continuo vincolato dall'integrale generale delle equazioni di equilibrio alle condizioni di congruenza e viceversa?

Le considerazioni generali svolte nei §§ 5-6 ci fanno certi della possibilità di tale operazione. Mostriamo come si procede muovendo da un'ampia estensione dei casi fin qui contemplati.

Come nel caso di una membrana distesa su una superficie generica, il tensore degli sforzi sia dato dal generico tensore doppio simmetrico $p^{ik} = p^{ki}$ ($i, k = 1, 2$). Riferendoci a coordinate generiche, l'integrale generale delle equazioni indefinite di equilibrio abbia la seguente forma che generalizza la (8):

$$(26) \quad p^{ik} = A^{ik} \chi + B^{ikr} \chi_{|r} + C^{ikrs} \chi_{|rs} + D^{ikrsl} \chi_{|rsl} + \dots$$

dove χ è la funzione di equilibrio (a priori arbitraria) e A^{ik} , B^{ikr} , ecc. sono tensori funzioni conosciute delle coordinate x_1 e x_2 (con simmetrie rispetto agli indici i e k).

Applichiamo il principio dei lavori virtuali nella forma duale (13). Avremo:

$$(27) \quad \int_C \xi_{ik} A^{ik} \delta \chi dC + \int_C \xi_{ik} B^{ikr} \delta \chi_{|r} dC + \int_C \xi_{ik} C^{ikrs} \delta \chi_{|rs} dC + \\ + \int_C \xi_{ik} D^{ikrsl} \delta \chi_{|rsl} dC + \dots = 0.$$

Integrando per parti e osservando che al contorno $\delta \chi$ è nullo con le sue derivate, si ottiene:

$$(28) \quad \int_C [A^{ik} \xi_{ik} - (B^{ikr} \xi_{ik})_{|r} + (C^{ikrs} \xi_{ik})_{|rs} - (D^{ikrsl} \xi_{ik})_{|rsl} + \dots] \delta \chi dC = 0.$$

Imponendo alla (28) di essere verificata qualunque sia $\delta \chi$, si ottiene la seguente condizione di congruenza:

$$(29) \quad \Omega \equiv A^{ik} \xi_{ik} - (B^{ikr} \xi_{ik})_{|r} + (C^{ikrs} \xi_{ik})_{|rs} - (D^{ikrsl} \xi_{ik})_{|rsl} + \dots = 0.$$

Nel caso piano e più generalmente di una membrana sviluppabile, si ha:

$$(30) \quad A^{ik} = 0, \quad B^{ikr} = 0, \quad C^{ikrs} = \epsilon^{ir} \epsilon^{ks}, \quad D^{ikrsl} = 0, \text{ ecc.}$$

e la (29) diviene la (3).

Nel caso di una membrana tesa su di una superficie a curvatura K costante si ha:

$$(31) \quad A^{ik} = K a^{ik}, \quad B^{ikr} = 0, \quad C^{ikrs} = \epsilon^{ir} \epsilon^{ks}, \quad D^{ikrsl} = 0, \text{ ecc.}$$

e la (29) diviene la (9).

Siamo così passati dall'integrale generale (26) delle equazioni di equilibrio all'equazione (29) di congruenza. Eseguiamo ora il passaggio inverso.

Supponiamo che la condizione di congruenza abbia la seguente forma che generalizza la (9):

$$(32) \quad \Omega \equiv \alpha^{ik} \xi_{ik} + \beta^{ikr} \xi_{ik|_r} + \gamma^{ikrs} \xi_{ik|_{rs}} + \delta^{ikrsl} \xi_{ik|_{rsl}} + \dots = 0$$

dove α^{ik} , β^{ikr} , ecc. sono tensori funzioni conosciute delle coordinate x_1 e x_2 (con simmetrie rispetto agli indici i e k).

Se i coefficienti α^{ik} , β^{ikr} , ecc. sono costanti (come avviene nel caso piano, per le membrane distese su una sviluppabile o su una superficie a curvatura costante) è immediato porre la (32) nella forma (29) e scrivere quindi la (26) così:

$$(33) \quad p^{ik} = \alpha^{ik} \chi - \beta^{ikr} \chi_{|_r} + \gamma^{ikrs} \chi_{|_{rs}} - \delta^{ikrsl} \chi_{|_{rsl}} + \dots$$

Nel caso generale è sempre possibile porre la (32) nella forma (29) ed esprimere quindi i tensori A^{ik} , B^{ikr} , ecc. in funzione dei tensori dati α^{ik} , β^{ikr} , ecc., così da poter scrivere la (26).

Constatiamolo nel caso in cui nella (32) manchino le derivate di ordine superiore al terzo.

In questo caso si ha:

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^{ikrsl} = -D^{ikrsl} \\ \gamma^{ikrs} = C^{ikrs} - D^{ikrsl}_{|_l} - D^{ikrls}_{|_l} - D^{ikslr}_{|_l} \\ \beta^{ikr} = -B^{ikr} + C^{iksr}_{|_s} + C^{ikrs}_{|_s} - D^{ikslr}_{|_{sl}} - D^{ikrsl}_{|_{sl}} - D^{iksr}_{|_{sl}} \\ \alpha^{ik} = A^{ik} - \beta^{ikr}_{|_r} + C^{ikrs}_{|_{rs}} - D^{ikrsl}_{|_{rsl}} \end{array} \right.$$

da cui:

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^{ik} = \alpha^{ik} - \beta^{ikr}_{|_r} + \gamma^{iksr}_{|_s} - \delta^{iklsr}_{|_{rsl}} \\ B^{ikr} = -\beta^{ikr} + (\gamma^{ikrs} + \gamma^{iksr})_{|_s} - (\delta^{ikrsl} + \delta^{ikslr} + \delta^{iksr}_{|_{sl}})_{|_l} \\ C^{ikrs} = \gamma^{ikrs} - (\delta^{ikrls} + \delta^{ikrsl} + \delta^{ikslr})_{|_l} \\ D^{ikrsl} = -\delta^{ikrsl} \end{array} \right.$$

§ 9. - APPLICAZIONE ALLE MEMBRANE TESE SU SUPERFICI DI ROTAZIONE. - Nel caso di una membrana tesa su una superficie di rotazione a curvatura K non costante, si conosce in coordinate generali l'equazione di congruenza, non si conosce invece, in coordinate generali, l'integrale generale delle equazioni di equilibrio, ma soltanto quello riferito a coordinate opportune⁽¹⁾.

Come applicazione del procedimento generale illustrato al paragrafo precedente dedurrò facilmente l'integrale generale delle equazioni di equilibrio in coordinate generali, ampliando così quanto è noto per le membrane

(1) E. STORCHI, *Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei sistemi continui su una superficie di rotazione*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. VII, 1949.

THE ... OF THE ...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

...

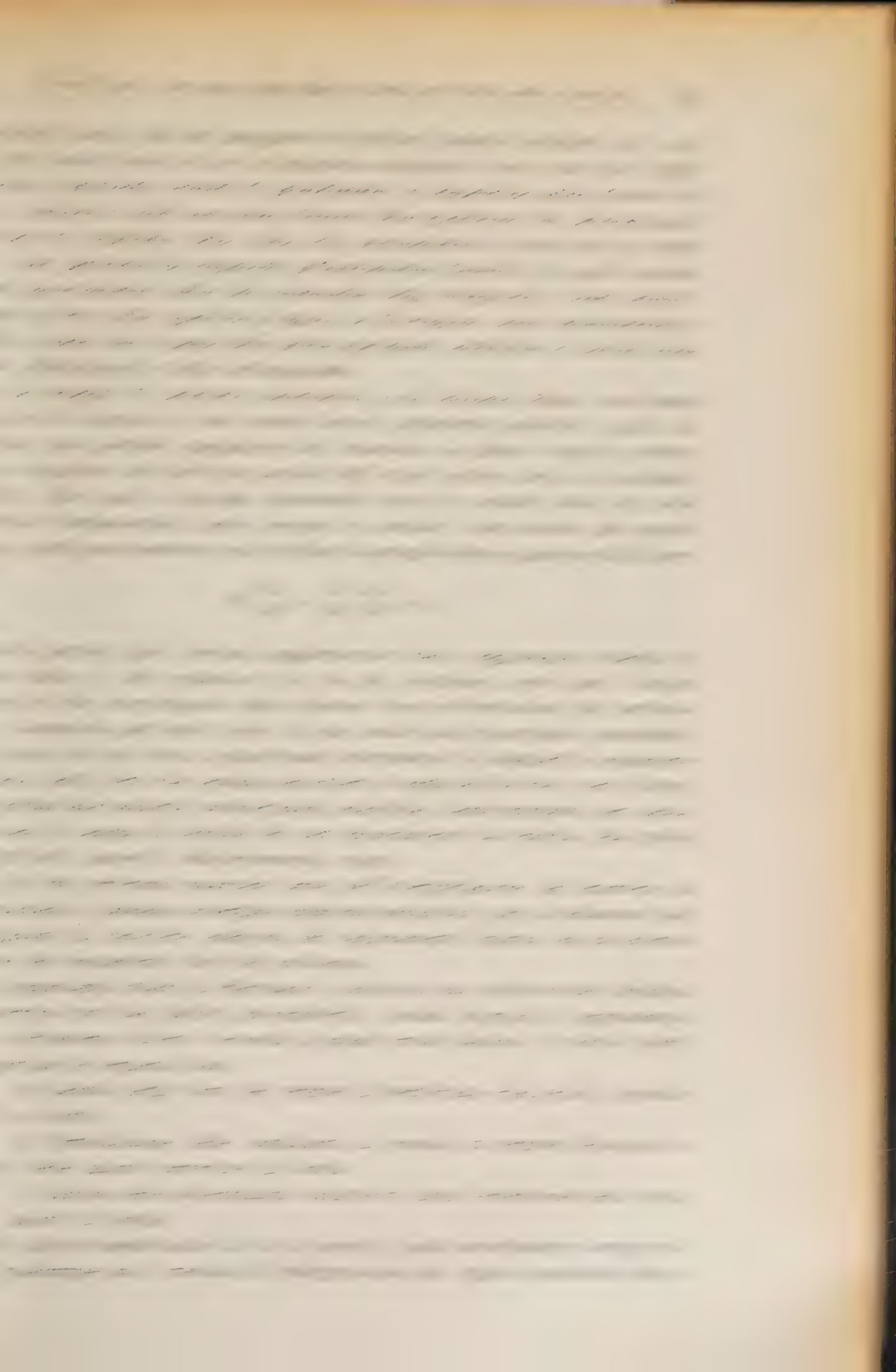
...

...

...

...

...



considera. Le cose si presentano invece diversamente per quanto si riferisce alle operazioni di calcolo $b)$ e $c)$.

Supponiamo, in un primo tempo, di prendere in esame una volta libera ai bordi. In tal caso le azioni correttive consistono notoriamente in una distribuzione di sollecitazioni eguali e contrarie alle tensioni normali trasversali e alle tensioni tangenziali indotte dal regime membranale sui bordi della volta (sollecitazioni che non risultano equilibrate da reazioni esterne). Le differenze fra i risultati dei due metodi compariranno quindi soltanto nella fase $c)$ del calcolo, nel passaggio cioè dai valori, identici nei due casi, dalle azioni correttive di bordo a quelli delle corrispondenti sollecitazioni nel punto generico. Ed è ovvio che lo scarto fra i risultati finali del calcolo saranno in diretto rapporto con le divergenze esistenti fra i valori assunti nei due casi dai fattori caratteristici attraverso i quali si effettua il passaggio suddetto.

A conclusioni affatto diverse si giunge se si esamina il caso di una volta vincolata. Supponiamo, per fissare le idee, che il bordo della volta sia soggetto ad un vincolo che ne impedisca lo spostamento in senso orizzontale. In tal caso noi saremo indotti a calcolare la reazione correttiva H_L data dal vincolo a mezzo di una equazione di deformazione, nella quale dovremo naturalmente introdurre i valori dei coefficienti d'influenza relativi ai bordi che competono al metodo di calcolo preso in esame. Supponiamo allora che il coefficiente raffigurante lo spostamento orizzontale per forze orizzontali applicate ai bordi assuma un valore assoluto maggiore nel primo che nel secondo metodo. Ciò significa che il primo metodo attribuisce alla volta una maggiore deformabilità in presenza di forze orizzontali. Noi possiamo quindi prevedere che, a parità delle altre condizioni, nel gioco iperstatico fra volta e vincolo, il valore assoluto della reazione correttiva H_L risulterà più debole nel primo metodo che nel secondo. Ciò che d'altronde risulta evidente se si ricava H_L dall'equazione di deformazione.

Un ulteriore e più attento esame del fenomeno fisico ci consente però di formulare un'altra importante previsione. Poiché nei due procedimenti di calcolo si opera sulla stessa struttura, caratterizzata da rigidezze flessionale ed estensionale ovviamente identiche nell'uno e nell'altro caso, è ovvio che il metodo che attribuisce alla volta una maggiore deformabilità dovrà anche, in linea generale, attribuire valori assoluti maggiori alle sollecitazioni indotte dall'azione di bordo considerata ⁽¹⁾.

Donde la conclusione che il primo metodo darà bensì luogo ad una azione correttiva H_L di minore intensità, ma che, nel calcolo delle sollecitazioni nel punto generico, lo scarto esistente fra le reazioni orizzontali ai bordi sarà controbilanciato dall'aumento del valore assoluto dei coefficienti

(1) Nei nostri ragionamenti noi ammettiamo sempre implicitamente che i due procedimenti di calcolo conducano a sollecitazioni dello stesso segno, ciò che si verifica sempre se ci si riferisce ai punti più sollecitati della volta (quelli che offrono precisamente maggiore interesse in sede pratica).

caratteristici attraverso i quali si effettua il passaggio dei valori delle reazioni a quelli delle sollecitazioni agenti nel punto generico.

Analogo risultato si ottiene ragionando sugli altri coefficienti d'influenza. Supponiamo ad esempio che nel primo metodo la vòlta risulti più deformabile in presenza di forze verticali. È quindi logico prevedere che le tensioni indotte da tali forze saranno in genere più intense nel primo procedimento di calcolo. Dal canto suo l'equazione di deformazione darà, in questo caso, una reazione orizzontale maggiore in valore assoluto nel primo che nel secondo metodo. Immaginiamo allora di scrivere, nei due casi, l'espressione di una qualsiasi caratteristica dello stato di sollecitazione nel punto generico. Tale espressione comporterà quattro termini: un termine membranale, un termine in H_L , un termine dipendente dall'azione delle forze verticali, un termine dipendente dalle azioni tangenziali. Fra questi solo il secondo e il terzo risentiranno l'influenza dell'ipotesi fatta sulla deformabilità della vòlta per effetto di forze verticali. Più precisamente si troverà che ambedue i termini suddetti assumeranno valore assoluto maggiore nel primo metodo a causa degli incrementi simultanei dell'intensità della reazione orizzontale e dei coefficienti caratteristici relativi alle azioni di bordo verticali. È però evidente che tali due termini saranno generalmente di segno opposto (l'azione correttiva iperstatica H_L ha infatti la funzione di annullare gli spostamenti orizzontali dati dalle altre cause). Anche in questo caso si riscontra quindi una tendenza alla compensazione delle differenze fra risultati finali ottenuti coi due diversi metodi.

È ovvio che nella pratica le cose non si svolgeranno nel modo schematico che, per comodità di ragionamento, noi abbiamo supposto. In effetti i vari coefficienti d'influenza varieranno tutti simultaneamente e le conseguenze delle loro variazioni s'intrecceranno nei calcoli. In ogni caso però il principio di sovrapposizione ci consente di prevedere che l'effetto delle variazioni dei diversi parametri continuerà ad essere regolato dalle circostanze precedentemente illustrate ⁽²⁾. Quanto dire che, almeno per le sollecitazioni più importanti, l'influenza combinata del gioco iperstatico fra vòlta e vincoli e della interdipendenza fra deformazioni e tensioni calcolate con uno stesso procedimento tenderanno a smorzare le differenze fra risultati finali dei calcoli. E si può peraltro prevedere che questo smorzamento sarà tanto più sentito quanto più efficaci risulteranno le condizioni di vincolo ai bordi.

Tale risultato può d'altronde essere sintetizzato anche sotto un'altra semplicissima forma se si osserva che l'introduzione di vincoli via via più efficaci, imponendo alla deformazione della vòlta delle condizioni sempre

(2) Quando le condizioni di deformazione imposte ai bordi siano molteplici l'equazione unica da noi considerata sarà sostituita da un sistema di equazioni lineari. In tal caso si dovrà ragionare sulla colonna dei coefficienti di una stessa variabile, ciò che è lecito dal momento che tali coefficienti, legati fra loro da precise relazioni di carattere fisico subiscono, nel passaggio dall'uno all'altro metodo, variazioni dello stesso senso e dello stesso ordine di grandezza.

più precise, ha come naturale conseguenza di rendere meno sensibile l'effetto di eventuali differenze fra le raffigurazioni dello stato di equilibrio della volta ottenute con diversi metodi di calcolo.

In altro lavoro chi scrive si propone d'illustrare in modo più ampio le considerazioni che sono state brevemente riassunte in forma puramente qualitativa nella presente Nota. Sin d'ora tuttavia possiamo rilevare che le nostre considerazioni sembrano costituire una spiegazione molto soddisfacente dell'impossibilità riscontrata da molti Autori di caratterizzare il campo di validità di un dato procedimento di calcolo a mezzo di parametri il cui valore sia funzione delle sole dimensioni della volta esaminata. Appare infatti evidente, alla luce di quanto abbiamo esposto in precedenza, che i limiti di applicabilità di un metodo dipendono, non soltanto dalle caratteristiche geometriche della volta, ma anche, e in misura sostanziale, dalla efficacia delle condizioni di vincolo.

Ci sia peraltro lecito segnalare la brillante conferma che il nostro punto di vista riceve dagli esempi numerici svolti da vari autori al « Symposium of Concrete Shell Roof Construction » svoltosi a Londra nel 1952. Fra i tanti segnaleremo gli esempi citati da Hobbs che possono sintetizzarsi come segue: una stessa volta sottile, avente caratteristiche lontanissime da quelle che il Schörer riteneva idonee all'applicazione del proprio metodo, calcolata in diverse condizioni di vincolo coi procedimenti di Schörer e Jenkins ha denotato i seguenti scarti massimi fra i valori del momento M_2 :

volta libera ai bordi: scarto del 100 %;

volta vincolata ai bordi ad una trave orizzontale relativamente snella: scarto del 14-20 %;

volta vincolata ad una trave verticale rigida: scarti quasi trascurabili.

Vogliamo infine osservare, per concludere, che i ragionamenti, svolti nell'attuale Nota nel caso particolare di volte sottili cilindriche simmetriche, si possono estendere al caso di volte di altra forma.

BIBLIOGRAFIA.

- SCHÖRER H., *Line load action on thin cylindrical shells*. « Proc. Am. Soc. C. E. », pp. 281-316 (1935).
JENKINS R. S., *Theory and design of cylindrical shell structures*. O. N. Arup. London 1947.
Proceedings of a symposium on concrete shell roof construction. « Cement and Conc. Ass. » London 1952. Discussion on a paper by Dr. Mc. Namee, p. 62.

Meccanica celeste. — *Piccoli movimenti in una massa gassosa stellare in equilibrio radiativo.* Nota II di CATALDO AGOSTINELLI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Continuando lo studio iniziato nella Nota I precedente, considero ora i piccoli movimenti in una massa gassosa stellare quando si tenga conto della pressione dell'energia e si suppone che il calore si propaghi essenzialmente per irradiazione. Nell'ipotesi semplificativa di Eddington in cui al *coefficiente di generazione dell'energia* e al cosiddetto *coefficiente di opacità* si sostituiscono i loro valori medi, riconduco ancora la questione alla determinazione della velocità delle particelle fluide soddisfacente ad un'equazione analoga a quella stabilita nel caso dell'evoluzione adiabatica. Dopo ciò risulta determinato, con una quadratura rispetto al tempo, l'incremento della densità in confronto di quella che si ha in condizioni di equilibrio, mentre l'incremento della pressione dell'energia va determinato risolvendo un'altra equazione differenziale del 2° ordine. Si hanno quindi immediatamente la pressione totale e la temperatura. Naturalmente la questione si semplifica molto nel caso particolarmente interessante di moto puramente radiale e di grandezze dipendenti soltanto dalla distanza dal centro e dal tempo.

2. Con le stesse notazioni della Nota I, l'equazione vettoriale indefinita del movimento interno alla massa gassosa sarà ancora

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{rot } \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \text{grad } (\mathbf{v}^2) = \text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

dove la pressione p è ora uguale alla somma della pressione p_g del gas e della pressione p_e dell'energia ⁽¹⁾. La pressione del gas sarà data al solito da

$$(2) \quad p_g = \frac{R}{q} \rho T,$$

mentre, come si sa, la pressione dell'energia è proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta T , si ha cioè

$$(3) \quad p_e = \frac{1}{3} a T^4$$

essendo a una costante legata alla costante di Stefan. Quindi

$$(4) \quad p \equiv p_g + p_e = \frac{R}{q} \rho T + \frac{1}{3} a T^4.$$

Alla (1) va inoltre associata l'equazione di continuità

$$(5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *I fondamenti scientifici dell'Astrofisica*, P. II, Cap. V, n. 45 (Hoepli, Milano, 1953).

Se indichiamo ora con ε il *coefficiente di generazione dell'energia*, che rappresenta l'energia generata in un minuto secondo da un grammo di materia a causa delle reazioni nucleari, un elemento di volume dS del gas genererà al minuto secondo una quantità di energia $dE = \varepsilon \rho dS$, e quindi l'energia E generata al secondo da un volume S di gas sarà data da

$$(6) \quad E = \int_S \varepsilon \rho dS.$$

Nello stato di regime questa quantità di energia sarà anche uguale al flusso di energia che nell'unità di tempo viene irradiata attraverso la superficie chiusa σ che limita il volume S . Ma il flusso Φ di energia raggiante per cm^2 di superficie e per minuto secondo è proporzionale al gradiente della pressione dell'energia, e più precisamente si ha

$$\Phi = - \frac{c}{\omega \rho} \text{grad } p_e \times \bar{n}$$

dove \bar{n} è il versore della normale esterna alla superficie σ considerata, ω è il cosiddetto *coefficiente di opacità*, e c la velocità della luce. Ne segue che si ha anche

$$E = \int_{\sigma} \Phi d\sigma = - c \int_{\sigma} \frac{1}{\omega \rho} \text{grad } p_e \times \bar{n} d\sigma$$

cioè, applicando il teorema della divergenza,

$$(7) \quad E = - c \int_S \text{div} \left(\frac{1}{\omega \rho} \text{grad } p_e \right) dS.$$

Dal confronto della (6) con la (7), per l'arbitrarietà del volume S considerato e nell'ipotesi che le grandezze che figurano sotto i segni di integrale siano tutte funzioni continue del punto, si deduce l'equazione

$$(8) \quad \varepsilon \rho + c \text{div} \left(\frac{1}{\omega \rho} \text{grad } p_e \right) = 0,$$

dove ε ed ω , nel caso più generale sono da ritenersi funzioni note del punto e del tempo. Se si osserva ancora che il potenziale U in punti interni, dovuto alle forze newtoniane di mutua attrazione delle particelle fluide, soddisfa alla equazione di Poisson

$$\Delta_2 U \equiv \text{div grad } U = - 4 \pi f \rho,$$

prendendo la divergenza di ambo i membri della (1) si ha

$$(9) \quad \frac{\partial \text{div } \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div} (\text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \Delta_2 (\mathbf{v}^2) + 4 \pi f \rho + \text{div} \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } p \right) = 0.$$

Le equazioni (9), (5), (8), (3) e (4), vengono così a costituire un sistema di cinque equazioni in cui sono incognite la velocità \mathbf{v} delle particelle gassose, la densità ρ , la pressione totale p , la pressione p_e dell'energia e la temperatura T .

Si può eliminare la temperatura T , osservando che dalle (3) e (4) si ha

$$(10) \quad (p - p_e)^4 = \frac{3 R^4}{a q^4} \rho^4 p_e.$$

3. Nel caso dell'equilibrio radiativo sferico, e nell'ipotesi semplificativa di Eddington in cui ω ed ε si possono ritenere costanti per un dato astro, od uguali ai loro valori medi, le equazioni (9), (5), (8), si riducono alle seguenti due

$$(11) \quad 4 \pi f \rho + \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) = 0$$

$$(12) \quad \varepsilon \rho + \frac{c}{\omega} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p_e \right) = 0$$

alle quali va associata la (10), e le quantità incognite ρ , p , p_e che compaiono in queste ultime equazioni sono ora funzioni soltanto della distanza r dal centro della sfera.

Dalle (11) e (12), posto

$$(13) \quad 1 - \beta = \frac{\omega \varepsilon}{4 \pi f c},$$

con β costante, si ricava

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p_e \right) = (1 - \beta) \operatorname{div} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right)$$

cioè

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d p_e}{dr} \right) = (1 - \beta) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{1}{\rho} \frac{d p}{dr} \right)$$

da cui, integrando da 0 ad r , si ottiene

$$\frac{d p_e}{dr} = (1 - \beta) \frac{d p}{dr}.$$

Integrando un'altra volta, osservando che la costante d'integrazione deve essere nulla poiché in superficie p_e e p si annullano entrambe, si ha la nota relazione

$$(14) \quad p_e = (1 - \beta) p.$$

Allora, eliminando p_e dalla (10) si deduce

$$(15) \quad p = C \rho^{4/3}, \quad \text{con} \quad C = \left[\frac{3 R^4 (1 - \beta)}{a q^4 \beta^4} \right]^{1/3}$$

e sostituendo questo valore di p nella (11), si deduce facilmente, per l'incognita densità ρ , la ben nota equazione

$$(16) \quad \pi f \rho + C \left(\frac{d^2 \rho^{1/3}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \rho^{1/3}}{dr} \right) = 0$$

che coincide con quella di Emden dell'equilibrio adiabatico per $\nu = 3$, cioè per $\gamma = 4/3$, salvo il diverso valore della costante C .

4. Ciò premesso consideriamo ora i piccoli movimenti nell'intorno della soluzione di Eddington relativa all'equilibrio radiativo sferico e poniamo per questo

$$(17) \quad \rho = \rho^* (1 + \xi) \quad , \quad p = p^* (1 + \eta) \quad , \quad p_e = p_e^* (1 + \eta_e),$$

dove ρ^*, p^*, p_e^* sono ora i valori di ρ, p, p_e nel caso dell'equilibrio, mentre ξ, η, η_e , definiscono i corrispondenti incrementi che si hanno nel movimento. Queste quantità, che saranno funzioni del punto P e del tempo t , le supporremo sufficientemente piccole, dell'ordine della velocità \mathbf{v} , in modo da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo in \mathbf{v}, ξ, η ed η_e . Così facendo, e tenendo conto delle equazioni cui soddisfano ρ^*, p^*, p_e^* le equazioni (9), (5), (8) e (10) si riducono alle seguenti

$$(18) \quad \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial t} + 4 \pi f \rho^* \xi + \operatorname{div} \left[\frac{1}{\rho^*} \operatorname{grad} (p^* \eta) - \frac{\xi}{\rho^*} \operatorname{grad} p^* \right] = 0$$

$$(19) \quad \rho^* \frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v}) = 0$$

$$(20) \quad \rho^* \xi + \frac{c}{\omega \varepsilon} \operatorname{div} \left[\frac{1}{\rho^*} \operatorname{grad} (p_e^* \eta_e) - \frac{\xi}{\rho^*} \operatorname{grad} p_e^* \right] = 0$$

$$(21) \quad 4 \frac{p^* \eta - p_e^* \eta_e}{p^* - p_e^*} = 4 \xi + \eta_e.$$

In virtù della (14) dalla (21) si ricava

$$(22) \quad \eta_e = \frac{4(\eta - \beta \xi)}{4 - 3\beta}$$

il cui denominatore è certamente diverso da zero essendo β compreso fra 0 e 1. Sostituendo nella (20) si deduce

$$\frac{\omega \varepsilon (4 - 3\beta)}{4c(1 - \beta)} \rho^* \xi + \operatorname{div} \left[\frac{1}{\rho^*} \operatorname{grad} (p^* \eta) - \frac{\beta}{\rho^*} \operatorname{grad} (p^* \xi) - \frac{4 - 3\beta}{4} \frac{\xi}{\rho^*} \operatorname{grad} p^* \right] = 0$$

e sottraendo questa dalla (18), ricordando la (13), si ottiene

$$\frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial t} + 3 \pi f \beta \rho^* \xi - \beta \operatorname{div} \left[\frac{3}{4} \frac{\xi}{\rho^*} \operatorname{grad} p^* - \frac{1}{\rho^*} \operatorname{grad} (p^* \xi) \right] = 0.$$

Ma per la (15) è $p^* = C \rho^{*4/3}$, si ha perciò infine

$$(23) \quad \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{v}}{\partial t} + 3 \pi f \beta \rho^* \xi + \beta C \operatorname{div} \operatorname{grad} (\rho^{*1/3} \xi) = 0,$$

che è un'equazione in cui compaiono come incognite soltanto la velocità \mathbf{v} e la quantità ξ , osservando che $\rho^*(r)$ è fornita dalla risoluzione (nota numericamente) dell'equazione (16) di Emden. Alla (23) va associata l'equazione (19) contenente le stesse incognite. Per eliminare la ξ da queste ultime, e ridurci

ad un'equazione in cui è incognita la sola velocità \mathbf{v} , basta derivare ambo i membri della (23) rispetto a t , ricordando che ρ^* è indipendente da t , e sostituire a $\partial\xi/\partial t$ il valore che si ricava dalla (19). Così facendo si ottiene

$$(24) \quad \operatorname{div} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - 3 \pi f \beta \cdot \rho^* \mathbf{v} - \beta C \operatorname{grad} [\rho^{*-2/3} \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v})] \right\} = 0,$$

che si identifica sostanzialmente, salvo i valori dei coefficienti numerici costanti, con l'equazione (12) della Nota I relativa al caso dell'evoluzione adiabatica e nella quale si faccia $\nu = 3$.

È opportuno osservare ancora in questa Nota che dalla (24) segue che deve essere

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - 3 \pi f \beta \rho^* \mathbf{v} - \beta C \operatorname{grad} [\rho^{*-2/3} \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v})] = \operatorname{rot} \mathbf{w}$$

con \mathbf{w} vettore arbitrario, funzione del punto e del tempo, eventualmente nullo.

Con riferimento a coordinate sferiche r, θ, φ , indicando con v_r, v_θ, v_φ le componenti di \mathbf{v} rispettivamente nella direzione radiale, nella direzione in cui cresce la colatitudine θ e in quella in cui cresce la longitudine φ , e con W_r, W_θ, W_φ le analoghe componenti di $\operatorname{rot} \mathbf{w}$, dalla (25) si deducono le seguenti equazioni scalari

$$(25') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} - 3 \pi f \beta \cdot \rho^* v_r - \beta C \frac{\partial}{\partial r} [\rho^{*-2/3} \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v})] = W_r \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial t^2} - 3 \pi f \beta \cdot \rho^* v_\theta - \beta C \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho^{*-2/3} \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v})] = W_\theta \\ \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial t^2} - 3 \pi f \beta \cdot \rho^* v_\varphi - \beta C \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\rho^{*-2/3} \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v})] = W_\varphi \end{cases}$$

dove è

$$\operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho^* v_r) + \frac{\rho^*}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right].$$

Determinate le componenti v_r, v_θ, v_φ della velocità, con la condizione che esse si annullino per $r = 0$, dalla (19), con una quadratura rispetto al tempo si ricava la quantità ξ che definisce la variazione della densità. La (20), dove è

$$p_e^* = (1 - \beta) p^* = (1 - \beta) C \rho^{*4/3},$$

definisce quindi la quantità η_e da cui dipende la variazione della pressione dell'energia; infine la (22) fornisce la quantità η che dà la variazione della pressione totale.

Giova osservare come derivando ambo i membri della (20) rispetto a t ed eliminando la $\partial\xi/\partial t$ per mezzo della (19), tenendo conto che è $p_e^* = (1 - \beta) p^* = (1 - \beta) C \rho^{*4/3}$, si ha l'equazione

$$(20') \quad \operatorname{div} \left\{ \frac{1}{\rho^*} \operatorname{grad} \left(\rho^{*4/3} \frac{\partial \eta_e}{\partial t} \right) + \frac{4}{\rho^*} \operatorname{grad} \rho^{*1/3} \cdot \operatorname{div} (\rho^* \mathbf{v}) - \frac{4 \pi f}{C} \rho^* \mathbf{v} \right\} = 0,$$

che definisce direttamente la funzione incognita η_e una volta determinata la velocità v .

5. Nel caso particolarmente importante di moto puramente radiale ($v_\theta = 0, v_\varphi = 0$), con $v_r = v$ funzione soltanto di r e di t , come nella Nota I si riconosce che deve essere $\text{rot } \mathbf{w} = 0$, e il sistema (25') si riduce all'unica equazione

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 3\pi f \beta \cdot \rho^* v - \beta C \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \rho^{*-2/3} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\rho^* v) + \frac{2}{r} \rho^* v \right] \right\} = 0,$$

la quale, tenendo conto dell'equazione (16) cui soddisfa la ρ^* , si riduce alla seguente

$$(26) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \beta C \left\{ \rho^{*1/3} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2 \left(2 \frac{d\rho^{*1/3}}{dr} + \frac{1}{r} \rho^{*1/3} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \right\} = 0$$

che corrisponde all'equazione (18) della Nota I quando si faccia $\nu = 3$.

Osserviamo ancora che la (19), che serve a determinare la ξ , diventa ora

$$(27) \quad \rho^* \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho^* v) + \frac{2}{r} \rho^* v = 0,$$

mentre la (20'), dove l'operazione div comporta ora soltanto una derivazione rispetto ad r , porge, per la determinazione della funzione incognita η_e , l'equazione

$$(28) \quad \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho^{*4/3} \frac{\partial \eta_e}{\partial t} \right) + \frac{4}{\rho^*} \frac{d\rho^{*1/3}}{dr} \left[\frac{d}{dr} (\rho^* v) + \frac{2}{r} \rho^* v \right] - \frac{4\pi f}{C} \rho^* v = 0.$$

Nel caso particolare di pulsazioni sinusoidali rispetto al tempo, ponendo $v = V(r) \sin \Omega(t - t_0)$, $\xi = \xi_1(r) \cos \Omega(t - t_0)$, $\eta_e = \eta_1(r) \cos \Omega(t - t_0)$ la (26) porge per la $V(r)$ l'equazione

$$\rho^{*1/3} \frac{d^2 V}{dr^2} + 2 \left(2 \frac{d\rho^{*1/3}}{dr} + \frac{1}{r} \rho^{*1/3} \right) \left(\frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} \right) + \frac{\Omega^2}{\beta C} V = 0,$$

mentre la (27) dà

$$\xi_1(r) = \frac{1}{\Omega} \left[\frac{dV}{dr} + \left(\frac{d \log \rho^*}{dr} + \frac{2}{r} \right) V \right]$$

e infine dalla (28) si ricava

$$\frac{d}{dr} \left(\rho^{*4/3} \eta_1 \right) = \frac{4}{\Omega} \frac{d\rho^{*1/3}}{dr} \left[\frac{d}{dr} (\rho^* V) + \frac{2}{r} \rho^* V \right] - \frac{4\pi f}{C \Omega} \rho^{*2} V,$$

che serve a determinare la $\eta_1(r)$, con una quadratura rispetto ad r , quando sia nota la $V(r)$.

Queste ultime equazioni, dove ρ^* è noto dall'integrazione dell'equazione di Emden, sono idonee, mediante integrazione numerica, alla determinazione delle funzioni $V(r)$, $\xi_1(r)$, $\eta_1(r)$, con la condizione che nel centro della sfera sia nulla la velocità, nonché il gradiente della pressione totale, come si riconosce dalla (1), osservando che nel centro dell'astro la gravità è nulla.

Astronomia. — *Sulla stabilità degli ammassi globulari nella più generale ipotesi della distribuzione sferica della loro densità.* Nota II di MASSIMO CIMINO, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. In una recente Nota dallo stesso titolo ⁽¹⁾ ho assegnato le condizioni generali di stabilità di una stella di un ammasso globulare rispetto alle perturbazioni galattiche, assumendo per la distribuzione della densità stellare dell'ammasso la legge più generale possibile, purché a simmetria sferica. Supponevo, inoltre, che l'orbita dell'ammasso attorno al centro della Galassia [supposta anche essa a simmetria sferica] fosse circolare. Chiamando allora con M ed m le masse della Galassia e dell'ammasso globulare, con n ed a il moto medio e la distanza di quest'ultimo dal centro galattico e con $U(r)$ il potenziale newtoniano unitario generato dall'ammasso alla distanza r dal suo centro, le *condizioni di stabilità* alle quali deve soddisfare l'energia totale E del moto relativo all'ammasso di una sua qualsiasi stella (di massa unitaria) sono:

$$(I) \quad 0 > E > -U(0), \quad [\text{essendo } U(0) > 0],$$

e che l'equazione in r :

$$(II) \quad 2[U(r) + E] = -3n^2r^2$$

ammetta una radice reale e positiva.

Rinviamo alla citata Nota per ogni altra delucidazione, vogliamo ora applicare le condizioni generali (I) (II) al caso concreto astronomico; ma per far questo è necessario, innanzi tutto, specificare la legge di distribuzione della densità nell'ammasso. In verità, una legge che sia in grado di rappresentare bene e in ogni caso i risultati delle osservazioni non è stata ancora trovata e, forse, è difficile poterla assegnare; però, se ci contentiamo di una approssimazione discreta, c'è una legge che meglio si presta delle altre allo scopo e con la quale, ad ogni modo, è possibile rappresentare la distribuzione della densità nell'ammasso globulare assai meglio che non con la grossolana ipotesi della omogeneità, quasi sempre adottata dagli autori. Si tratta della ben nota distribuzione di Schuster-Plummer ⁽²⁾, la quale dà per la densità μ in funzione della distanza r dal centro dell'ammasso:

$$(I) \quad \mu(r) = \frac{B}{(\alpha^2 + r^2)^{5/2}},$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) Questi « Rendiconti », fasc. 2, pp. 217-223 (1956).

(2) Cfr. per esempio: W. M. SMART, *Stellar dynamics*, Cambridge 1938, pp. 306-307. La (1) fu assegnata, per primo, dallo Schuster nello studio del caso $n = 5$ dell'equazione di Emden dei gas politropici, e poi applicata dal Plummer e da altri allo studio della densità stellare negli ammassi globulari.

α e B essendo delle costanti che possono essere assegnate, per ciascun ammasso, attraverso conteggi di stelle. Il parametro α lo chiameremo *raggio dell'ammasso omogeneo equivalente* [o, brevemente, *raggio equivalente*], e rappresenta il raggio che dovrebbe avere un ammasso omogeneo di ugual massa totale e densità pari a quella centrale B/α^5 dell'ammasso schusteriano. È infatti facile provare che la massa totale m dell'ammasso è:

$$(2) \quad m = \frac{4\pi}{3} \frac{B}{\alpha^2}.$$

Il parametro α è, dunque, un indice della concentrazione centrale delle stelle dell'ammasso, quest'ultima essendo tanto maggiore quanto più piccolo è α .

2. Passiamo allora ad applicare le condizioni di stabilità (I) e (II) nella ipotesi che la legge di densità nell'ammasso soddisfi alla (1). Con semplice calcolo si ha per il potenziale newtoniano unitario:

$$(3) \quad U(r) = \frac{fm}{(\alpha^2 + r^2)^{1/2}},$$

f essendo il coefficiente attrattivo. Avremo allora per la (I):

$$(4) \quad 0 > E > -\frac{fm}{\alpha},$$

mentre l'equazione (II):

$$(5) \quad \lambda(r) = 2 \frac{fm}{(\alpha^2 + r^2)^{1/2}} + 3n^2 r^2 + 2E = 0$$

dovrà ammettere, subordinatamente alle (4), una radice r reale e positiva.

Nell'ipotesi (4), il primo membro della (5) è positivo per $r = 0$ ed $r = +\infty$. Derivando poi la funzione $\lambda(r)$ rispetto ad r , avremo:

$$(6) \quad \lambda'(r) = -2 \frac{fm \cdot r}{(\alpha^2 + r^2)^{3/2}} + 6n^2 r,$$

la quale mostra, intanto, che $\lambda(r)$ è decrescente nell'intorno dell'origine, ove ha un massimo. Ma la $\lambda'(r)$ si annulla anche per:

$$(7) \quad r_0 = \sqrt{\left[\frac{fm}{3n^2} \right]^{2/3} - \alpha^2}.$$

Affinché la (5) ammetta, dunque, una radice r reale e positiva occorre la *duplicata* condizione che r_0 sia reale e che esso renda negativa o nulla $\lambda(r)$ [sia cioè un minimo *negativo o nullo* per $\lambda(r)$]. Deve perciò risultare, rispettivamente:

$$(8) \quad \frac{fm}{3n^2} > \alpha^3$$

e, con qualche facile trasformazione:

$$(9) \quad [2E - 3n^2\alpha^2]^3 \leq -27 \cdot (3n^2) \cdot (fm)^2.$$

Eliminando infine f con la:

$$(10) \quad fM = n^2 a^3,$$

possiamo così riassumere [riscrivendo, per comodità, anche la (5)] *le condizioni di stabilità della stella, di massa unitaria e di energia totale E, nel suo moto relativo all'ammasso, sotto l'azione delle perturbazioni galattiche:*

$$\begin{cases} (I') & 0 > E > -\frac{fm}{\alpha}; \\ (II'_1) & \frac{m}{M} \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 > 3; \\ (II'_2) & [2E - 3n^2\alpha^2]^3 \leq 27 \cdot (3n^2)^3 \cdot \left(\frac{a^3 m}{3M}\right)^2. \end{cases}$$

Come è stato già posto in luce alla fine del n. 2 della citata Nota I, la condizione (I') esprime semplicemente il fatto che il moto *non perturbato* della stella è possibile e che esso si svolge tutto a distanza finita. Le vere e proprie condizioni di stabilità per le perturbazioni galattiche sono le (II'_1) e (II'_2). La (II'_1) è una *condizione necessaria, ma non sufficiente per la stabilità globale* e riguarda tutte le stelle dell'ammasso. Essa è simile alla (11) della citata Nota I, relativa alle stelle interne di un ammasso omogeneo, ove al posto del suo raggio R si ponga il raggio equivalente α dell'ammasso reale. La (II'_2), invece, stabilisce (subordinatamente alle altre condizioni già ammesse) quali stelle siano effettivamente stabili e quali instabili.

3. Siamo ora in grado di poter trarre, dalla nostra analisi, qualche interessante conclusione di carattere astronomico. Risulta innanzi tutto, dalla condizione (II'_1), che *la concentrazione centrale ha una notevole influenza sulla stabilità*, nel senso che *la maggiore concentrazione favorisce la stabilità*. Così per esempio, un ammasso globulare che abbia una densità centrale cento volte superiore a quella media, avrà un raggio equivalente $\alpha = \sqrt[3]{100} = 4.64$ volte minore del raggio R dell'ammasso omogeneo. Ponendo (come già nell'esempio del n. 1 della citata Nota I): $m = 10 \odot$; $M = 10^{11} \odot$, e sostituendo ad $R \approx 40$ parsec il valore $\alpha \approx 8$, si avrà per la stabilità: $a < 1.500$ parsec, anziché $a < 6.900$.

Come si è detto, la condizione (II'_1) è soltanto necessaria per la stabilità; occorre, una volta soddisfatta, determinare quali siano le stelle effettivamente stabili e quali no. A ciò provvede la condizione (II'_2), nella quale però, al posto dell'energia E , converrà far comparire un parametro geometrico dell'orbita, per esempio la distanza media dal centro dell'ammasso.

Poniamo:

$$(11) \quad v = \frac{1}{r}.$$

Nel moto schusteriano *non perturbato* della stella rispetto all'ammasso, la v soddisfa notoriamente ⁽³⁾ alla equazione differenziale del 2° ordine:

$$(12) \quad \frac{d^2 v}{d\theta^2} + v = -\frac{1}{c^2 v^2} \varphi(1/v) \quad ; \quad \varphi(1/v) = -\frac{fm \cdot v^2}{(\alpha^2 v^2 + 1)^{3/2}},$$

θ essendo l'anomalia e c la costante areolare. Varrà pure l'integrale primo dell'energia:

$$(13) \quad \frac{c^2}{2} \left\{ \left(\frac{dv}{d\theta} \right)^2 + v^2 \right\} = U(1/v) + E \quad ; \quad U(1/v) = \frac{fm \cdot v}{(\alpha^2 v^2 + 1)^{1/2}}.$$

Per semplicità, supponiamo che l'orbita sia circolare, di raggio b . Le (12) (13) saranno allora soddisfatte ivi ponendo:

$$(14) \quad v_0 = \frac{1}{b} \quad , \quad \text{con } b \text{ costante,}$$

e quindi:

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{fm}{c^2} (\alpha^2 v_0^2 + 1)^{-3/2} - v_0 = 0 \\ \frac{c^2}{2} v_0^2 - fm \cdot v_0 (\alpha^2 v_0^2 + 1)^{-1/2} = E. \end{cases}$$

Basterà allora eliminare tra queste ultime relazioni la costante c^2 per ottenere una relazione tra l'energia E ed il raggio $b = 1/v_0$ dell'orbita. Ponendo:

$$(16) \quad \psi(x) = \frac{1 + 2x}{(1+x)^{3/2}},$$

otteniamo facilmente:

$$(17) \quad E = -\frac{fm}{2b} \cdot \psi\left(\frac{\alpha^2}{b^2}\right).$$

Osserviamo che, per $\alpha \rightarrow 0$, - e cioè allorché la massa dell'ammasso tende a concentrarsi nel suo centro -, si cade nella nota relazione kepleriana: $E = -fm/2b$.

Ciò posto, ritorniamo alla relazione (II₂'). Sostituendo ad E il valore (17) ed eliminando con la (10) il coefficiente attrattivo f , avremo la condizione per il raggio b dell'orbita:

$$\frac{1}{b} \cdot \psi\left(\frac{\alpha^2}{b^2}\right) \geq 3 \cdot \left(\frac{a^3 m}{3M}\right)^{-1/3} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a^3 m}{3M}\right)^{-2/3} \cdot \alpha^2 \right\},$$

o anche:

$$(18) \quad \psi\left(\frac{\alpha^2}{b^2}\right) \leq \frac{a}{3 \sqrt[3]{\frac{M}{m}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \left(3 \frac{M}{m}\right)^{2/3} \cdot \frac{\alpha^2}{a^2}}.$$

Osserviamo che per $\alpha \rightarrow 0$ si cade nella condizione:

$$(19) \quad b \leq \frac{a}{3 \sqrt[3]{\frac{M}{m}}},$$

(3) Cfr. per esempio: T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Zanichelli, Bologna 1926, Vol. II, p. 102.

assegnata dal Picart ⁽⁴⁾ per la stabilità delle orbite *esterne* all'ammasso omogeneo.

La (18), intesa come uguaglianza, permette di definire un *raggio massimo* b^* dell'ammasso, nell'interno del quale le stelle sono stabili ed instabili all'esterno, e perciò probabilmente perdute dall'ammasso. Si osservi poi che la funzione $\psi(x)$, definita dalla (16), acquista il massimo valore di circa 1,09 per $x = 1/2$ e si mantiene assai prossima all'unità in tutto l'intervallo $0 - 1$. D'altra parte, per ammassi globulari normali, anche il termine: $\frac{1}{3} \left(3 \frac{M}{m} \right)^{2/3} \cdot \frac{\alpha^2}{a^2}$ si mantiene relativamente piccolo di fronte all'unità. Ne consegue che, per valori di $b > \alpha$, alla relazione rigorosa (18) possiamo sostituire la (19) e possiamo pertanto concludere che, a *parità di massa e concentrazione centrale*, il raggio massimo dell'ammasso globulare può ritenersi, con buona approssimazione, *proporzionale alla distanza dell'ammasso dal centro galattico*. Come si è detto nella Nota I, questo risultato sembra conforme alle più recenti ricerche di carattere statistico effettuate in questo campo. Resta naturalmente sottinteso che, per una più precisa relazione tra b ed a , occorre applicare la (18).

Fisica matematica. — *Sulla velocità dell'energia elettromagnetica nei cristalli in moto.* Nota di ANNA MARISA MANARINI, presentata ^(*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

In una recente Nota ⁽¹⁾ il prof. E. Clauser ha studiato la propagazione di un'onda piana in un corpo isotropo in moto traslatorio uniforme rispetto ad un osservatore (S) ed ha osservato, fra l'altro, che la velocità dell'onda rispetto ad (S) non si ottiene in generale componendo relativisticamente la velocità dell'onda rispetto al corpo con la velocità del corpo rispetto all'osservatore (S). In una Nota successiva ⁽²⁾ ha poi esteso questa osservazione al caso di un cristallo in moto.

È opportuno però osservare che nel caso di un corpo isotropo il teorema di composizione relativistica vale invece per la velocità dell'energia dell'onda ⁽³⁾. Pertanto rispetto all'osservatore (S) la velocità dell'energia non coincide più, né in modulo né in direzione, con la velocità dell'onda.

Considerando il caso più complesso di un'onda piana che si propaga in un cristallo, è noto che, anche se il cristallo è in quiete, l'energia non si

(4) Cfr. la formula (2) della mia citata Nota I.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) E. CLAUSER, *Velocità della luce nei corpi isotropi in moto*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XVII, pp. 362-365 (1954).

(2) E. CLAUSER, *Propagazione della luce nei cristalli in moto*, « Rend. Ist. Lomb. », vol. LXXXVIII, pp. 287-320 (1955).

(3) Cfr. C. MØLLER, *The Theory of Relativity*, Oxford, § 76 (1952).

propaga in generale nella stessa direzione dell'onda e la sua velocità di propagazione è diversa dalla velocità dell'onda.

Supponendo che il cristallo si muova di moto traslatorio uniforme rispetto ad un osservatore (S), mi è sembrato di qualche interesse ricercare se vale ancora, come per un mezzo isotropo, il teorema della composizione relativistica per la velocità dell'energia. Ho potuto stabilire la validità del teorema con un metodo molto elementare e del tutto diverso da quello usato dal Møller, di cui alla nota ⁽³⁾, ponendomi, per non complicare troppo i calcoli, nel caso in cui il moto di traslazione del cristallo avvenga parallelamente ad un suo asse dielettrico.

1. Si abbia un cristallo non conduttore il quale sia magneticamente isotropo; supporremo anzi la permeabilità magnetica uguale a quella del vuoto, ossia $\mu = 1$.

Assumiamo come sistema di riferimento solidale col cristallo il sistema $S' (x', y', z', t')$, dove gli assi x', y', z' sono diretti come gli assi dielettrici principali del cristallo. Indicando con accento le grandezze rispetto all'osservatore (S') e usando la metrologia gaussiana razionalizzata, possiamo scrivere, con ovvio significato dei simboli, le equazioni di Maxwell:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{rot } \mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'} \\ \text{rot } \mathbf{H}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t'} \end{cases}$$

Fra le componenti cartesiane dei vettori \mathbf{E}' e \mathbf{D}' intercedono le relazioni:

$$D'_x = \epsilon_1 E'_x, \quad D'_y = \epsilon_2 E'_y, \quad D'_z = \epsilon_3 E'_z,$$

essendo $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ le costanti dielettriche principali del cristallo, oppure le relazioni equivalenti:

$$(2) \quad E'_x = \eta_1 D'_x, \quad E'_y = \eta_2 D'_y, \quad E'_z = \eta_3 D'_z,$$

in cui η_1, η_2, η_3 sono rispettivamente gli inversi di $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

Consideriamo un'onda piana monocromatica che si propaghi rispetto all'osservatore (S') in una direzione qualsiasi individuata dal versore \mathbf{n} di componenti cartesiane $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$. Porremo pertanto:

$$(3) \quad \mathbf{D}' = \mathbf{D}_0 \cos \omega \left(t' - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{w} \right),$$

dove \mathbf{D}_0 è un vettore costante, \mathbf{r} è un vettore di componenti x', y', z' e w è la velocità di fase dell'onda.

Ricordiamo ora alcune formule riguardanti la propagazione di un'onda piana in un cristallo. Dalle (2) si deduce che anche il vettore \mathbf{E}' è della forma:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 \cos \omega \left(t' - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{w} \right),$$

dove \mathbf{E}_0 è un vettore costante.

Dalla prima delle equazioni (1) si ha:

$$\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial t'} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}' = -c \frac{\omega}{w} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}'_0 \sin \omega \left(t' - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{w} \right),$$

da cui, integrando, si ottiene (4):

$$(4) \quad \mathbf{H}' = \frac{c}{w} \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}'.$$

Pertanto anche \mathbf{H}' è della forma:

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}'_0 \cos \omega \left(t' - \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{w} \right)$$

dove \mathbf{H}'_0 è un vettore costante.

Analogamente dalla seconda delle equazioni (1) si deduce:

$$\mathbf{D}' = -\frac{c}{w} \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}',$$

da cui, ricordando la (4) ed applicando la formula del prodotto vettoriale triplo, si ottiene:

$$(5) \quad \mathbf{E}' = \frac{w^2}{c^2} \mathbf{D}' + (\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

Moltiplicando scalarmente ambo i membri per \mathbf{n} , si ha:

$$(6) \quad \mathbf{D}' \times \mathbf{n} = 0,$$

ossia, introducendo le componenti cartesiane di \mathbf{D}' :

$$(6') \quad D'_x \cos \alpha + D'_y \cos \beta + D'_z \cos \gamma = 0.$$

Osserviamo esplicitamente che in generale è invece $\mathbf{E}' \times \mathbf{n} \neq 0$.

Moltiplicando scalarmente ambo i membri della (5) per \mathbf{D}' , si ha:

$$(7) \quad w^2 = c^2 \frac{\mathbf{E}' \times \mathbf{D}'}{D'^2}.$$

Proiettando ambo i membri della (5) su x' , si ha:

$$(8) \quad E'_x = \frac{w^2}{c^2} D'_x + (\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) \cos \alpha.$$

Moltiplicando vettorialmente ambo i membri della (5) per \mathbf{n} , e ricordando la (4), si ha:

$$(9) \quad \mathbf{H}' = \frac{w}{c} \mathbf{n} \wedge \mathbf{D}'.$$

2. Consideriamo il vettore «velocità dell'energia elettromagnetica» rispetto a (S') , definito da:

$$(10) \quad \mathbf{C}_e = \frac{c \mathbf{E}' \wedge \mathbf{H}'}{\frac{1}{2} (\mathbf{E}' \times \mathbf{D}' + H'^2)}.$$

(4) Siccome si suppone \mathbf{H}' sinusoidale, dobbiamo porre uguale a zero la costante di integrazione.

Nel caso dell'onda piana da noi studiato, si tratta evidentemente di un vettore costante. Tenendo presente la (9) ed applicando la formula del prodotto vettoriale triplo, si ha:

$$\mathbf{E}' \wedge \mathbf{H}' = \frac{w}{c} [(\mathbf{E}' \times \mathbf{D}') \mathbf{n} - (\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) \mathbf{D}'].$$

Dalla (9), ricordando la (6), si ha poi:

$$H'^2 = \frac{w^2}{c^2} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{D}')^2 = \frac{w^2}{c^2} D'^2.$$

Dalla (7) infine si trae:

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{D}' = \frac{w^2}{c^2} \mathbf{D}'^2.$$

Sostituendo nella (10), si ha quindi per la velocità dell'energia la seguente espressione:

$$(11) \quad \mathbf{C}'_e = \frac{c^2}{wD'^2} [(\mathbf{E}' \times \mathbf{D}') \mathbf{n} - (\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) \mathbf{D}'].$$

3. Supponiamo ora che il cristallo si muova rispetto ad un osservatore $S(x, y, z, t)$ di moto traslatorio uniforme con velocità v nella direzione di un suo asse dielettrico principale. Scegliamo opportunamente il sistema di riferimento (S) , in modo che la relazione fra le coordinate di (S) e (S') sia espressa dalla trasformazione speciale di Lorentz.

Le grandezze elettomagnetiche $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{D}$ rispetto all'osservatore (S) sono legate alle corrispondenti grandezze $\mathbf{E}', \mathbf{B}', \mathbf{H}', \mathbf{D}'$ rispetto all'osservatore (S') da relazioni lineari omogenee nelle componenti cartesiane dei vettori stessi, relazioni che si ottengono dalla legge di covarianza delle equazioni di Maxwell rispetto alla trasformazione di Lorentz ⁽⁵⁾. Ciò assicura che la dipendenza dal tempo e dallo spazio dei vettori $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{D}$ è ancora del tipo indicato dalla (3), salvo sostituire a t', x', y', z' che compaiono allo esponente, le loro espressioni in funzioni di t, x, y, z fornite dalla trasformazione di Lorentz. Tenendo presente le relazioni (2) e che abbiamo supposto $\mathbf{B}' = \mathbf{H}'$, queste relazioni si possono scrivere così:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} E_x = \gamma_{11} D'_x & B_x = H'_x \\ E_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(\gamma_{12} D'_y + \frac{v}{c} H'_z\right) & B_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(H'_y - \frac{v}{c} \gamma_{13} D'_z\right) \\ E_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(\gamma_{13} D'_z - \frac{v}{c} H'_y\right) & B_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(H'_z + \frac{v}{c} \gamma_{12} D'_y\right) \\ D_x = D'_x & H_x = H'_x \\ D_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(D'_y + \frac{v}{c} H'_z\right) & H_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(H'_y - \frac{v}{c} D'_z\right) \\ D_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(D'_z - \frac{v}{c} H'_y\right) & H_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(H'_z + \frac{v}{c} D'_y\right) \end{array} \right.$$

(5) Cfr. R. BECKER, *Teoria della elettricità*, vol II, ed. Sansoni, Firenze 1950, p. 391.

Consideriamo il vettore velocità dell'energia rispetto all'osservatore (S):

$$(13) \quad \mathbf{C}_e = \frac{2c \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}}{\mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{H} \times \mathbf{B}}.$$

Per quanto si è osservato precedentemente, si tratta ancora di un vettore costante, una volta fissata l'onda a cui si riferisce. Vogliamo ora, mediante le (12), esprimere \mathbf{C}_e in funzione delle grandezze elettromagnetiche rispetto l'osservatore (S'). Per la componente di $\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$ sull'asse x , si ha:

$$(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_x = E_y H_z - E_z H_y =$$

$$= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \left[(\eta_2 D'_y + \frac{v}{c} H'_z) (H'_x + \frac{v}{c} D'_y) - (\eta_3 D'_z - \frac{v}{c} H'_y) (H'_y - \frac{v}{c} D'_z) \right].$$

Questa relazione, ricordando la (9), diviene:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_x = & \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \left\{ \frac{w}{c} [(\eta_2 D'^2_y + \eta_3 D'^2_z) \cos \alpha - (\eta_2 D'_y \cos \beta + \eta_3 D'_z \cos \gamma) D'_x + \right. \\ & + \frac{v^2}{c^2} (D'^2_y + D'^2_z) \cos \alpha - \frac{v^2}{c^2} (D'_y \cos \beta + D'_z \cos \gamma) D'_x] + \frac{v}{c} \frac{w^2}{c^2} [(D'^2_y + D'^2_z) \cos^2 \alpha + \\ & + (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) D'^2_x - 2 (D'_y \cos \beta + D'_z \cos \gamma) D'_x \cos \alpha] + \frac{v}{c} (\eta_2 D'^2_y + \eta_3 D'^2_z) \left. \right\}, \end{aligned}$$

da cui, con ovvi passaggi, tenendo presente la (6') e la (7), si ha:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_x = & \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \left\{ \frac{w}{c} [(\mathbf{E}' \times \mathbf{D}') \cos \alpha - (\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) D'_x + \frac{v^2}{c^2} D'^2 \cos \alpha] + \right. \\ & + \frac{v}{c} [(\mathbf{E}' \times \mathbf{D}') \cos^2 \alpha + \frac{w^2}{c^2} D'^2_x + \mathbf{E}' \times \mathbf{D}' - E'_x D'_x] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Ricordando la (8), si ottiene infine:

$$(14) \quad (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{w}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha \right) [(\mathbf{E}' \times \mathbf{D}') \cos \alpha - (\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) D'_x + \frac{vw}{c^2} D'^2].$$

Con procedimento analogo, e tenendo ancora presenti le relazioni (6'), (7) e (8) si ricava:

$$(15) \quad (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{w}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha \right) [(\mathbf{E}' \times \mathbf{D}') \cos \beta - (\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) D'_y],$$

$$(16) \quad (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{w}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha \right) [(\mathbf{E}' \times \mathbf{D}') \cos \gamma - (\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) D'_z],$$

$$\begin{aligned} (17) \quad \mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{H} \times \mathbf{B} = & 2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{w}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha \right) \left\{ \frac{w}{c} D'^2 + \right. \\ & + \frac{v}{c} [(\mathbf{E}' \times \mathbf{D}') \cos \alpha - (\mathbf{E}' \times \mathbf{n}) D'_x] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Introducendo le componenti cartesiane del vettore \mathbf{C}_e nel sistema (S'), forniteci dalla (11), le (14), (15), (16), (17) divengono rispettivamente:

$$(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{w}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha\right) \frac{wD'^2}{c^2} (C'_{ex} + v)$$

$$(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{w}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha\right) \frac{wD'^2}{c^2} C'_{ey}$$

$$(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(\frac{w}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha\right) \frac{wD'^2}{c^2} C'_{ez}$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{D} + \mathbf{H} \times \mathbf{B} = 2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{w}{c} + \frac{v}{c} \cos \alpha\right) \frac{wD'^2}{c} \left(1 + \frac{vC'_{ex}}{c^2}\right).$$

Pertanto dalla (13) si trae che le componenti cartesiane della velocità dell'energia rispetto all'osservatore (S) hanno la seguente espressione:

$$C_{ex} = \frac{C'_{ex} + v}{1 + \frac{C'_{ex}v}{c^2}}, \quad C_{ey} = \frac{C'_{ey} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 + \frac{C'_{ex}v}{c^2}}, \quad C_{ez} = \frac{C'_{ez} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}{1 + \frac{C'_{ex}v}{c^2}}.$$

Resta così dimostrato che, come si è detto in principio, la velocità dell'energia rispetto all'osservatore (S) si ottiene componendo relativisticamente ⁽⁶⁾ la velocità dell'energia rispetto all'osservatore (S') solidale col cristallo con la velocità di traslazione del cristallo rispetto all'osservatore (S).

Fisica. — *Sulla fotodisintegrazione del $^{209}\text{Bi}_{83}$ (*)*. Nota di ALFRED HANSON (**), FILIPPO FERRERO, RENATO MALVANO, CARLO TRIBUNO, presentata (***) dal Corrisp. G. WATAGHIN.

Nella presente Nota si espongono brevemente alcuni risultati parziali ottenuti studiando la fotodisintegrazione del $^{209}\text{Bi}_{83}$ (1).

Le misure sono state eseguite con il Betatrone Brown-Boveri installato nel Centro Studi Fisico-Biologici del C.N.R. presso la Clinica Medica della Università di Torino.

L'interesse di questa ricerca risiede nel fatto che i risultati sperimentali ottenuti da altri autori ^(2,3,4,5) sulla sezione d'urto totale e differenziale, sullo

(6) Si ricordino le formule per la composizione relativistica della velocità. Cfr. per esempio C. MØLLER, loco citato, p. 51.

(*) Lavoro eseguito presso la Sezione di Torino dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

(**) Fulbright Scholar, dall'Università dell'Illinois (U.S.A.).

(***) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) Il $^{209}\text{Bi}_{83}$ è l'unico isotopo stabile naturale del Bismuto ed ha un numero magico di neutroni (126).

(2) J. HALPERN, R. NATHANS, A. K. MANN, « Phys. Rev. », 88, 679 (1952).

(3) R. MONTALBETTI, L. KATZ, J. GOLDENBERG, « Phys. Rev. », 91, 659 (1953).

(4) G. A. PRICE, « Phys. Rev. », 93, 1279 (1954).

(5) G. A. PRICE, S. W. KERST, « Phys. Rev. », 77, 806 (1950).

spettro dei neutroni emessi e sulla distribuzione angolare dei medesimi, meritano di essere riesaminati con maggiore accuratezza e con tecniche diverse; questo per chiarificare ulteriormente il problema della fotodisintegrazione che nel quadro del modello a *compound nucleus* male si accorda con la notevole anisotropia angolare presentata dai fotoneutroni emessi dal Bi.

I risultati sperimentali sono stati ottenuti irradiando con i neutroni emessi da un campione di Bi posto direttamente sul fascio dei raggi X del Betatrone dei cilindri di alluminio, circondati da un involucro di cadmio per ridurre l'attività indotta per cattura n , e contando successivamente, con un contatore G. M. a pareti sottili, l'attività indotta nell'alluminio nel processo (n, p) . La dose di irradiazione è stata misurata mediante una camera di ionizzazione, appositamente costruita per questi tipi di ricerche.

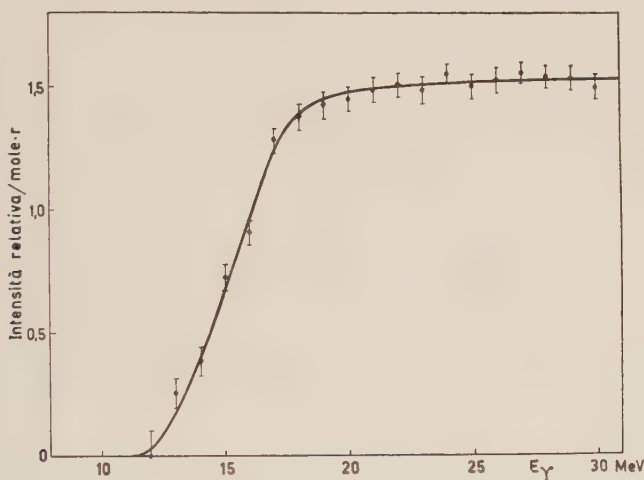


Fig. 1.

Le misure che riportiamo in fig. 1 si riferiscono alla curva di eccitazione per emissione di neutroni di energia maggiore di circa 3 MeV (essendo tale la soglia del processo (n, p) nell'alluminio⁽⁶⁾ ottenuta con i rivelatori sopra descritti.

Nella fig. 2 è riportata per confronto la curva di eccitazione (γ, n) totale da noi pure rimisurata con un rivelatore conveniente ed estesa fino all'energia di 30 MeV.

Con lo stesso tipo di rivelatore ad Al è stata misurata la distribuzione angolare dei fotoneutroni ed i dati relativi sono riportati nella fig. 3. Nella stessa figura sono indicati i valori ottenuti da Price nel lavoro citato⁽⁴⁾.

Dal diagramma di fig. 3 si vede che i valori da noi ottenuti ad una energia massima dello spettro di Bremsstrahlung di 30 MeV ben si accor-

(6) *Neutron Cross Sections*, McGraw-Hill Book Co., New York 1955.

dano con una curva del tipo $0,61 + 0,39 \sin^2 \vartheta$ e non sono sostanzialmente differenti (almeno per piccoli angoli) da quelli ottenuti a 18 e 22 MeV da Price.

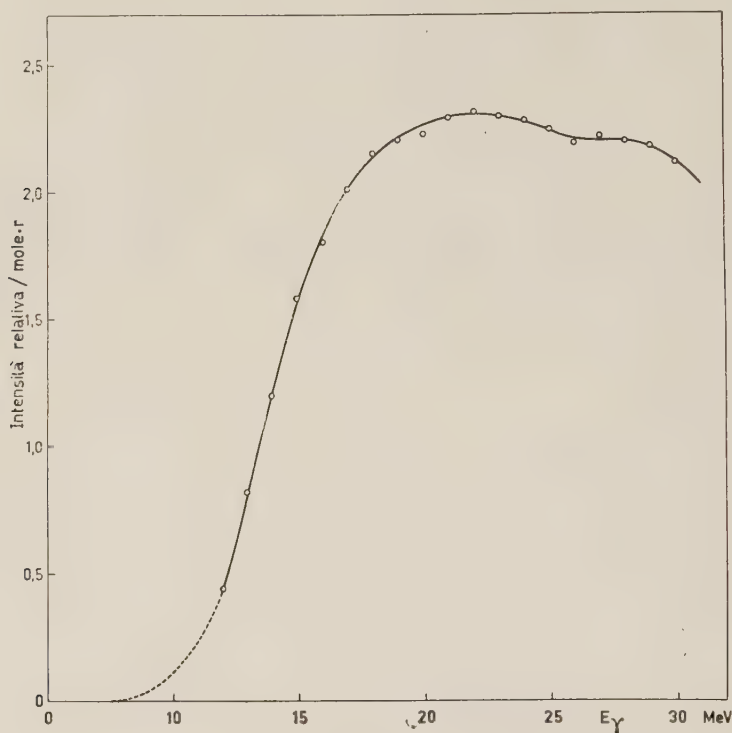


Fig. 2.

La curva di eccitazione (fig. 1), non misurata nel lavoro citato, mostra la ben nota caratteristica delle curve di eccitazione per assorbimento di fotoni di Bremsstrahlung, che conduce alla risonanza gigante per la sezione

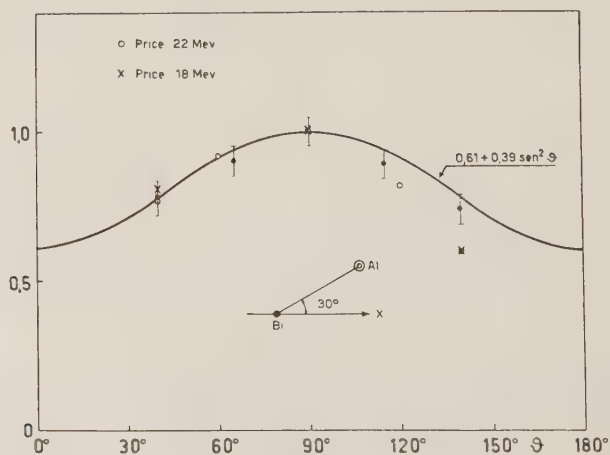


Fig. 3.

d'urto differenziale; in questo caso tuttavia la soglia invece di essere 7,8 MeV è a circa 12 MeV.

La conclusione parziale e provvisoria che si può trarre da quanto sopra consiste nell'ammettere che il processo (γ, n) per neutroni veloci, pur presentando una anisotropia angolare di circa il 70%, non differisce qualitativamente dal processo (γ, n) totale (fig. 2), il quale, essendo il processo (γ, p) fortemente proibito nei nuclei pesanti, come il Bi, dalla barriera coulombiana, ben rappresenta l'assorbimento elettromagnetico nucleare.

Questi risultati sembrano convalidare fortemente l'ipotesi che l'assorbimento dei fotoni nella risonanza gigante conduca essenzialmente alla produzione di neutroni di alta energia, con una interazione di tipo diretto ^(7,8), piuttosto che ad un « riscaldamento » complessivo del nucleo seguito da un processo di evaporazione neutronica.

Le misure sono in via di completamento con altri tipi di rivelatori ed una discussione completa sui dati sperimentali ottenuti apparirà quanto prima in altra sede.

Ringraziamo vivamente il prof. G. Wataghin per l'aiuto e l'incoraggiamento ricevuto nel corso della presente ricerca.

Chimica inorganica. — *Composti nitrosilici di ferro e cobalto con i fosfiti arilici, le triaril-fosfine, le triaril-arsine e le triaril-stibine* ^(*). Nota preliminare di L. MALATESTA e A. ARÀNEO, presentata ^(**) dal Socio L. CAMBI.

È noto che le fosfine, i fosfiti e gli analoghi composti tricovalenti del fosforo presentano una spiccata attitudine ad agire come « leganti » rispetto al nichel nello stato di ossidazione zero; tanto è vero che si possono ottenere i diversi prodotti di sostituzione dell'ossido di carbonio sul nicheltetracarbonile $\text{Ni}(\text{CO})_4 : \text{Ni}(\text{CO})_3\text{PX}_3 \dots$ sino a $\text{Ni}(\text{PX}_3)_4$ ⁽¹⁾.

D'altra parte i composti nitrosilcarbonilici di cobalto e ferro, cioè $\text{Co}(\text{NO})(\text{CO})_3$ e $\text{Fe}(\text{NO})_2(\text{CO})_2$ sono isosteri con $\text{Ni}(\text{CO})_4$, e si deve ritenere che essi posseggano un assetto di orbite elettroniche ed una distribuzione di cariche elettriche molto simile o identica a quelle che si hanno in $\text{Ni}(\text{CO})_4$ ⁽²⁾.

Se così è, l'ossido di carbonio nel $\text{Co}(\text{NO})(\text{CO})_3$ e nel $\text{Fe}(\text{NO})_2(\text{CO})_2$ dovrebbe poter essere sostituito dalle fosfine e dai fosfiti per dar luogo a prodotti di elevata stabilità.

(7) D. A. WILKINSON, « Proc. of the 1954 Glasgow Conference », 161.

(8) MERCIER et HERPIN, « C. R. », 237, 556 (1953).

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Generale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) L. MALATESTA e A. SACCO, « Annali di Chimica », 44, 134 (1954).

(2) L. MALATESTA, « Gazzetta Chim. It. », 83, 964 (1954).

Basandoci su questa previsione, abbiamo intrapreso una estesa ricerca, che è tuttora in corso, e siamo riusciti ad ottenere allo stato di purezza i seguenti composti ⁽³⁾:

$\text{Co}(\text{NO})(\text{CO})[\text{P}(\text{C}_6\text{H}_5)_3]_2$	cristalli rossi	P. F.	13°C C
$\text{Co}(\text{NO})(\text{CO})[\text{P}(\text{OC}_6\text{H}_5)_3]_2$	» gialli	»	86° C
$\text{Co}(\text{NO})(\text{CO})_2[\text{As}(\text{C}_6\text{H}_4\text{Cl})_3]$	» rossi	»	~ 135° C
$\text{Co}(\text{NO})(\text{CO})_2[\text{As}(\text{C}_6\text{H}_4\text{CH}_3)_3]$	» rossi	»	~ 125° C
$\text{Co}(\text{NO})(\text{CO})_2[\text{Sb}(\text{C}_6\text{H}_5)_3]$	» rossi	»	~ 100° C
$\text{Co}(\text{NO})(\text{CO})_2[\text{Sb}(\text{C}_6\text{H}_4\text{CH}_3)_3]$	» rossi	»	~ 135° C
$\text{Co}(\text{CO})_2\text{NO}[\text{Sb}(\text{C}_6\text{H}_4\text{Cl})_3]$	» rossi	»	~ 150° C
$\text{Fe}(\text{NO})_2[\text{P}(\text{C}_6\text{H}_5)_3]_2$	» marrone	»	194° C
$\text{Fe}(\text{NO})_2[\text{P}(\text{OC}_6\text{H}_5)_3]_2$	» arancione	»	~ 68° C.

Tutti questi composti sono monomeri, solubili nei solventi organici polari e nel benzolo, facilmente ricristallizzabili. Sono diamagnetici, stabili all'aria per un tempo indefinito.

È in corso la preparazione di altri termini di questa serie e la misura dei loro momenti elettrici.

Fisiologia. — *Ancora sull'azione della penicillina sull'accrescimento e sulla differenziazione delle larve di «Bufo vulgaris».* Nota II di FERRUCCIO CHIUINI e LUCIANO MILLETTI, presentata ^(*) dal Corrisp. G. AMANTEA.

Si è ritenuto opportuno ritornare sull'argomento, come del resto premesso nella prima Nota ⁽²⁸⁾, adoperando penicillina di provenienza diversa da quella della quale ci si era serviti nella prima serie di osservazioni.

Si è avuto cura di sperimentare nelle stesse condizioni precedenti. Lotti di 20 larve di *Bufo vulgaris* provenienti da uova dello stesso cordone sono stati posti in recipienti con 300 cc. di acqua di fonte; due lotti sono stati lasciati come controllo, negli altri sono state aggiunte dosi scalari di penicillina (G sodica) previamente diluita, nella misura di 2.000 o 4.000 o 8.000 o 50.000 o 200.000 o 500.000 U. per recipiente.

Le larve di tutti i lotti, poste nelle stesse condizioni ambientali di luce e temperatura, erano alimentate con tuorlo d'uovo coagulato al calore (dieta di Cotronei); ogni 24 h venivano rinnovati acqua, antibiotico ed alimento.

(3) I sostituenti del gruppo fenile sono tutti in «para».

(*) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

Riportiamo in forma schematica la disposizione dei lotti di larve:

Lotto 1	—	Uovo	controllo	
» 2	—	Uovo	controllo	
» 3	—	Uovo	+	2.000 U. di penicillina G sodica
» 4	—	»	+	4.000 U. »
» 5	—	»	+	8.000 U. »
» 6	—	»	+	12.000 U. »
» 7	—	»	+	50.000 U. »
» 8	—	»	+	200.000 U. »
» 9	—	»	+	500.000 U. »

Fu misurata la lunghezza totale delle larve (testa e coda) all'inizio dell'esperimento e dopo 30 giorni. Non si ritenne opportuno ripetere la misurazione ad una certa distanza dal 30° giorno dell'esperimento essendo iniziata la comparsa degli arti. La differenziazione fu seguita dal momento della comparsa degli arti fino a metamorfosi completa.

I dati ottenuti figurano nelle unite tabelle. La prima di esse si riferisce ai valori (relativi alla lunghezza espressa in mm.) rilevati nelle misurazioni.

TABELLA I.

Valori medi in mm. relativi all'accrescimento delle larve.

	All'inizio	Dopo 30 giorni	Aumento in mm.
	(7 aprile 1954)	(7 maggio 1954)	
Lotto 1 controllo	15,5	20,6	5,1
» 2 controllo	15,4	20,0	4,6
» 3 2.000 U. penicillina G sodica	15,4	20,0	4,6
» 4 4.000 U. »	15,3	20,4	5,1
» 5 8.000 U. »	15,7	20,5	4,8
» 6 12.000 U. »	15,5	20,7	5,2
» 7 50.000 U. »	15,4	20,2	4,8
» 8 200.000 U. »	15,8	19,5	3,7
» 9 500.000 U. »	15,7	19,2	3,5

Nella tabella II vengono riportati i dati relativi alla mortalità al 35° giorno di esperienza. Dopo tale giorno non si è più osservata mortalità se non verso la fine dell'esperimento.

TABELLA II.

Numero assoluto e percentuale delle larve morte durante i primi 35 giorni di esperienza.

Lotto 1 controllo	0	0 %
» 2 controllo	1	5 %
» 3 2.000 U. penicillina . .	0	0 %
» 4 4.000 U. »	0	0 %
» 5 8.000 U. »	1	5 %
» 6 12.000 U. »	1	5 %
» 7 50.000 U. »	3	15 %
» 8 200.000 U. »	5	25 %
» 9 500.000 U. »	8	40 %

La tabella III riguarda i valori medi di accrescimento delle larve determinati in base ai dati della tabella I.

TABELLA III.

Valori medi di accrescimento delle larve nei primi 30 giorni.

Controlli	mm. 5,10 mm. 4,60	} media mm. 4,85
Girini in penicillina (da 2 a 12 mila U.)	mm. 4,92	
Girini in penicillina (da 50 a 500 mila U.)	mm. 4,00	} media mm. 4,46

La tabella IV mostra l'andamento della differenziazione e la tabella V riporta il numero di larve che avevano raggiunto la metamorfosi completa alla data del 19 giugno 1954 (73° giorno di esperimenti).

Pertanto per quanto riguarda l'accrescimento (Tabella III) si è notato modicissimo incremento per le dosi da 2.000 a 12.000 U. e diminuzione chiara per le dosi da 50 a 500 mila U. Se poi si fa il confronto fra l'incremento medio osservato per i controlli (mm. 4,85) e quello osservato per tutti i lotti trattati con penicillina (mm. 4,46) si vede come l'aggiunta dell'antibiotico non è stata certamente vantaggiosa. Non si è avuto l'arresto totale della crescita in nessun lotto e le variazioni sono rimaste in limiti modesti, notevolmente inferiori a quanto osservato nelle ricerche precedenti.

TABELLA IV.

Andamento della differenziazione.

Numero di larve che presentavano:											
Giorni . . .	Arti posteriori						Arti anteriori e posteriori				
	3/VI	4/VI	5/VI	6/VI	7/VI	8/VI	9/VI	10/VI	11/VI	12/VI	13/VI
Controllo .	2	2	5	5	6	2	4	6	9	10	11
2.000	—	1	2	2	2	—	1	3	4	5	6
4.000	—	—	3	4	5	—	—	4	5	8	10
8.000	—	—	—	—	1	—	—	1	2	4	6
12.000	—	—	2	2	3	—	—	2	4	5	7
50.000	—	—	1	1	1	—	—	—	3	5	9
200.000	—	—	1	1	1	—	1	2	4	5	5
500.000	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	3

TABELLA V.

Adulti al giorno 19 giugno 1954 (73° giorno d'esperimento).

Lotto 1 controllo	18
» 2 controllo	13
» 3 2.000 U. penicillina G sodica . . .	19
» 4 4.000 U. »	18
» 5 8.000 U. »	16
» 6 12.000 U. »	15
» 7 50.000 U. »	15
» 8 200.000 U. »	8
» 9 500.000 U. »	9

Alla stessa data nel lotto 8 e nel 9 rispettivamente 1 e 2 girini vennero a morte senza completare la metamorfosi.

A questo punto bisogna ricordare che altri lotti di girini furono posti nelle condizioni già descritte, non però all'inizio dell'accrescimento come per i lotti di cui finora abbiamo parlato, ma con notevole ritardo, quando cioè le larve si erano maggiormente sviluppate.

In questi lotti non si è avuta mortalità, solo un modestissimo incremento nella crescita per le dosi da 50 mila U. in su (Tabella VI) e un incremento della differenziazione per le dosi da 2.000 a 12.000 U. (Tabella VII) che però si annullava nei giorni successivi.

TABELLA VI.

Accrescimento in mm. dopo 30 giorni di esperimento.

Lotto 1 controllo	mm. 0,74
» 2 2.000 U. penicillina G sodica . . .	» 0,70
» 3 4.000 U. »	» 0,78
» 4 8.000 U. »	» 0,68
» 5 12.000 U. »	» 0,66
» 6 50.000 U. »	» 0,82
» 7 200.000 U. »	» 0,94

TABELLA VII.

Girini con arti anteriori formati dopo 45 giorni di esperienza.

Lotto 1 controllo	n. 6
» 2 2.000 U. penicillina G sodica . . .	» 10
» 3 4.000 U. »	» 11
» 4 8.000 U. »	» 15
» 5 12.000 U. »	» 16
» 6 50.000 U. »	» 8
» 7 200.000 U. »	» 6

Per ciò che riguarda la metamorfosi (Tabella IV e V) l'esperimento ha confermato solo in parte quanto osservato la prima volta. Non vi è stata la già notata azione positiva nella differenziazione per piccole dosi di anti-

biotico, c'è stato invece ritardo: lieve per le piccole dosi maggiore per le dosi elevate e non si sono avuti dismorfismi. Abbiamo però notato (Tabelle VI e VII) che a seconda dell'età in cui il girino viene sottoposto a trattamento si hanno risposte differenti nel senso che la larva più adulta sopporta meglio l'aggiunta nel mezzo ambiente dell'antibiotico, non si ha infatti mortalità, ricevendone anzi per certe dosi, un beneficio mai un danno. I benefici però sono fugaci chè alla fine dell'esperienza tutti i girini giungono nelle stesse condizioni.

In sostanza le ricerche attuali hanno confermato solo in parte quanto osservato in precedenza. Mentre nell'esperimento precedente erano state osservati per le alte dosi di penicillina in una notevole percentuale delle larve arresti di accrescimento e metamorfosi disarmonica, ciò non è stato adesso notato in nessun caso.

Non è stata notata neppure, con la penicillina stavolta adoperata, l'eccessiva quantità di escrementi giornalmente eliminati dalle larve – e crescenti col crescere della quantità di antibiotico – durante i primi giorni del precedente esperimento.

Le variazioni ottenute nell'accrescimento e nella differenziazione sono state contenute in limiti più modesti.

In conclusione dalle nostre ricerche sarebbe risultato che:

1° Le piccole dosi di penicillina hanno modesta e incostante attività stimolante l'accrescimento. Un'azione di ritardo sulla differenziazione si ha per le dosi elevate.

Possiamo ritenere che gli effetti più marcati sulla crescita e sulla differenziazione – specie su quest'ultima – siano in parte legati alle impurità presenti nella penicillina in quanto con i tipi più recenti dell'antibiotico (certamente più puri) tali effetti sono stati minori;

2° L'azione dell'antibiotico, sia in senso positivo che negativo, è più evidente nel primo periodo del trattamento; se l'animale supera tale fase si adatta all'ambiente ricco di penicillina risentendone meno gli effetti nocivi (La mortalità infatti, è assai elevata durante i primi 35 giorni (Tabella II).

3° Le azioni dell'antibiotico sono diverse anche in rapporto all'età della larva che viene messa a contatto con l'antibiotico stesso.

Non è facile trovare una spiegazione a questi dati e pertanto al riguardo si potrebbe pensare, e soltanto a titolo di ipotesi di lavoro:

a) che le impurità contenute nell'antibiotico fungano, a certe concentrazioni, da « pabulum » per l'organismo larvale;

b) che la penicillina di per se stessa interferisca – e in senso diverso nelle varie dosi – su processi enzimatici (per sintesi di aminoacidi, vitamine, ecc.) esplicati forse dagli agenti della flora batterica intestinale, favorendoli o inibendoli a seconda delle concentrazioni;

c) che l'antibiotico a piccole dosi possa disinfettare l'ambiente da agenti patogeni per l'organismo; a dosi elevate, invece, inibire anche l'azione

di germi indispensabili alla crescita per le loro attività nella sintesi di particolari sostanze.

Queste, a nostro vedere, le ipotesi più attendibili che potrebbero spiegare il comportamento delle larve di *Bufo* sottoposte al trattamento - nel modo esposto - con penicilline di diversa provenienza e quindi diversamente preparate e certamente a diverso grado di purezza.

L'osservazione però fatta della eliminazione di quantità notevoli di escrementi, proporzionale alla quantità di antibiotico adoperata, nei primi 10 giorni dell'esperimento - nel periodo cioè che precede l'adattamento delle larve al nuovo ambiente, con tutte le conseguenze - non permette di escludere la possibilità di un intervento diretto dell'antibiotico sui processi ossidativi dell'organismo.

Riteniamo a tal proposito non inopportuno ricordare quanto Famiani ⁽²⁹⁾ ha osservato di analogo in un esperimento, eseguito ad altro fine nel nostro Istituto, e non ancora pubblicato. Studiando la durata delle possibilità di sopravvivenza delle larve di *Bufo vulgaris* in acqua alla quale venivano addizionate quantità diverse di perossido di idrogeno, Famiani ha osservato lo stesso aumento della quantità degli escrementi notati nella prima serie di osservazioni con la penicillina. Solo che nel caso dell'acqua ossigenata tale aumento era di gran lunga superiore ed avveniva in un tempo brevissimo: a volte si cominciava ad osservarlo entro i primissimi minuti dall'aggiunta di perossido di idrogeno all'acqua, parallelamente alla eccitazione motoria, e aveva termine con la morte delle larve.

Lo stato di esaltazione anche metabolica era in quel caso indiscutibile.

È ovvio che non si intende qui fare comparazioni: solo abbiamo voluto ricordare l'analogia.

Che alcuni antibiotici possano influenzare favorevolmente l'accrescimento - quale che ne possa essere la ragione - è ormai assodato, e tale acquisizione comincia a trovare estesa applicazione, a scopo industriale, nel campo zootecnico. Tale azione favorevole - secondo l'ipotesi più attendibile (Kekwick ⁽³⁰⁾) sembrerebbe dovuta a modificazioni apportate dall'antibiotico sulla attività dei batteri della flora intestinale. Ipotesi secondo noi molto logica, e che del resto anche noi abbiamo avanzato per spiegare taluni nostri risultati.

Ad onta di tutto ciò, il campo delle azioni cosiddette secondarie degli antibiotici rimane sempre oscuro, e tutti i problemi ad esso relativi debbono essere considerati tuttora aperti.

È un campo però suscettibile dei più ampi sviluppi, e fecondo di risultati che promettono rendimento e utilità di entità forse massimali, e a fini scientifici puri, e a fini sociali.

(29) V. FAMIANI, Comunicazione personale.

(30) A. KEKWICK, « Rec. Pro. in Med. », XVII, 5 (1954).

Biologia. — *Osservazioni sul nucleo della cellula nervosa degli Anfibi urodeli* ^(*). Nota di MILENA MARINI, presentata ^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Nell'ambito delle indagini che si stanno svolgendo nel nostro Laboratorio sui problemi della determinazione e del differenziamento del neurone nei Vertebrati (Stefanelli e Collaboratori ⁽¹⁾), è stata iniziata una serie di ricerche sulle modificazioni delle strutture nucleari al fine di rivedere, mediante l'impiego di precisi metodi istochimici, il loro comportamento durante l'istogenesi nei diversi tipi di neuroni (Baffoni 1954-56 ⁽²⁾).

In questo campo mi è stato affidato l'esame del nucleo della cellula nervosa degli Anfibi urodeli, poiché esso appariva diverso da quello degli altri Vertebrati, come è desumibile dalla letteratura.

Vanno ricordate in proposito le classiche ricerche di Levi (1896-97 ⁽³⁾) sul nucleo della cellula nervosa dei Vertebrati, dalle quali è risultato che gli Anfibi urodeli hanno un comportamento peculiare: infatti mentre nel nucleo dei più voluminosi neuroni (Somatozellen) di questi animali la cromatina (« nucleina ») è abbondante e resta in parte nel karioplasma, in quello dei Vertebrati superiori essa è concentrata completamente attorno al nucleolo (« centralizzazione »).

Rohde (1903 ⁽⁴⁾), invece, esaminando le cellule gangliari degli Urodeli allo stadio larvale ed adulto, ha constatato che la cromatina del nucleo si concentra completamente attorno al nucleolo, come Levi aveva visto avvenire nei Vertebrati superiori.

Infine per Ott-Candela e Manca di Villahermosa (1946 ⁽⁵⁾) il nucleo delle cellule gangliari di *axolotl* conserva la stessa struttura cromonematica degli elementi embrionali.

Data la disparità di opinioni degli Autori citati, che si sono serviti di comuni colorazioni istologiche, è apparso interessante riprendere queste ricerche con metodo istochimico.

A tale scopo mi sono servita particolarmente del *Triturus cristatus carnifex*, di cui ho preso in esame una serie di stadi embrionali (classificati in

(*) Ricerca eseguita nel Laboratorio di Istologia ed Embriologia della Facoltà di Scienze dell'Università di Roma, con il contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(1) A. STEFANELLI, vedi « Mem. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 1, 27 (1949); « Quart. Rev. Biol. », 26, 17 (1951); « Ricerca Scientifica », 25, 2778 (1955); « Acc. Naz. Lincei », Quad. 28, 143 (1952).

(2) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 17, 70 (1954); « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 20, 125 (1956).

(3) G. LEVI, « Riv. Patol. Nerv. e Ment. », 1, 141 (1896) e 2, 193 (1897).

(4) E. ROHDE, « Zeit. Wiss. Zooll. », 73, 497 (1903).

(5) A. OTT-CANDELA e R. MANCA DI VILLAHERMOSA, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », 21, 147 (1946).

base alle tavole per il *Triturus torosus* di Twitty e Bodenstein (ved. Rugh 1952)⁽⁶⁾, di stadi larvali (classificati secondo Glücksohn 1932)⁽⁷⁾ ed individui adulti.

Del materiale fissato in Helly e Carnoy e incluso in paraffina-celloidina, sono state allestite sezioni seriali dello spessore di 5 μ .

Una serie di individui fissati in Carnoy è stata impregnata con argento colloidale (secondo il metodo di Bodian) per l'individuazione dei centri e l'esame dello stadio di sviluppo dei loro neuroni.

Ho scelto centri nervosi a varie altezze del neurasse e tali che differissero tra loro per l'attività funzionale (motori, sensitivi, neuro-secretori), la velocità del differenziamento e le dimensioni dei loro elementi; perciò ho seguito durante lo sviluppo le modificazioni nucleari del centro preottico, della retina, del centro motore del V, delle cellule di Mauthner ed altri neuroni tegmentali, del ganglio del X, del centro del funicolo dorsale e delle cellule endodermali.

Per l'esame delle strutture nucleari sono stati impiegati:

A) la reazione di Feulgen per le strutture DNA, su individui fissati sia in Carnoy che in Helly; il reattivo di Schiff è stato preparato secondo la tecnica di Stowell (1945)⁽⁸⁾; di ogni serie sono state allestite sezioni di controllo omettendo l'idrolisi;

B) il metodo di Brachet alla pironina-verde di metile in mezzo tamponato (Gerola e Vannini 1948)⁽⁹⁾ a pH 4,5, per il riconoscimento dei ribonucleotidi (RNA); sezioni di controllo sono state trattate con acido perclorico secondo Di Stefano (1950)⁽¹⁰⁾.

Nella presente Nota espongo i risultati più salienti che saranno estesi e documentati in un successivo lavoro.

Negli embrioni a bottone codale (stadio 35), i nuclei a riposo dei neuroblasti, per certi aspetti, possono rientrare nella categoria definita da Barigozzi (1949)⁽¹¹⁾ a « nucleo compatto »: in essi il materiale Feulgen-positivo (DNA) appare in granuli di varia grossezza omogeneamente diffusi nel karioplasma (st. 35 della fig. 1). Il nucleolo ribonucleico, di piccole dimensioni, presenta un sottile rivestimento Feulgen-positivo (cromatina nucleolo-associata di Caspersson⁽¹²⁾). Tale aspetto embrionale del nucleo si può conservare a lungo in alcuni elementi endodermali e negli elementi del margine irideo della retina, tra i quali ho osservato attività mitotica fino al termine della metamorfosi.

Con l'inizio dell'istogenesi del neurone i granuli Feulgen-positivi affluiscono in parte attorno al nucleolo, in parte si dirigono verso la membrana nucleare con una velocità di migrazione diversa a secondo delle loro dimensioni (prima

(6) R. RUGH, *Experimental embryology*, New York (1952).

(7) S. GLÜCKSOHN, « Arch. Entw-mech. », 125, 341 (1932).

(8) R. E. STOWEL, « Stain Technol. », 20, 45 (1945).

(9) F. M. GEROLA e E. VANNINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 5, 77 (1948).

(10) H. DI STEFANO, « Stain Technol. », 27, 171 (1951).

(11) C. BARIGOZZI, « Pubblic. Staz. Zool. di Napoli », 21, Suppl., 228 (1949).

(12) T. CASPERSSON, *Cell growth and cell function*, New York (1950).

i granuli più grossi, poi via via i più minuti). I granuli Feulgen-positivi giunti per primi contro la membrana si trasformano in zolle d'aspetto stellato (st. 40 della fig. 1), quindi i più sottili si allineano tra di esse a costituire delle travate irregolari, cosicché si delinea un reticolo discontinuo (st. 50 della fig. 1).

Al termine della migrazione, il karioplasma risulta negativo alla reazione di Feulgen tranne nella zona contingua al nucleolo (cromatina nucleolo-

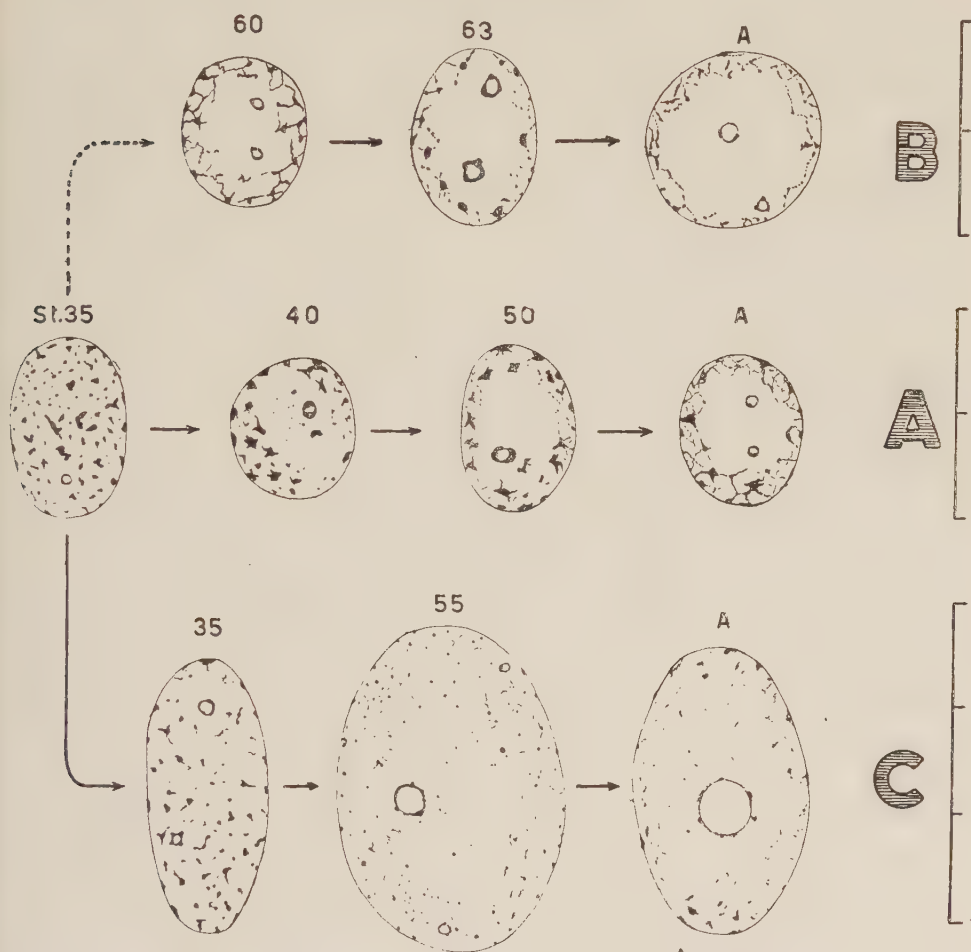


Fig. 1. - Aspetti dei nuclei delle cellule nervose di *Triturus* durante il differenziamento del neurone (A; da elementi del funicolo dorsale), durante l'accrescimento (B; da neuroni motori del V°) e negli elementi a rapido e precoce sviluppo (C; cellule di Mauthner).

Da microfotografie di preparati trattati con la Feulgen; ogni intervallo delle scale a fianco = 10 μ .

associata) e contro la membrana ove si osserva un reticolo continuo con zolle ai punti nodali. (st. 60 della fig. 1).

Questo aspetto del nucleo è comune alla maggior parte dei neuroni negli ultimi stadi larvali: a tutti quei neuroni, cioè, che durante questo periodo hanno subito un modesto aumento di volume (fig. 1 A).

Dagli ultimi stadi larvali (st. 60), fino al termine dell'accrescimento somatico, per lo svilupparsi di centri e per l'aumentare del territorio d'innervazione, molti neuroni vanno incontro a un periodo d'accrescimento più o meno intenso, che si manifesta nel nucleo con un aumento di volume e conseguente rarefazione della sostanza Feulgen-positiva; infine quella parte di essa che aderisce alla membrana nucleare si presenta come un reticolo discontinuo con zolle minute ai punti nodali; quella che circonda il nucleolo, per l'aumentare della massa di questo, forma un rivestimento più sottile (fig. 1 B).

Di particolare interesse è risultato il comportamento dell'apparato nucleolare. Nei primi stadi ho osservato uno o due minuti nucleoli, quanti cioè appaiono nei neuroni di piccole dimensioni dell'adulto; nelle cellule nervose di medie e grandi dimensioni ho riscontrato invece una notevole variabilità nel numero dei veri nucleoli (da uno a quattro) nonché nelle dimensioni e nella posizione di questi. La variabilità nel numero dei nucleoli non è in rapporto con il volume dell'elemento, ma appare in relazione con l'attività del neurone; dei dati in mio possesso uno dei più significativi a questo riguardo è rappresentato dalla cellula di Mauthner: in essa i nucleoli aumentano di numero nei primi stadi larvali, quando il neurone è in piena attività funzionale, mentre nell'adulto, quando tale attività è ridotta (Stefanelli 1949)⁽¹³⁾ si osserva un solo grosso nucleolo (fig. 1 C).

Dai dati esposti risulta che le modificazioni delle strutture nucleari sono in rapporto con due distinti fenomeni: il differenziamento del neurone ed il suo accrescimento. La migrazione del materiale Feulgen-positivo e la frammentazione delle strutture DNA nel nucleo in accrescimento, si succedono negli elementi che hanno uno sviluppo lento e graduale, invece si verificano contemporaneamente nei neuroni a rapido e precoce sviluppo quali le cellule di Mauthner, i neuroni tegmentali ed alcune cellule del ganglio del X; in questi neuroni il nucleo raggiunge molto presto cospicue dimensioni (st. 40) e pertanto la migrazione del materiale Feulgen-positivo (sotto forma di granuli minuti) verso la membrana nucleare si compie più lentamente e talvolta in modo incompleto; in alcuni di questi neuroni completamente differenziati si possono perciò notare granulazioni DNA ancora diffuse nel carioplasma (fig. 1 C).

Le modificazioni nucleari, che si sono verificate nei vari tipi di neuroni durante lo sviluppo, si rendono particolarmente evidenti all'esame dei centri nervosi dell'adulto. La seriazione degli aspetti del nucleo nei neuroni di Anfibi urodeli adulti si è rivelata in diretto rapporto con il volume nucleare; così ho potuto distinguere:

A) nuclei di grandi dimensioni (diam. $25,5 \times 15 \mu$ in media), come quelli delle cellule di Mauthner: questi nuclei si presentano molto poveri di sostanza DNA, la quale in gran parte è addossata alla membrana in forma di piccoli granuli, in parte riveste il voluminoso nucleolo ed in parte resta nel carioplasma (fig. 1 C, A);

(13) A. STEFANELLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 8, 59.

B) nuclei di dimensioni intermedie (diam. $15 \times 12 \mu$ in media), quali si riscontrano nel centro preottico magnocellulare, nel centro motore del V e nelle cellule di diversigangli; in questi, ad eccezione della cromatina che circonda il nucleolo ribonucleico (o i nucleoli), la sostanza Feulgen-positiva è completamente addossata alla membrana in un reticolo sottile e discontinuo con zolle minute ai punti nodali (fig. 1, B, A);

C) nuclei di piccole dimensioni (diam. $11,5 \times 9,5 \mu$ in media), come appaiono negli elementi del centro del funicolo dorsale, della porzione posteriore del nucleo preottico (parvocellulare) e nelle cellule endodermali; le strutture Feulgen-positive di questi nuclei si presentano come un reticolo a maglie strette con zolle nodali più o meno voluminose contro la membrana nucleare, come un rivestimento spesso ed irregolare attorno al nucleolo ribonucleico (fig. 1 A, A);

D) un aspetto particolare del nucleo si riscontra in quegli elementi che durante lo sviluppo vanno incontro ad una progressiva diminuzione di volume (granuli della retina); in essi il materiale Feulgen-positivo contiguo alla membrana nucleare assume un aspetto così compatto che la parte centrale del nucleo rimane completamente occultata.

Le strutture messe in evidenza nel nucleo dei neuroni di *Triturus* adulto, con i metodi istochimici da me impiegati, risultano progressivamente più minute e discontinue con l'aumentare delle dimensioni nucleari; pertanto l'aspetto del nucleo non è in rapporto con il tipo del neurone, ma con il proprio volume.

Dall'esame delle strutture nucleari durante lo sviluppo del neurone e nelle cellule nervose degli Anfibi urodeli adulti si può concludere che: l'inizio del differenziamento del neurone si manifesta nel nucleo con la duplice migrazione del materiale Feulgen-positivo, che in parte si dirige verso la membrana nucleare e in parte attorno al nucleolo ribonucleico (o ai nucleoli); terminata questa migrazione, le ulteriori modificazioni che possono verificarsi nelle strutture Feulgen-positive, specialmente in quelle aderenti alla membrana, risultano in rapporto con le variazioni del volume nucleare; ciò è in accordo con quanto è stato enunciato da Levi (1896-97)⁽³⁾. Nei neuroni a rapido e precoce sviluppo i due fenomeni non appaiono distinti perché iniziano e procedono contemporaneamente.

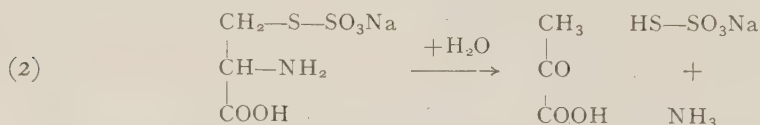
Confrontando i miei dati con quelli emersi dal recente esame del nucleo della cellula nervosa dei Mammiferi durante l'istogenesi e nell'adulto (Baffoni 1956)⁽²⁾ risulta che le strutture Feulgen-positive dei neuroni degli Anfibi urodeli presentano un quadro di modificazioni morfologiche del tutto simile a quello degli altri Vertebrati; diversificano invece sia l'aspetto del materiale desossiribonucleico nel nucleo dei neuroblasti (granulare negli Urodeli e filamentoso nei Mammiferi), sia la quantità di esso, che è maggiore negli Urodeli. L'abbondanza della cromatina nel nucleo dei neuroni degli Anfibi urodeli giustifica le diversità riscontrate da Levi: infatti mentre le strutture desossiribonucleiche aderenti alla membrana nucleare negli Urodeli appaiono anche con le comuni colorazioni istologiche, le medesime strutture nei Mammiferi non si mettono in evidenza senza l'ausilio di precisi metodi istochimici.

Biochimica. - *Scissione biologica del cisteinsolfonato in tiosolfati*^(*). Nota di DORIANO CAVALLINI e FIORENZO STIRPE, presentata^(**) dal Corrisp. A. ROSSI FANELLI.

Piccole quantità di tiosolfati sono presenti nelle urine umane normali^(1,2) e in quelle di molti animali^(1,3,4). Nel coniglio è stato mostrato che i tiosolfati aumentano nelle urine in seguito a diete contenenti elevate percentuali di aminoacidi solforati⁽⁵⁾ o in seguito a somministrazione di cistina⁽⁶⁾; non sappiamo tuttavia in quale modo lo zolfo della cistina sia trasformato in tiosolfati e che significato abbia questa reazione. I solfiti scindono la cistina in cisteina e cisteinsolfonato⁽⁷⁾ con una reazione comune a molti disolfuri organici, utilizzata in numerosi metodi analitici per la determinazione qualitativa e quantitativa del gruppo $-S-S-$:



Nel corso della degradazione metabolica della cistina, ed in particolar modo di uno dei suoi derivati, l'acido cisteinsolfonico, è prodotto acido solforoso^(8,9) che reagendo con molecole di cistina non ancora metabolizzate potrebbe produrre non enzimaticamente il cisteinsolfonato secondo l'equazione (1). L'eventuale formazione di questo composto, nel corso del metabolismo della cistina, potrebbe spiegare la produzione di tiosolfati in quanto non solo il cisteinsolfonato è un vero derivato organico dell'acido tiosolfonico, ma analogamente a quanto avviene per la cisteina^(10,11) e per molti tioeteri della cisteina⁽¹²⁾, questi composti possono scindersi biologicamente in acido piruvico, ammoniaca e nel radicale solforato, con una reazione che per il cisteinsolfonato può essere formulata come segue:



(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) C. FROMAGEOT e A. ROYER, « *Enzymologia* », **II**, 361 (1945).

(2) J. H. GAST, K. ARAI e F. L. ALDRICH, « *J. Biol. Chem.* », **196**, 875 (1952).

(3) N. W. PIRIE, « *Biochem. J.* », **28**, 1063 (1934).

(4) J. H. GAST e K. ARAI, « *Federat. Proc.* », **10**, 187 (1951).

(5) E. SALKOWSKI, « *Z. physiol. Chem.* », **92**, 89 (1914).

(6) J. WOHLGEMUTH, « *Z. physiol. Chem.* », **40**, 81 (1903).

(7) H.T. CLARKE, « *J. Biol. Chem.* », **97**, 235 (1932).

(8) C. FROMAGEOT, F. CHATAGNER e B. BERGERET, « *Biochim. Biophys. Acta* », **2**, 294 (1948).

(9) B. BERGERET, F. CHATAGNER e C. FROMAGEOT, « *Biochim. Biophys. Acta* », **9**, 147 (1952).

(10) C. FROMAGEOT, E. WOOKEY e P. CHAIX, « *Enzymologia* », **9**, 198 (1941).

(11) C. V. SMYTHE, « *J. Biol. Chem.* », **142**, 387 (1942).

(12) F. BINKLEY, « *J. Biol. Chem.* », **186**, 287 (1950).

più arretrata della destra anteriore. Quando la colonia si trova in condizioni di sofferenza, che si manifestano soprattutto in un anticipo della regressione della generazione adulta, si può anche verificare, in casi estremi, un arresto dello sviluppo in tutte le gemme di una parte degli individui. Nel cambio di generazione, pertanto, il numero di blastozoidi che compongono la colonia può variare entro limiti molto estesi: potrebbe teoricamente quadruplicarsi, qualora maturassero 4 gemme per blastozooide, ciò che non si è mai verificato nei miei allevamenti; più spesso aumenta in proporzioni minori; talora resta costante, ed eccezionalmente, in singole generazioni, può diminuire.

Ho eseguito una serie di esperimenti, allo scopo di definire l'entità dei poteri blastogenetici degli zoidi, i rapporti che si stabiliscono fra le gemme portate dallo stesso individuo e le capacità di ripresa di gemme eventualmente rimaste bloccate nello sviluppo.

Ho usato giovani colonie sviluppatesi da larve nate in laboratorio. Le colonie furono allevate in stanza termostatica a 19°, secondo il metodo descritto in altro lavoro ⁽¹⁾, fissate su vetrini capovolti al fondo di capsule Petri che erano immerse in vaschette contenenti 6 litri d'acqua aerea. L'acqua veniva rinnovata in media ogni 5 giorni, ed era mantenuta ad una salinità costante del 33,5 ‰. Le colonie venivano nutrite con *Chlamydomonas* e *Nitzschia*.

La seriazione degli stadi di sviluppo delle gemme, seguita nel presente lavoro, è quella stabilita da Berrill ⁽²⁾, con alcune modifiche, ed è riportata nella Tabella I.

TABELLA I.

Classificazione degli stadi di sviluppi dei blastozoidi nelle colonie di Botryllus (secondo Berrill, con alcune modifiche).

- St. 1. - Primo abbozzo del blastozooide in forma di un ispessimento a disco della parete atriale della gemma genitrice.
- St. 2. - Disco estroflesso ed incurvato a semisfera.
- St. 3. - Stadio a 2 vescicole, di cui l'interna originatasi per chiusura del disco e l'esterna derivata dalla parete epidermica del genitore.
- St. 4. - Comparsa, nella vescicola interna, della estroflessione intestinale e delle pieghe atriali, abbozzi delle cavità peribranchiali.
- St. 5. - Vescicola interna differenziata in camere branchiale e peribranchiali e tubo digerente.
- St. 6. - Cuore distinto.
- St. 7. - Comparsa degli ispessimenti a disco della parete atriale, abbozzi delle gemme della generazione successiva.
- St. 8. - Cuore pulsante (8': pulsazioni iniziali a ritmo lento, 8'' pulsazioni a ritmo normale).
- St. 9. - Maturità funzionale della gemma: apertura dei sifoni.
- St. 10. - Maturazione delle gonadi.
- St. 11. - Dissoluzione del blastozooide.

(1) A. SABBADIN, 1955. *Osservazioni sullo sviluppo, l'accrescimento e la riproduzione di « Botryllus schlosseri » (Pallas), in condizioni di laboratorio.* (In corso di stampa).

(2) N. J. BERRILL, 1941. *The development of the bud in Botryllus*, « Biol. Bull. », 80, 169.

1° esperimento. — L'esperimento è stato iniziato quando le colonie, ancora formate solo dall'oozooide, dalla gemma destra di 1^a generazione e dalle gemme della 2^a generazione, si trovavano allo stadio di sviluppo esprimibile con la formula $9/8'/2$: delle 3 generazioni di individui coesistenti nella colonia, la generazione adulta, l'oozooide, era in condizioni di maturità funzionale, e delle 2 generazioni di gemme la più vecchia era rappresentata da individui in cui era appena iniziato il funzionamento del cuore (stadio 8'), e la più giovane da individui allo stadio 2, in forma di semisfera. Nelle colonie che si trovano a questo stadio le gemme più giovani sono ancora in genere una sola per lato: solo in alcuni casi la destra, ed eccezionalmente la sinistra, hanno cominciato a sdoppiarsi.

Al binoculare, con un aghetto di tungsteno affilato in bagno di potassa caustica fusa, fu estirpata la gemma destra, o l'anteriore delle 2 eventualmente presenti, della 2^a generazione blastogenetica. Le gemme posteriori dei 2 lati, se comparivano, erano estirpate dopo che avevano raggiunto lo stadio 7, cioè ad un momento nel quale avevano già superato la fase più critica dello sviluppo. Pertanto nelle colonie maturò la sola gemma anteriore sinistra della 2^a generazione. Le operazioni furono ripetute, con le stesse modalità, nelle generazioni successive, fino alla 7^a. Ma, poiché solo le gemme esterne della colonia erano accessibili, nelle successive generazioni la 1^a estirpazione veniva eseguita alternativamente a sinistra e a destra, poiché alternativamente le gemme destre e le gemme sinistre si trovavano chiuse fra la gemma genitrice ed il blastozooide adulto.

Sono state impiegate nell'esperimento 12 colonie.

2° esperimento. — In 10 colonie, a cominciare dalla 2^a generazione blastogenetica, come nel 1° esperimento, è stata eseguita, fino alla 7^a generazione, alternativamente a destra e a sinistra, l'estirpazione della gemma di un lato, o dell'anteriore delle 2 eventualmente presenti, 24 h. dopo che la gemma stessa aveva raggiunto lo stadio 2. Al momento dell'operazione le gemme di destra erano generalmente arrivate allo stadio 3, a vescicola chiusa, mentre in quelle di sinistra abitualmente la chiusura non era ancora totale. Le eventuali gemme posteriori si erano già formate a destra e cominciavano ad accennarsi a sinistra. Esse venivano asportate, come nel 1° esperimento, dopo raggiunto lo stadio 7, per cui ad ogni successiva generazione un solo blastozooide completava lo sviluppo.

3° esperimento. — In 11 colonie, sempre a partire dalla 2^a generazione blastogenetica e fino alla 7^a, fu eseguita l'estirpazione della gemma, o dell'anteriore delle gemme, di un lato, 72 h. dopo che essa aveva raggiunto lo stadio 2. Al momento dell'operazione le gemme erano giunte allo stadio 4-5 e in quei casi nei quali si era verificato un anticipo della regressione della generazione adulta, erano andate oltre, fino allo stadio 7. Le gemme posteriori furono asportate come nei 2 esperimenti precedentemente indicati.

Un gruppo di 14 colonie, allevato nelle stesse condizioni delle serie sperimentali, è servito da lotto di controllo.

L'andamento della gemmazione nel lotto di controllo è indicato nella Tabella II per le singole generazioni, e in sintesi nella Tabella V. Su un totale di 340 blastozoidi, giunti alla maturità funzionale in 7 generazioni, si sono avute 906 gemme, con una media di 2,66 per blastozooide, che è molto prossima alla media di ciascuna generazione. Ciascun blastozooide ha costantemente gemmato ai 2 lati e, ad eccezione che nella prima generazione, in alcune colonie sono comparse gemme posteriori, che hanno rappresentato complessivamente il 9,93 % del totale. Le gemme posteriori di destra sono state molto più numerose di quelle di sinistra (87,77 %). L'aumento del numero medio di individui adulti, nel cambio delle generazioni, si è tuttavia mantenuto molto inferiore al ritmo della gemmazione, perché molte gemme si sono arrestate nello sviluppo. In particolare sono maturate solo 7 gemme posteriori (pari al 9,58 %) e tutte dal lato destro. Anche una parte delle gemme anteriori (o sole presenti) dei 2 lati non ha raggiunto la maturità funzionale: solo il 26,89 % delle gemme di sinistra è maturato, contro il 91,44 % delle gemme di destra.

TABELLA II.

Serie di controllo: ritmo della gemmazione nei blastozoidi delle varie generazioni.

Generaz.	N. medio bl. per generaz.	N. medio gemme per bl.	% gemme posteriori sul totale gemme			% gemme (anter.) maturate	
			di destra	di sin.	totale	a destra	a sinistra
1 ^a	1,00	2,00	0,00	0,00	0,00	100,00	0,00
2 ^a	1,00	2,42	5,88	0,00	5,88	81,25	31,25
3 ^a	1,35	2,68	13,72	3,92	17,64	95,00	55,00
4 ^a	2,42	2,70	16,30	3,26	19,56	97,29	56,75
5 ^a	4,21	2,74	9,25	3,70	12,96	92,95	32,85
6 ^a	6,35	2,76	9,34	0,00	9,34	91,07	16,21
7 ^a	8,53	2,66	5,80	0,00	5,80	88,69	21,73

Gli esperimenti effettuati hanno inciso profondamente sul ritmo della gemmazione e sullo sviluppo delle gemme.

Nelle 3 serie sperimentali il numero medio di gemme per blastozooide in ciascuna generazione e specialmente nelle ultime è stato notevolmente superiore a quello della serie di controllo (Tabella III). Complessivamente, per una media di 2,66 gemme per blastozooide nella serie di controllo se ne sono avute 3,03 nella 1^a serie sperimentale, 3,04 nella 2^a e 3,32 nella 3^a

(Tabella V). Ciò fu dovuto alla comparsa di un numero maggiore di gemme posteriori in ciascuna generazione (Tabella IV). Esse, mentre rappresentarono complessivamente solo il 9,93 % delle gemme nella serie di controllo, salirono al 34,34 % nella 1^a serie sperimentale, al 33,80 % nella 2^a e al 36,93 % nella 3^a (Tabella V), con punte massime nelle ultime generazioni.

TABELLA III.

Numero medio gemme per blastozooide nelle varié generazioni.

Generaz.	Controlli	1° lotto sperim.	2° lotto sperim.	3° lotto sperim.
1 ^a	2,00	2,16	2,30	2,09
2 ^a	2,42	2,58	2,40	2,81
3 ^a	2,68	3,25	2,90	2,90
4 ^a	2,70	3,16	3,40	3,36
5 ^a	2,74	3,50	3,30	3,66
6 ^a	2,76	3,16	3,50	3,66
7 ^a	2,66	3,50	3,50	3,66

TABELLA IV.

Numero percentuale delle gemme posteriori sul totale delle gemme, nelle diverse generazioni.

Gene- raz.	Controlli			1° lotto sperimentale			2° lotto sperimentale			3° lotto sperimentale		
	Destre	Sin.	Totale	Destre	Sin.	Totale	Destre	Sin.	Totale	Destre	Sin.	Totale
1 ^a	0,00	0,00	0,00	7,69	0,00	7,69	4,34	8,69	13,04	4,34	0,00	4,34
2 ^a	5,88	0,00	5,88	19,35	3,22	22,58	16,66	0,00	16,66	22,58	6,45	29,03
3 ^a	13,72	3,92	17,64	23,07	15,38	38,46	17,24	13,79	31,03	18,75	12,50	31,25
4 ^a	16,30	3,26	19,56	23,68	13,15	36,84	29,41	11,76	41,17	21,62	18,91	40,54
5 ^a	9,25	3,70	12,96	21,42	21,42	42,85	21,21	15,15	36,36	24,24	21,21	45,45
6 ^a	9,34	0,00	9,34	26,68	15,78	39,47	22,85	20,00	42,85	27,27	18,18	45,45
7 ^a	5,80	0,00	5,80	28,57	20,00	48,57	25,71	17,14	42,85	30,30	21,21	51,51

Mentre nella serie di controllo le gemme posteriori di sinistra furono appena il 5,07 % delle gemme posteriori, nel 1° lotto sperimentale esse rappresentarono il 38,64 %, nel 2° il 38,89 % e nel 3° il 40,25 % delle gemme posteriori (Tabella V).

Nelle 3 serie sperimentali fu pure assai maggiore che nella serie di controllo il numero di gemme posteriori che nel loro sviluppo raggiunsero lo stadio 7. Si ebbero infatti le seguenti percentuali: 27,39 % nella serie di controllo, 85,91 % nel 1° lotto sperimentale, 87,71 % nel 2° e 81,53 % nel 3° (Tabella V).

TABELLA V.

Dati riassuntivi sulla gemmazione nella serie di controllo e nelle serie sperimentali.

Lotto	N. medio gemme per blast.	% gemme post. sul tot. gemme	% gemme post. sin. sul tot. gemme post.	% gemme post. oltre lo st. 7
Controlli	2,66	9,93	12,23	27,39
1° lotto sperimentale	3,03	35,34	38,64	85,91
2° lotto sperimentale	3,04	33,80	38,89	87,71
3° lotto sperimentale	3,12	36,93	40,25	81,53

Nelle generazioni in cui furono estirpate le gemme di destra, il 100 % delle gemme anteriori di sinistra raggiunse la maturità funzionale contro il 26,89 % nella serie di controllo.

Questi risultati indicano che si può sperimentalmente attenuare in misura molto considerevole la forte differenza di poteri blastogenetici esistente nei controlli fra lato destro e lato sinistro del blastozooide, e la forte differenza di capacità di sviluppo esistente fra gemme anteriori e gemme posteriori, e fra gemme di destra e gemme di sinistra. Vengono notevolmente esaltati i poteri blastogenetici dello zooide, che tende ad esprimere il numero massimo di gemme, e tutte le gemme comparse presentano una maggiore capacità di proseguire il loro sviluppo.

Poiché nelle serie sperimentali ad ogni generazione maturava un'unica gemma, essa veniva ad usufruire da sola di tutti i prodotti di degradazione del genitore, quando questo aveva esaurito il suo ciclo vitale, e si sa che tali prodotti rappresentano una sorgente fondamentale di nutrimento. I blastozoidi si accrebbero in misura notevolmente maggiore che i blastozoidi della serie di controllo, come verrà indicato dettagliatamente in altro lavoro, e la loro condizione di privilegio ebbe un riflesso positivo sullo sviluppo delle

loro gemme. Questo fu d'altra parte facilitato dall'estirpazione di una delle gemme anteriori, che permise un maggior afflusso di nutrimento alle gemme superstiti.

Gli esperimenti sembrano dunque aver messo in evidenza in modo chiaro i rapporti di competizione che nella colonia di Botrilli si stabiliscono fra gli individui ai vari stadi di sviluppo che la compongono.

Nel 3° esperimento, in cui l'estirpazione della gemma veniva eseguita 72 h. dopo che essa aveva raggiunto lo stadio 2, la gemma di sinistra in un certo numero di casi si trovava bloccata nello sviluppo allo stadio 3, e in condizioni di atrofia. Essa riprendeva sempre il suo sviluppo dopo l'estirpazione della gemma destra. Ciò si è pure verificato, e in un numero molto maggiore di casi, per le gemme posteriori, specialmente per quella del lato operato. Un esperimento in corso, sul quale verrà riferito a parte, indica che analoghe capacità di ripresa possono presentare anche gemme rimaste bloccate nello sviluppo per un tempo molto maggiore. Nel 1° e nel 2° esperimento, in cui l'asportazione della gemma veniva eseguita rispettivamente allo stadio 2 e in prossimità dello stadio 3, all'operazione è spesso seguito lo sdoppiamento della gemma del lato opposto. Se questo era già avvenuto od era in corso, in alcuni casi l'anteriore delle 2 gemme si è sdoppiata una 2ª volta, per cui si sono formate 3 gemme dallo stesso lato. Questa condizione non si è mai verificata nei controlli e può dimostrare che il numero di gemme che possono formarsi a ciascun lato non è chiaramente definito.

Frequentemente l'asportazione delle gemme non risultava completa, perché frammenti di esse restavano aderenti alla parete atriale della gemma genitrice, se l'operazione era eseguita allo stadio 2 o in prossimità dello stadio 3, o al peduncolo ectodermico che le univa al genitore, dopo raggiunto lo stadio 3. In tali casi è stato spesso constatato che le gemme si ricostituivano a vescicola e potevano riprendere lo sviluppo a partire dallo stadio 3, anche quando tale stadio era già stato superato prima dell'asportazione. Nelle gemme operate allo stadio 2 o in prossimità dello stadio 3, da ciascuno dei 2 frammenti di esse, rimasti eventualmente aderenti alla parete atriale del genitore, poteva ricostituirsi una gemma.

Tutti questi fatti mettono in evidenza nelle gemme estesi poteri regolativi e rigenerativi, che peraltro richiedono uno studio più dettagliato.

Non è mai stata osservata con sicurezza la formazione *ex novo* di gemme dalla parete atriale del genitore, dopo le asportazioni. Le capacità blastogenetiche dello zooide sembrano cioè esaurirsi nella formazione bilaterale del disco che rappresenta l'abbozzo di una o più gemme. Dopo che esso è stato segregato dalla parete atriale, questa non pare più in grado di riacquistare la funzione blastogenetica.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Achille Russo

Tenuta (*) dal Socio UMBERTO PIERANTONI.

Egregi colleghi, signori,

Potrà forse sembrare a voi strano, come sembra strano a me stesso, che io debba oggi rievocare la nobile figura di scienziato di Achille Russo, nella mia non più giovanile età, come quella di un mio Maestro, anzi come il mio primo maestro della scienza che abbiamo professata e che ci condusse poi all'alto onore di essere insieme soci di questo grande e glorioso sodalizio. Ma è proprio così: Achille Russo era libero docente ed assistente di zoologia a Napoli, dove aveva compiuti i suoi studi e percorsi i primi passi della sua brillante carriera scientifica, quando io nel 1897 mi iscrivevo al suo corso libero di Zoologia e seguivo le esercitazioni da lui impartite quale assistente nell'istituto Zoologico universitario di Napoli.

Achille Russo, nato a Nicotera in terra di Calabria il 15 novembre 1866, percorse adunque i suoi studi superiori a Napoli, ove si laureò in Scienze Naturali nel 1891. Fu alunno interno da prima nell'Istituto di Istologia e Fisiologia generale, assistente in soprannumero nell'Istituto di Zoologia nel 1894 ed in seguito assistente di ruolo negli istituti di Istologia e di Zoologia, sempre a Napoli. Fra il 1891 ed i primi anni del nostro secolo il Russo ebbe occasione di frequentare la Stazione Zoologica di Napoli ed ivi, sopra un ricco materiale che potette essere messo a sua disposizione, compì i suoi studi veramente magistrali sugli Echinodermi, i cui risultati, pubblicati in più di trenta lavori, contribuirono validamente alla conoscenza di questo difficile gruppo; lavori che investirono con metodi e criterii sia morfologici che sistematici, non meno che sperimentali, la struttura istologica, la conoscenza anatomica, il valore fisiologico degli organi, nonché l'interpretazione sistematica delle forme viventi paragonate anche con quelle fossili, con indagini riguardanti altresì lo sviluppo embrionale e le metamorfosi delle singole specie. E fu soprattutto questo complesso di studi (la cui originalità e genialità gli venne ben presto riconosciuta), che gli valse nel 1897 l'ascesa per concorso alla cattedra di Zoologia, Anatomia e Fisiologia Comparete nell'Università di Cagliari, nella quale sede insegnò anche Parassitologia e Biologia generale, promovendo inoltre la fondazione della Stazione di Biologia Marina tuttora ivi esistente.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1956.

Nel 1901 per voto unanime della Facoltà di Scienze dell'Università di Catania passò alla Cattedra di Zoologia ed Anatomia e Fisiologia Comparete di quella Università ove rimase per tutta la sua ulteriore esistenza e dove poté esplicare la sua grande attività di studioso e di organizzatore e dove fondò una fiorente scuola di valorosi discepoli alcuni dei quali vennero assunti a loro volta alla cattedra universitaria.

Ma le cure inerenti alla riorganizzazione degli studi di Zoologia ed Anatomia Comparata nell'Ateneo catanese, cure che portarono fino alla costruzione e messa in funzione di un nuovo e ben attrezzato laboratorio, non distolsero il Russo dalla ricerca scientifica. Attratto dal capitolo di citologia degli apparecchi sessuali del gruppo degli Echinodermi verso ricerche sulla citologia della parte fondamentale di tale apparecchio in altri gruppi animali, egli nel 1905 iniziò la serie di osservazioni di citofisiologia dell'ovaia dei Mammiferi e più particolarmente dei fenomeni di assorbimento da parte della pellucida e delle modificazioni della struttura citoplasmica da essi determinate. E profittando delle esperienze inerenti a questi studi, specialmente in rapporto con l'azione della lecitina iniettata ed assorbita dall'ovaia, egli indagò per sei o sette anni su questo argomento, giungendo anche a conclusioni, oltre che morfologiche, anche fisiologiche sulla determinazione trofica del sesso, che, per le sue esperienze, porterebbe ad una prevalenza del sesso femminile nelle uova sperimentalmente trattate con iniezioni di lecitina. Tutte queste ricerche, oltre a fornire dati nuovi sulla intima struttura degli elementi ovarici e sul loro funzionamento, non escluso quello della secrezione anche interna e dell'assorbimento da parte di questi elementi, orientarono verso nuove vedute, le quali se non trovarono una vera applicazione industriale negli animali domestici e nell'economia degli allevamenti, furono peraltro largamente confermati su altri animali e diedero lo spunto a studi successivi sull'azione di prodotti ormonici al fine di studiare sperimentalmente il metabolismo ovarico. D'altra parte il prevalere, successivamente alle osservazioni del Russo, di una teoria nucleare della determinazione del sesso non poté contraddire i risultati di cui sopra dovuti agli studi del Nostro, tal quale come l'azione dei geni cromosomici nei fenomeni dell'eredità dei caratteri non può demolire i dati acquisiti sulla eredità citoplasmica che si verifica per alcuni caratteri.

E di ciò non dovette essere ignaro Achille Russo quando, in un periodo successivo, egli venne attratto dalle osservazioni riguardanti gli intimi rapporti fra metabolismo, struttura nucleare e sessualità, studiati in organismi più semplici, cioè nei protozoi Ciliati, argomento di cui si occupò in numerosi studi durante il rimanente corso della sua vita, pur occupandosi nel contempo dell'indagine scientifica in altri campi della Biologia.

Tali studi sui protozoi riguardarono principalmente il ciclo biologico e la sessualità del ciliato parassita di echinodermi *Cryptochilum echini*, in cui attraverso lunghe e minute osservazioni morfologiche, il Russo mise in luce l'esistenza di due categorie sessuali contraddistinte da diversa struttura del nucleo, specialmente per differente quantità di sostanza cromatica e per dif-

ferenti manifestazioni metaboliche. Queste due categorie corrispondono a due diversi cicli evolutivi, l'uno principale e l'altro accessorio, che si alternano fra loro.

Ma la non facile ricostruzione di questi cicli diede al Russo occasione di interpretare fatti che si verificano nei Metazoi, come la distinzione, oltre che dei sessi, delle cellule somatiche dalle sessuali, il che, secondo le sue vedute, avverrebbe anche ed in maniera più semplice e più facilmente indagabile nei suoi dettagli anche nei Protozoi. Perveniva pertanto il Nostro a conclusioni originali sulle cause del potere germinativo che talora si manifesta anche nelle cellule somatiche, e segnatamente sulla importanza di tale potere quale stimolo per l'insorgere dei tumori maligni e sulla esistenza di individui del ciclo del protozoo che mostrano fenomeni cariocinetici analoghi a quelli delle cellule cancerose. Consentivano tali studi anche a giungere a conclusioni sul significato della partenogenesi, sul valore dei pronuclei germinali, sul significato biologico della mitosi, sul valore dei nuclei e del loro contenuto nella attrazione fra le cellule sessuali, ecc.

Il fine ultimo, di natura applicativa, che si scorge nelle opere del Russo (escluse quelle sugli Echinodermi del primo periodo della sua attività di ricercatore) e che rende non di rado geniali e lungimiranti anche le ricerche che appaiono a prima vista come minute e dovute all'effetto di pura pazienza, si rivela in piena luce nelle sue esperienze e negli studi su nuovi sistemi di pesca con sorgenti luminose che occuparono gran parte della sua attività di sperimentatore. I frequenti rapporti col mare che ebbe nel procurare a sceverare il materiale di studio gli diede occasione di accertare fatti nuovi ed interessanti sulla vita e le abitudini degli animali marini, fatti che egli, seguendo l'accentuata tendenza all'applicazione pratica delle sue osservazioni, utilizzò nelle esperienze di cui sopra. La pesca con sorgenti luminose subacquee di cui egli indicò i metodi ed immaginò gli strumenti fu l'ultimo risultato di tali osservazioni, le quali, oltre ad indicare nuovi e più efficaci metodi di pesca, valsero altresì ad accertare per le varie specie, e particolarmente per i Clupeidi, le zone di maggior pescosità nel mare di Catania.

Ma oltre a tutte queste ricerche di cui ho fatto cenno raggruppandole in tre grandi serie, molte altre ricerche di argomento vario compì il Russo nella sua ampia attività di studioso. La monografia dei Turbellarii ad esempio, costituì una delle basi per la sistematica di questo gruppo e fu largamente adoperata dal Braun per la compilazione della monografia del gruppo stesso, che costituisce uno dei volumi del Tierreich.

Tale, in un breve riassunto, l'opera del Russo, la quale, svoltasi in oltre un sessantennio di assiduo ed intenso lavoro di ricerca, meriterebbe cenni ben più ampi di quelli che è possibile dare in una breve commemorazione. Basti il dire che esso si esplicò in circa 200 lavori, quasi tutti di ricerca originale. Ed è tanto più ammirevole tale opera quando si pensi che essa non distolse il Nostro dalle cure che richiesero le molte cariche che egli rivestì e che espletò con piena coscienza e spirito di responsabilità: quali quelle di Rettore della Università di Catania dal 1919 al 1924, di Presidente dell'Acca-

demia Gioenia, dell'Unione Zoologica Italiana, di vari enti appartenenti alla industria peschereccia, di varie istituzioni locali, di Vice Presidente della Società Italiana per il Progresso delle Scienze, di socio della nostra Accademia dal 1922 (della quale finché le forze glielo consentirono fu assiduo frequentatore) e di altre accademie.

Né gli studi e le attività accademiche distolsero il Russo dalle cure e dagli affetti familiari, che purtroppo se gli procurarono soddisfazioni, non gli risparmiarono dolori. Segnatamente fra questi la perdita di un figliuolo amatissimo giunto già all'inizio degli studi universitari.

Figliuolo di artista ed egli stesso artista ed autore di molti dei disegni che illustrano i suoi lavori, trovò il tempo di occuparsi anche di storia e di archeologia. Gentiluomo perfetto, dotato di grande bontà e saldo nell'amicizia (di cui mi onorò per tutta la sua vita di studioso), per la sua ferrea salute sarebbe forse ancora fra noi se un banale incidente occorsogli in casa, una caduta, non ne avesse compromesso la fibra, nell'età già avanzata di circa novanta anni.

La profonda traccia da lui lasciata nella nostra scienza, specialmente per le sue opere fondamentali sulla morfologia, sistematica e filogenesi degli Echinodermi, perpetuerà la memoria della sua nobile figura di uomo e di scienziato.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è presente alla seduta il prof. Griffith Evans della California University a Berkeley ed è lieto di rivolgere all'illustre ospite, che fu valente collaboratore di Vito Volterra, il cordiale saluto della Classe e suo personale.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente informa i Colleghi che in queste ultime settimane due gravi lutti hanno colpito la Classe per la scomparsa dei Soci Nazionali Guido Vernoni della Categoria V (Sezione Patologia), spentosi improvvisamente il 20 febbraio u. s., e Arturo Miolati della Categoria III (Sezione Chimica), morto il 24 dello stesso mese di febbraio.

Il prof. Giordani ricorda con commosse parole le elette doti di mente e di cuore dei due illustri scienziati scomparsi ed eleva alla loro memoria un pensiero di reverente e affettuoso omaggio.

Il Socio G. Levi si rende interprete dei sentimenti di profondo cordoglio dei Colleghi appartenenti alla Categoria V per l'immaturo scomparsa del prof. Vernoni che tutti grandemente apprezzavano per le alte benemerenze scientifiche, per la vivacità dell'intelligenza e per la mente limpidissima.

Il prof. Levi ricorda poi che nello scorso anno il Socio Vernoni presentò all'Accademia il volume I del suo «Trattato di Patologia Generale» che rappresenta il degno coronamento della infaticabile attività del compianto Collega, la cui scomparsa costituisce una gravissima perdita per la scienza.

Il Presidente comunica che il Socio Pierantoni, incaricato di commemorare il prof. Achille Russo, non è potuto intervenire alla presente seduta a causa di una improvvisa indisposizione. Egli ha però inviato il testo della commemorazione e ha rivolto preghiera al Collega Cotronei di darne lettura in Classe.

Il prof. Giordani, prima di dare la parola al Socio Cotronei, comunica che hanno inviato messaggi di adesione la signora Vedova Russo, impossibilitata ad intervenire personalmente, il prof. Monterosso, a nome suo, dell'Istituto di Zoologia dell'Università di Catania e dell'Accademia Gioenia, e il prof. Dulzetto dell'Università di Messina.

Il Socio Cotronei dà lettura del testo della commemorazione predisposto dal prof. Pierantoni.

Il Presidente ringrazia il Collega Cotronei e rinnova ai familiari del compianto Socio Russo, presenti all'Adunanza, l'espressione del più vivo cordoglio della Classe e suo personale per la scomparsa dell'illustre scienziato.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Perucca presenta il V ed ultimo volume del «Dizionario d'Ingegneria» da lui diretto; si tratta di un'opera di cui egli cominciò l'organizzazione nel gennaio 1944. Oggi l'opera è conclusa e il primo suo pensiero è quello di reverente omaggio alla memoria dei collaboratori scomparsi, e più di uno immaturamente. A coloro, Autori e Redattori, che lo hanno accompagnato fino al termine dell'opera e alla Casa Editrice U.T.E.T., grazie alla quale al Dizionario è stata data degnissima veste, il prof. Perucca esprime la sua riconoscenza, affermando che è per lui un onore parlarne nella augusta sede di questa Accademia.

L'oratore conclude, avvertendo che, ad opera compiuta, egli non vuole prender commiato dal lettore, ed auspica che il lettore stesso continui, come per il passato, a dare quei giudizi e quei suggerimenti che possono condurre gli Autori a mete migliori.

Il Presidente Giordani si compiace vivamente con il Collega Perucca per la magnifica realizzazione dell'importante opera.

Il prof. Perucca presenta poi, a nome anche del prof. Gori, un opuscolo, in lingua inglese, dal titolo: «Pioneers in Electrical Communications». Tale opuscolo contiene l'articolo scritto dai predetti professori Perucca e Gori, quale contributo dell'Accademia delle Scienze di Torino alla celebrazione del 250° anniversario della nascita di Beniamino Franklin, che dell'Accademia torinese fu Socio.

È una felice circostanza che sia presente alla seduta il Collega Quirino Majorana che è ben doverosamente ricordato tra i pionieri delle comuni-

cazioni elettriche. Il Majorana, pur lavorando in un ambiente del tutto immaturo e in condizioni difficilissime (si pensi che ancora non si conoscevano le onde portanti persistenti) riuscì, con una abilità sperimentale veramente ammirevole, ad effettuare le prime comunicazioni radiotelefoniche; esse furono tra l'Istituto Superiore delle Poste e Telegrafi di Roma e Monte Mario, a distanza cioè di quattro chilometri.

Il Socio Perucca, che ha avuto l'onore di succedere al Majorana nella cattedra di Fisica sperimentale del Politecnico di Torino, anche a nome del prof. Gori, attuale Direttore dell'Istituto Superiore delle Telecomunicazioni, è ben lieto di rendere omaggio, in questa occasione, all'amato Maestro e valoroso scienziato.

Il Socio Perucca, fatto omaggio all'Accademia del citato articolo, ne consegna anche una copia personalmente al Socio Majorana.

Il Presidente Giordani ringrazia il Collega Perucca per il gesto gentile che egli ha voluto compiere nei confronti del prof. Majorana.

L'intera Classe si associa con un vibrante applauso.

Il Socio Majorana ringrazia il prof. Perucca, e con lui il prof. Gori, per essersi così gentilmente riferiti ai suoi antichi lavori, che egli cominciò nel lontano 1894, e desidera ricordare che, come allora, egli lavora anche oggi, sia con il pensiero, sia sperimentalmente, sorretto dalla fiducia che gli studi, ai quali attualmente si dedica, possano essere presi in adeguata considerazione dai competenti.

Il Socio Puntoni presenta la seconda edizione del volume I del suo «Trattato d'Igiene», osservando che in questo eccezionale secolo, nel quale la scienza progredisce con un ritmo vertiginoso in tutte le sue branche e in tutte le sue applicazioni tecniche, i trattati delle discipline scientifiche invecchiano con altrettanta rapidità e che pertanto le nuove edizioni non hanno più oggi il carattere di una ristampa, bensì esigono un lavoro poderoso di ringiovanimento, di aggiornamento e di aumento. Egli confida di poter presentare all'Accademia, entro l'anno, il secondo volume del predetto trattato.

Il Socio Colonnetti presenta una sua opera dal titolo: «L'équilibre des Corps déformables» e mette in evidenza che, in tale lavoro, egli ha delineato una teoria dell'equilibrio dei corpi, valevole qualsiasi siano le cause che hanno dato origine alle deformazioni e qualsivoglia sia il carattere, elastico e non elastico, di queste deformazioni, con la sola limitazione, di carattere però essenziale, di supporre le deformazioni stesse piccolissime e del tutto trascurabili in rapporto alle dimensioni del corpo.

Il Socio Segre presenta due volumi della serie degli «Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete» da lui diretta, riguardanti la geometria algebrica. Il primo di essi, dal titolo «Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique», è dovuto a Pierre Samuel, e contiene un'esposizione limpida ed aggiornata dei fondamenti della geometria algebrica secondo le più importanti scuole geometriche odierne: fra queste non manca naturalmente la scuola italiana, rappresentata in tale campo soprattutto dal Severi, a cui risale il motto «Coi piedi di piombo», posto in testa all'Introduzione.

Il secondo volume, intitolato « Algebraic threefolds with special regard to problems of rationality », deve a Leonard Roth e fa il punto sulle nostre attuali conoscenze intorno alle varietà algebriche a tre dimensioni; si può rilevare fra l'altro che gli sviluppi sulle questioni di razionalità e sul problema dell'aggiunzione - nonostante l'entità dei contributi di G. Fano e dello stesso Roth - non hanno ancora raggiunto la perfezione conseguita nel caso delle superficie per merito soprattutto di G. Castelnuovo.

I due volumi sono stampati nell'ammirevole veste tipografica propria alla Casa Editrice Springer; ad essi faranno seguito altri volumi redatti da autori italiani, fra i quali i professori Baldassarri, Andreotti e lo stesso Socio Segre, che rispettivamente tratteranno della geometria sopra una varietà algebrica, delle varietà abeliane e delle relazioni fra geometria algebrica e geometria differenziale.

Il Socio Fantappiè presenta il primo fascicolo dei « Quaderni di San Giorgio », pubblicati dal Centro di Cultura e Civiltà della Fondazione Giorgio Cini, dal titolo: « Il valore del fine nel mondo ». Il fascicolo contiene scritti dei professori Rondoni, Fantappiè, Carnelutti e Bozzetti e inaugura così il metodo della collaborazione tra uomini di vario sapere, desiderosi di superare l'attuale divisione dei campi scientifici con una comunione di lavoro che equilibri la divisione stessa e contribuisca a lumeggiare l'importanza del principio di finalità, che si presenta tanto nelle scienze fisiche che nelle scienze morali, e può quindi stabilire un essenziale elemento di unione tra tutte queste scienze.

Il Socio Penta presenta una raccolta di alcuni suoi studi e di altri eseguiti e pubblicati dai suoi collaboratori dal 1950 a fine 1955 sui fenomeni esalativi (di vapore acqueo) ed idrotermali del territorio italiano (Larderello e dintorni, Viterbese, Campi Flegrei e Isola d'Ischia), dell'Argentina e del Salvador. Gli studi, aventi di mira la utilizzazione del vapore e delle acque ad alta temperatura per la creazione di energia elettrica, sono stati eseguiti assistendo attivamente ai lavori di ricerca condotti da vari Enti e Società (Soc. Larderello, S.A.F.E.N., Terni, ecc.). La rielaborazione dei dati e la loro pubblicazione sono state effettuate entro l'ambito dell'attività dell'attuale Centro di Studio per la Geologia Tecnica del Consiglio Nazionale delle Ricerche e, in genere, grazie ai contributi concessi dallo stesso Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il predetto Socio Penta presenta anche un fascicolo pubblicato dal C.N.R. come supplemento de « La Ricerca Scientifica », contenente i dati raccolti sulle caratteristiche tecniche delle rocce del Lazio, utilizzate o utilizzabili come materiali da costruzione.

Il Socio Crocco, a nome della Presidenza dell'Associazione Italiana di Aeronautica, presenta il volume « L'esplorazione dello spazio » di Arthur Clarke, Presidente della Società Interplanetaria britannica e autore di numerosi studi di carattere teorico sui problemi del volo interplanetario. Nella citata opera, l'Autore illustra le esperienze e le future possibilità dell'astronautica con uno stile vivo e brillante, in modo da rendere accessibile la trat-

tazione ai lettori non specializzati, ma fondando sempre le sue ipotesi sui fatti, o almeno su delle possibilità.

Con l'occasione, il Socio Crocco informa la Classe del programma del VII Congresso Astronautico Internazionale, che avrà luogo a Roma dal 17 al 22 settembre p. v., e rinnova ai Colleghi la preghiera di voler dare il loro apporto scientifico ai lavori del Congresso al quale parteciperanno illustri scienziati stranieri in rappresentanza di circa venti Nazioni.

Il Presidente Giordani ringrazia i Soci che hanno presentato pubblicazioni in omaggio all'Accademia.

Il Segretario accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci: Scorza Dragoni, Picone, Graffi, Margaria, Chiarugi, Colonnetti, anche a nome del Collega Wataghin, D'Ancona, Segre, Rossi-Fanelli e Armellini.

Il Socio Tonzig presenta una Memoria di Erasmo Marré e Orietta Servettaz, dal titolo: « Fisiologia vegetale – Vie di trasporto di elettroni dai coenzimi piridinici all'ossigeno in preparati enzimatici di foglie di *Pisum* ».

Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dal predetto Socio Tonzig e dal Collega Chiarugi.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

SEGRE B. – Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota II.

KIRBY D. – Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota III (pres. dal Socio B. SEGRE).

MESSERI A. – Sulla localizzazione della resina nei canali resiniferi del corpo legnoso delle Conifere (pres. dal Socio A. CHIARUGI).

VIOLA T. – Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti. Nota II (pres. dal Socio Straniero W. SIERPINSKI).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Beccari, anche a nome del Collega Cotronei, dà lettura della relazione della Commissione incaricata di esaminare la Memoria di R. Stefani dal titolo « Il problema della partenogenesi in *Haploembia Solieri* Ramb. ».

Detta relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 marzo 1956

- BOSSOLASCO Mario. — *Alcuni caratteri del moto ondoso e la mareggiata eccezionale nel golfo di Genova del 19 febbraio 1955*. Estr. da « Geofisica e Meteorologia », vol. III, 1955, n. 6.
- BRUNI Giordano. — *Virus e vita*. Estr. da « Eco del Lavoro », 23 dicembre 1955.
- CLARKE Arthur C. — *L'esplorazione dello spazio*. Torino, Einaudi, 1955, Pp. 198, in-8°, con figg. e tavv.
- COLONNETTI Gustavo. — *L'équilibre des corps déformables*. Paris, Dunod, 1955. Pp. XI-162, in-8°, con figg.
- CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE. CENTRO DI STUDIO DI GEOLOGIA TECNICA. — *Ricerche per forze endogene. 1950-55*. (Volume miscellaneo).
- Dizionario d'ingegneria*. Diretto da Eligio Perucca. Vol. V: *Rum-Z*. Torino, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1956. Pp. XII-1046, in-4°, con figg. e tavv.
- GORI Vittorio. — Vedi: PERUCCA Eligio e GORI Vittorio.
- Le livre du Centenaire de la naissance de Henri Poincaré, 1854-1954*. Paris, Gauthier-Villars, 1955. Pp. 305, in-8°, con tavv.
- Materialy po patogenezy i lečeniju šoka*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1951. Pp. 218, in-8°, con figg.
- PENTA Francesco. — *I materiali da costruzione del Lazio*. « La Ricerca Scientifica » a. XXVI, 1956, suppl.
- PERUCCA Eligio. — Vedi: *Dizionario d'ingegneria*.
- PERUCCA Eligio and GORI Vittorio. — *Pioneers in Electrical Communications*. Estr. da « Journal of the Franklin Institute », vol. CCLXI, 1956, n. 1 (B. Franklin's Celebrations, 250th Anniversary).
- PUNTONI Vittorio. — *Trattato d'igiene*. 2^a ed. Vol. I: *Igiene generale e speciale*. Roma, Tumminelli, 1955. Pp. XV-858, in-8°, con figg.
- RIVAS Dagoberto. — *Foundations of modern science*. Long Beach (California), Platz Press, 1955. Pp. 16, in-16°.
- ROTH Leonard. — *Algebraic threefolds with special regard to problems of rationality*. Berlin ecc. . . , Springer-Verlag, 1955. Pp. VIII-142, in-8° (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, n. f., h. 6. Reihe: Algebraische Geometrie besorgt von B. Segre).
- ROY A. R. — *Rain-making. Its present position and future possibilities*. New-Delhi, Council of Scientific and Industrial Research, 1955. Pp. 31, in 8°, con figg.
- SAMUEL P. — *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*. Berlin ecc. . . , Springer-Verlag, 1956. Pp. IX-133, in-8° (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, n. f., h. 4. Reihe: Algebraische Geometrie besorgt von B. Segre).
- TRAMONTE Raffaele. — *Contributo allo studio delle acque sotterranee di Capitanata*. Bari, Laterza, 1955. Voll. 3, in fol., con tavv.
- VAGLIASINDI Carmelo. — *La teoria orografico-monoglaciale. Paralipomeni*. Randazzo, Arti Graf. Palermo & Figli, 1956. Pp. 24, in 4°.
- Il valore del fine del mondo*. Firenze, Sansoni, 1955. Pp. 133, in-8° (Quaderni di San Giorgio, 1).

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 14 aprile 1956

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.* Nota (*) II (**), del Socio BENIAMINO SEGRE.

8. Nella presente Nota, le lettere u, v e w (eventualmente munite di indici) denoteranno funzioni note di d variabili reali x_1, x_2, \dots, x_d , definite in una regione connessa dello spazio S_d di queste variabili, ed ivi derivabili finché occorra. La y designerà del pari una funzione incognita di tali variabili, e si porrà talora, per semplificare la scrittura,

$$y^{k_1 k_2 \dots k_d} = \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_d} y}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_d^{k_d}} \quad (\text{in particolare: } y^{\circ \circ \dots \circ} = y).$$

Chiameremo poi (in conformità col n. 2) **polinomio differenziale**, un operatore differenziale esprimibile con una somma finita del tipo

$$\alpha = \sum_k a_{k_1 k_2 \dots k_d} \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_d}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_d^{k_d}},$$

dove le a siano costanti. Ad un siffatto operatore rimane associato in corrispondenza isomorfica il **polinomio**

$$\alpha = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_d) = \sum_k a_{k_1 k_2 \dots k_d} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_d^{k_d};$$

se questo non si riduce ad una costante, denoteremo con la stessa lettera α l'ipersuperficie di S_d di equazione

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0,$$

(*) Continuazione della Nota I, apparsa alle pp. 271-277 di questo volume dei « Rendiconti ».

(**) Presentata nella seduta del 10 marzo 1956.

e diremo che a ed α sono l'un l'altro associati e che a è l'ipersuperficie caratteristica dell'operatore α .

Con le suddette notazioni, la più generale equazione a derivate parziali lineare ed a coefficienti costanti sarà data semplicemente da $\alpha y = u$, questo essendo un modo abbreviato di scrivere l'equazione

$$\sum_k a_{k_1 k_2 \dots k_d} y^{k_1 k_2 \dots k_d} = u.$$

9. Ci proponiamo di studiare le condizioni di compatibilità dei sistemi formati da un qualunque numero $h (\geq 2)$ di equazioni a derivate parziali, lineari ed a coefficienti costanti, in una stessa funzione incognita $y = y(x_1, x_2, \dots, x_d)$.

Per il sistema

$$(21) \quad \alpha_1 y = u_1, \quad \alpha_2 y = u_2, \quad \dots, \quad \alpha_h y = u_h$$

si hanno intanto subito le $h(h-1)/2$ condizioni necessarie

$$(22) \quad \alpha_i u_j = \alpha_j u_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, h);$$

e la questione è anzitutto di vedere se e quando queste condizioni siano anche sufficienti. Risulterà dal seguito come la risposta dipenda essenzialmente da certe proprietà del modulo (a_1, a_2, \dots, a_h) determinato dai polinomi a_i associati agli operatori α_i che figurano nei primi membri delle (21). Converrà talora scrivere le (22) nella forma

$$(23) \quad v_{ij} = v_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, h),$$

avendo assunto per definizione:

$$(24) \quad v_{ij} = \alpha_j u_i.$$

10. Un caso assai semplice in cui le (22) bastano ad assicurare la compatibilità delle (21), si ha quando le *ipersuperficie algebriche* a_1, a_2, \dots, a_h di S_d - associate agli operatori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ - non abbiano alcun punto (reale o complesso) a comune a distanza finita. In tale ipotesi si ha anzi che - se valgono le (22) - il sistema (21) ammette una ed una sola soluzione, la quale può venir calcolata - operando sulle u con sole derivazioni - nel modo seguente (cfr. B. Segre [12], n. 1). In virtù dell'ipotesi ammessa, esistono dei polinomi differenziali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ in corrispondenza ai quali risulta identicamente

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_h \alpha_h = 1$$

(cfr. Perrin [11], od anche van der Waerden [15], p. 5); ebbene, la suddetta soluzione è allora data precisamente da

$$y = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_h u_h.$$

Si possono però costruire quanti esempi si vogliano di sistemi (21) per cui valgano le (22), e che tuttavia *non ammettano nessuna soluzione*. All'uopo basta osservare che ogni *sizigia*

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_h a_h = 0$$

fra i polinomi a dà luogo ad un'identità fra polinomi differenziali della forma

$$(25) \quad \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_h \alpha_h = 0.$$

Dalla (25) si trae subito che, affinché il sistema (21) ammetta qualche soluzione, occorre si abbia

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_h u_h = 0;$$

ora questa relazione differenziale fra le funzioni note u_i non è necessariamente conseguenza delle (22), come ad esempio si vede senz'altro nel caso in cui le l (e quindi pure le λ) siano costanti non tutte nulle, oppure assumendo $\alpha_1 = \beta_1 \gamma$, $\alpha_2 = \beta_2 \gamma$ (con γ polinomio differenziale non ridotto a costante) e quindi $\lambda_1 = \beta_2$, $\lambda_2 = -\beta_1$, $\lambda_3 = \dots = \lambda_h = 0$; altri esempi al riguardo risulteranno dalla successiva Nota III (cfr. l'Osservazione alla fine del n. 15).

Criteri abbastanza ampi per la *sufficienza* delle condizioni di compatibilità (22), distinti da quello richiamato al principio di questo numero, verranno qui stabiliti nei nn. 11, 13.

11. Dimostreremo anzitutto in proposito il seguente teorema.

Le (22) risultano condizioni necessarie e sufficienti affinché il sistema di equazioni a derivate parziali (21) ammetta qualche soluzione, qualora si supponga che: (i) le u_1, u_2, \dots, u_h siano funzioni analitiche dei loro argomenti; (ii) sia abbia $2 \leq h \leq d$; (iii) le ipersuperficie algebriche $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ caratteristiche degli operatori $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ abbiano, nello spazio proiettivo complesso a d dimensioni che le contiene, un'intersezione c di dimensione regolare $d-h$.

Basterà all'uopo stabilire la *compatibilità* delle (21), nell'ipotesi che valgano le (i), (ii), (iii) e che, definite le v con le (24), sussistano le (23). A tal fine incominciamo con l'osservare che dalle (ii), (iii), in forza di una nota proposizione algebrico-geometrica (cfr. Bertini [9], Cap. XII, n. 16), discende che — se le λ verificano un'identità del tipo (25) — debbono esistere dei polinomi differenziali π_{ij} soddisfacenti alle

$$(26) \quad \pi_{ij} = -\pi_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, h),$$

per i quali risulti identicamente

$$(27) \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^h \pi_{ij} \alpha_j;$$

ed è chiaro che, viceversa, dalle (26), (27) segue la (25).

D'altro canto, in base alla (i) ed a classiche proprietà dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico, le singole condizioni d'integrabilità del sistema (21) si hanno tutte prolungando con differenziazioni successive il sistema stesso fino ad un dato ordine (sufficientemente elevato), ed eliminando poscia le $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ fra le equazioni così ottenute. Poiché queste equazioni contengono le $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ linearmente e con coefficienti costanti, l'eliminazione fra esse delle $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ si ottiene combinando fra loro le suddette equazioni linearmente con opportuni coefficienti costanti. Ne consegue che una qualunque delle richieste condizioni d'integrabilità è della forma

$$\lambda_1 (\alpha_1 y - u_1) + \lambda_2 (\alpha_2 y - u_2) + \dots + \lambda_h (\alpha_h y - u_h) = 0,$$

ossia

$$(28) \quad (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_h \alpha_h) y = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_h u_h,$$

dove le λ denotino convenienti polinomi differenziali; questi polinomi debbono più precisamente soddisfare identicamente alla (25), in quanto occorre che nella (28) - a calcoli fatti - non compaia nessuna delle $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$.

Si ha dunque che - in corrispondenza ad una qualunque condizione (28) d'integrabilità - valgono di necessità relazioni della forma (27), (26), onde la (28) riducesi semplicemente alla

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_h u_h = 0.$$

Orbene, l'asserto segue da ciò che quest'ultima è di fatto una conseguenza delle (23). Invero dalle (27), (24) si trae che è:

$$\sum_{i=1}^h \lambda_i u_i = \sum_{i,j=1}^h \pi_{ij} \alpha_j u_i = \sum_{i,j=1}^h \pi_{ij} v_{ij};$$

e l'ultima somma risulta identicamente nulla in forza delle (23), (26).

12. Le considerazioni del numero precedente suggeriscono diverse questioni che paiono ben degne di venire approfondite. Gli sviluppi del presente numero arrecano un primo contributo in tale senso, sufficiente già a mostrare l'importanza che per tali questioni ha la varietà algebrica \mathfrak{c} definita in (iii) nell'enunciato del n. 11; ulteriori precisazioni ed estensioni si troveranno nel successivo n. 13.

Occorre anzitutto distinguere due casi, secondoché la varietà \mathfrak{c} è situata tutta all'infinito o meno.

Nel primo caso si possono applicare i risultati del primo capoverso del n. 10, sicché - se sono soddisfatte le condizioni d'integrabilità (22) - il sistema (21) ammette allora una ed una sola soluzione, calcolabile operando sulle u con sole derivazioni.

Nel secondo caso potremo scrivere un'uguaglianza del tipo

$$(29) \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{c}_f + \mathfrak{c}_i,$$

dove c_f denoti una varietà algebrica non vuota, pura, di dimensione $d-h$ (riducibile od irriducibile), nessuna componente della quale giaccia per intero all'infinito, mentre c_i — che può eventualmente mancare — sia un'analoga varietà situata tutta all'infinito. Stabiliremo allora il seguente teorema.

Conservando le notazioni e le ipotesi del n. II, si supponga inoltre che la varietà algebrica c non giaccia tutta all'infinito, talché valga la (29) con $c_f \neq 0$. Allora, se sono soddisfatte le condizioni d'integrabilità (22), il sistema (21) ammette un integrale generale analitico dipendente da un'infinità o da un numero finito di costanti arbitrarie, secondoché risulti $h < d$ od $h = d$. In quest'ultimo caso, il numero delle costanti arbitrarie è dato precisamente dal numero dei punti del gruppo c_f , ove naturalmente ognuno di questi punti si computi con la molteplicità ch'esso ha come intersezione delle $h = d$ ipersuperficie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$.

Fissato un punto (x_1, x_2, \dots, x_d) in cui le u_1, u_2, \dots, u_h siano olomorfe, si scriva lo sviluppo di Taylor — nell'intorno di quello — relativo ad una soluzione y olomorfa del dato sistema. I coefficienti $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ di questo sviluppo sono unicamente tenuti a soddisfare le (21) e le loro conseguenze differenziali, dopo di che lo sviluppo suddetto rappresenta — nell'intorno di quel punto — la più generale soluzione olomorfa del dato sistema.

Si tratta dunque di vedere quante delle $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ rimangono libere, quando si assoggettino le $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ alle equazioni che si ottengono combinando linearmente, con coefficienti costanti arbitrari, le equazioni (21) e le loro conseguenze differenziali. In forza del n. II, quelle fra tali equazioni che non contengono le $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ sono ora identicamente soddisfatte, in virtù delle (22); le rimanenti, avuto riguardo alla (28), sono tutte e sole quelle fornite dalla

$$(30) \quad \beta y = w,$$

dove β è un polinomio differenziale non identicamente nullo esprimibile nella forma

$$(31) \quad \beta = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_h \alpha_h,$$

al variare dei polinomi differenziali $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$, e si è inoltre posto per abbreviare

$$w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_h u_h.$$

Va rilevato che β non può mai ridursi ad una costante (non nulla), poiché altrimenti — in forza della (31) — la varietà algebrica c giacerebbe tutta all'infinito, contrariamente a ciò ch'è stato ammesso nel teorema da dimostrare. Possiamo quindi (n. 8) considerare l'ipersuperficie b associata a β : in base alla (31), essa è tenuta soltanto ad appartenere al modulo $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h)$, il che fra l'altro esige che b passi — almeno semplicemente — per le singole componenti della varietà c_f .

Ciò premesso, fissiamo un qualunque numero naturale n . Le $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ di ordine $k_1 + k_2 + \dots + k_d \leq n$ sono complessivamente in numero di

$$d_n = \binom{n+d}{d};$$

detto r_n il numero massimo di equazioni (30) fra loro linearmente indipendenti ed involgenti soltanto quelle $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$, si ha che - nel calcolo di cui al precedente capoverso - a precisamente $d_n - r_n$ opportunamente scelte di tali $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ possono venire attribuiti valori costanti arbitrari, dopo di che ciascuna delle $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ di ordine $k_1 + k_2 + \dots + k_d \leq n$ rimane univocamente determinata. Dal punto di vista geometrico, $d_n - 1$ è la dimensione del sistema lineare costituito da tutte le ipersuperficie algebriche \mathfrak{b} d'ordine n di S_d (ove figurano anche le ipersuperficie al finito d'ordine $n' < n$, alle quali si aggrega l'iperpiano all'infinito di S_n contato $n - n'$ volte); del pari, $r_n - 1$ è la dimensione del sistema lineare formato dalle ipersuperficie \mathfrak{b} d'ordine n che appartengono al modulo $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h)$ (con un'analogia avvertenza relativamente all'ordine). Ne consegue che:

Il suddetto numero $d_n - r_n$ uguaglia il numero delle condizioni distinte che si debbono imporre ad un'ipersuperficie \mathfrak{b} d'ordine n di S_d affinché appartenga al modulo $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h)$.

Si ha quindi che $d_n - r_n$ risulta non inferiore al numero delle condizioni imposte alle \mathfrak{b} dal passaggio per le singole componenti della varietà $(d - h)$ -dimensionale \mathfrak{c}_f . Se $h < d$, quest'ultimo numero - e quindi pure $d_n - r_n$ - cresce indefinitamente al crescere di n ; e ciò dimostra la prima parte del teorema.

Esaminiamo infine il caso restante, in cui $h = d$. Denotiamo ordinatamente con $n_1, n_2, \dots, n_h = n_d$ gli ordini delle ipersuperficie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$, ossia gli ordini delle equazioni differenziali costituenti il dato sistema (21), e supponiamo

$$n \geq n_1 n_2 \dots n_d - 1.$$

In virtù di un risultato algebrico-geometrico (B. Segre [12], n. 14), le condizioni di cui all'ultimo enunciato possono allora venir espresse mediante sistemi di condizioni inerenti ai singoli punti di \mathfrak{c} , e cioè - in base alla (29) - ai punti di \mathfrak{c}_f ed ai punti di \mathfrak{c}_i . Però - dall'attuale punto di vista - non occorre tener conto delle condizioni imposte dai punti di \mathfrak{c}_i , poiché esse risultano automaticamente soddisfatte se all'ipersuperficie \mathfrak{b} d'ordine n si aggrega - com'è lecito - l'iperpiano all'infinito contato n volte (cfr. B. Segre [12], n. 17) ⁽³⁾. Invece ciascuno dei punti di \mathfrak{c}_f impone un numero di condizioni distinte pari alla sua molteplicità (B. Segre [12], n. 14). Si conclude così con la seconda parte del teorema.

(3) Ciò significa che - nella (31) - gli ordini degli operatori β e λ_i sono da supporre rispettivamente non superiori ad n e $2n - n_i$; talché - come facilmente se ne constata l'effettiva possibilità su esempi - l'ordine di taluno degli addendi del secondo membro della (31) può risultare superiore all'ordine del primo membro.

13. È presumibile che molte delle proprietà di cui ai nn. 11, 12 possano venir estese al caso non analitico. Qui ci limiteremo a mostrare come ciò sia effettivamente possibile per $h = d$, sotto la quale ipotesi arrecheremo anche un significativo complemento al teorema del n. 12.

Riferiamoci dunque al sistema di equazioni differenziali

$$(32) \quad \alpha_1 y = u_1, \quad \alpha_2 y = u_2, \quad \dots, \quad \alpha_d y = u_d,$$

degli ordini rispettivi n_1, n_2, \dots, n_d , dei cui secondi membri si supponga soltanto che *ne esistano continue tutte le derivate fino all'ordine $2 n_1 n_2 \dots n_d + 1$* . Ammettiamo inoltre che siano soddisfatte le condizioni di compatibilità (di cui è detto al n. 9), e che le ipersuperficie caratteristiche $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ non abbiano che un numero finito di punti a comune, dei quali esattamente m ($\leq n_1 n_2 \dots n_d$) risultino a distanza finita; nel numero m — che potrà suppersi positivo (senza di che si ricadrebbe nel caso già trattato al principio del n. 10) — ogni intersezione al finito dev'essere computata con la propria molteplicità.

Assunto $n = n_1 n_2 \dots n_d - 1$, e tenuto conto del n. 12 (segnatamente della nota a pie' di pagina), vediamo come — anche nelle ipotesi attuali — possa venire scritto tanto il sistema, $(30)_n$, di tutte le equazioni (30) con le β polinomi differenziali non nulli di grado $\leq n$ e del tipo (31), quanto gli analoghi sistemi $(30)_{n+1}$ e $(30)_{n+2}$. Il sistema $(30)_n$ permette intanto di esprimere le varie $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ di grado $k_1 + k_2 + \dots + k_d \leq n$ in funzione di m convenientemente scelte fra esse, fra le quali le $(30)_n$ non pongano alcun legame (n. 12). Dette z_1, z_2, \dots, z_m queste ultime, si ottengono così — per tutti i valori delle k la cui somma non superi n — formule del tipo

$$(33) \quad y^{k_1 k_2 \dots k_d} = f_{k_1 k_2 \dots k_d}(z_1, z_2, \dots, z_m) + w_{k_1 k_2 \dots k_d}(x_1, x_2, \dots, x_d),$$

dove le f denotano funzioni lineari delle z a coefficienti costanti; mentre poi — in virtù di quanto sopra — nessuna equazione del sistema $(30)_n$ può contenere (tutte o in parte) le z_1, z_2, \dots, z_m e nessun'altra $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$, e vi sono precisamente m delle (33) il cui secondo membro si riduce ad una delle z_i ($i = 1, 2, \dots, m$).

Il sistema $(30)_{n+1}$ include manifestamente $(30)_n$ come sottosistema, e permette del pari di esprimere le varie $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ di grado $k_1 + k_2 + \dots + k_d \leq n+1$ in funzione di m fra esse. Rileviamo che nessuna equazione di $(30)_{n+1}$ può contenere taluna fra le z_1, z_2, \dots, z_m e nessun'altra $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$; infatti una siffatta equazione già starebbe in $(30)_n$, il che però contraddirebbe un risultato precedente. Dalle $(30)_{n+1}$ possono quindi ricavarli le (33), ed inoltre equazioni ancora del tipo delle (33), nelle quali però $k_1 + k_2 + \dots + k_d = n+1$; fra esse si hanno dunque in ogni caso equazioni fornenti le derivate prime delle z , le quali risultano così della forma

$$(34) \quad \frac{\partial z_l}{\partial x_i} = f_{li}(z_1, z_2, \dots, z_m) + w_{li}(x_1, x_2, \dots, x_d)$$

$$(l = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, d),$$

dove anche qui le f denotano funzioni lineari delle z a coefficienti costanti.

Derivando ambo i membri della (34) rispetto ad una qualunque, x_j , delle x , e combinando linearmente l'equazione così ottenuta con le (34) in modo da eliminare da quella le derivate prime delle z , si ottiene un'equazione del tipo

$$\frac{\partial^2 z_l}{\partial x_i \partial x_j} = f_{lij}(z_1, z_2, \dots, z_m) + w_{lij}(x_1, x_2, \dots, x_d),$$

la quale appartiene manifestamente al sistema $(30)_{n+2}$; a quest'ultimo appartiene altresì l'equazione ricavata nell'identico modo dalle (34) con lo scambio di i ed j . I secondi membri delle due equazioni suddette debbono coincidere identicamente: altrimenti da esse si otterrebbe per sottrazione un'equazione di $(30)_{n+1}$ contenente le z_1, z_2, \dots, z_m e nessun'altra $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$, oppure un legame fra le sole x non soddisfatto in conseguenza delle condizioni di compatibilità, il che non può essere. Ciò dimostra che il sistema (34) è completamente integrabile.

Le (34) forniscono quindi le z in funzione delle x con sole quadrature, nell'integrale generale figurando m costanti arbitrarie, date per esempio dai valori iniziali delle z (cfr. Mayer [10], od anche Severi [13]). Sostituendo le espressioni così trovate nelle (33), si ottengono le $y^{k_1 k_2 \dots k_d}$ come funzioni delle x e delle m costanti suddette, per tutti i valori delle k di somma non superiore ad n . Con un'argomentazione analoga a quella del precedente capoverso, si constata inoltre che per esse risulta

$$y^{k_1 k_2 \dots k_d} = \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \dots + k_d} y^{\infty \dots \infty}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_d^{k_d}};$$

e, poiché le (33) verificano per costruzione le (32), così la funzione $y = y^{\infty \dots \infty}$ dianzi ottenuta porge l'integrale generale del sistema (32). Pertanto:

Sotto le ipotesi specificate nel secondo capoverso del presente numero (meno restrittive di quelle date dal teorema del n. II per $h = d$), l'integrale generale del sistema (32) può venir determinato con sole quadrature nel modo suindicato. Esso dipende da esattamente m costanti arbitrarie, dove m denota il numero delle intersezioni (reali o complesse) giacenti al finito delle d ipersuperficie caratteristiche relative alle (32), ciascuna intersezione essendo computata in quel numero con la propria molteplicità.

Nel caso più semplice $d = 2$, questo risultato è già stato stabilito da Sobrero [14], con argomentazioni sostanzialmente non dissimili da quelle qui svolte. Va però avvertito che nella trattazione di questo A. v'è una manchevolezza in un punto essenziale, in quanto non si tien conto adeguatamente della possibilità da noi indicata in nota nel n. 12; ciò fa sì che ivi si affermi che l'integrale generale del sistema integrabile considerato, di $d=2$ equazioni differenziali, deve dipendere da un numero di costanti arbitrarie dato dal prodotto degli ordini delle due equazioni, mentre esso può di fatto risultare inferiore a questo prodotto, e persino ridursi allo zero (cfr. il primo capoverso del nostro n. 10).

BIBLIOGRAFIA.

- [9] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2^a ed. (Messina, Principato, 1923).
- [10] A. MAYER, *Über unbeschränkt integrable Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen und die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen*, «Math. Ann.», 5, 448-470 (1872).
- [11] R. PERRIN, *Sur la relation qui existe entre p fonctions entières de $p-1$ variables*, «Comptes Rendus Ac. Sc.», Paris, 106, 1789-91 (1888).
- [12] B. SEGRE, *Invarianti topologico-differenziali, varietà di Veronese e moduli di forme algebriche*, «Ann. di Mat.», (4), 41 (1956) (in corso di stampa).
- [13] F. SEVERI, *Sul metodo di Mayer per l'integrazione delle equazioni lineari ai differenziali totali*, «Atti Ist. Veneto», 69, 419-425 (1910).
- [14] L. SOBRERO, *Un teorema relativo ai sistemi differenziali*, «Rend. Acc. Naz. Lincei», (6) 21, 317-325 (1935)₁.
- [15] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra*, II Teil, 3. Aufl. der «Modernen Algebra» (Berlin, Springer, 1955).

Fisica matematica. — *Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo.* Nota I (*) del Corrisp. ANGELO TONOLO.

La determinazione del campo elettromagnetico nel vuoto, o all'interno di un dielettrico S omogeneo, isotropo in riposo, nell'ipotesi della conoscenza del campo nei punti della superficie chiusa σ che lo limita, fu conseguita la prima volta dal Love ⁽¹⁾ e, alcuni anni dopo, dal Larmor ⁽²⁾ e da me ⁽³⁾.

Successivamente, sotto ipotesi più generali, supponendo cioè il mezzo S conduttore e percorso anche da correnti di convezione, con sorgenti di elettricità, le formule risolutive furono assegnate dal Tedone ⁽⁴⁾ e, più tardi, da me ⁽⁵⁾, con l'aggiunta della conoscenza del campo all'interno della superficie σ nell'istante iniziale. Recentemente la questione è stata ripresa e risolta dallo Sbrana ⁽⁶⁾, per i dielettrici percorsi da correnti di convezione.

(*) Presentata nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) A. LOVE, *The integration of the equations of propagation of electric waves*, «Phil. Trans. of the R. Soc. of London», vol. 197 (1901).

(2) J. LARMOR, *On the mathematical expression of the principle of Huygens*, «Proc. of the London Math. Soc.», vol. I (1904) e vol. 19 (1920).

(3) A. TONOLO, *Sull'integrazione delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica*, «Ann. di Mat.», ser. III, Tomo XVII (1910).

(4) O. TEDONE, *Sull'integrazione delle equazioni di Maxwell*, «Rend. Acc. Lincei», ser. 5^a, vol. XXV (1916).

(5) A. TONOLO, *Sull'integrazione delle equazioni elettromagnetiche di Maxwell-Hertz*, «Ann. di Matem.», ser. IV, Tomo VIII (1930-31).

(6) F. SBRANA, *Un nuovo procedimento per l'integrazione delle equazioni dell'elastodinamica e dell'elettromagnetismo*, «Rend. Sem. mat. Univ. di Padova», Anno XXIV (1955), Parte prima.

Oltre gli autori citati, altri si sono occupati del problema in discorso. Per la bibliografia, rimandiamo all'opera:

J. STRATTON, *Electromagnetic Theory*, «Mc Graw-Hill Book Company» New-York (1952). Cap. VIII, § 48 b.

Mi sia qui permesso ritornare sull'argomento, per segnalare una forma sotto la quale si possono mettere le espressioni analitiche degli integrali in discorso, la quale non mi sembra priva di interesse. Questa forma, a meno di un termine addizionale, è analoga a quella che ho ottenuto in una recente ricerca ⁽⁷⁾, ove ho mostrato che gli integrali delle equazioni che reggono le vibrazioni elettromagnetiche nei mezzi omogenei e isotropi in riposo, nell'ipotesi della conoscenza del campo all'istante iniziale in tutto lo spazio, si possono ottenere in questo modo: scritte così le equazioni di Maxwell-Hertz:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - a \operatorname{rot} \mathbf{H} + b \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

$$-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{1}{a} \operatorname{rot} \mathbf{E} + b \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

gli integrali \mathbf{E} , \mathbf{H} in tutto lo spazio e per ogni valore positivo della variabile t , si ottengono dai primi membri delle equazioni vettoriali soprascritte, ponendo al posto di \mathbf{E} , \mathbf{H} due funzioni delle coordinate di spazio e di t e cambiando segno alla costante b . Queste funzioni ausiliarie sono espresse con quadrature portate sui valori iniziali di \mathbf{E} , \mathbf{H} . Nella presente ricerca, la determinazione di questi vettori nei punti di S e per qualunque valore positivo della variabile t , purché superiore ad un certo limite, si ottiene ancora dai primi membri delle soprascritte equazioni vettoriali, sostituendo al posto di \mathbf{E} , \mathbf{H} due funzioni ausiliarie, cambiando segno alla b , ma aggiungendo ai termini così ottenuti, il gradiente di una terza funzione. Queste tre funzioni sono espresse mediante quadrature portate sui valori iniziali di \mathbf{E} , \mathbf{H} all'istante iniziale nel mezzo S e su quelli per ogni valore di t nei punti della superficie σ .

Nel caso di mezzi non assorbenti, le nostre formule si riducono a quelle di Larmor-Tedone ⁽⁸⁾, ove si tenga conto dei diversi riferimenti spaziali e temporali ⁽⁹⁾.

Spero in seguito poter mostrare l'interesse delle formule ottenute anche dal lato applicativo.

(7) A. TONOLO, *Sull'integrazione delle equazioni di propagazione delle onde elettromagnetiche nei mezzi omogenei isotropi e cristallini*, « Ann. di Mat. », ser. IV, Tomo XXXIX (1955).

(8) B. B. BAKER-E. T. COPSON, *The mathematical theory of Huygens' Principle*, « Oxford Univ. Press » (1939), Cap. III, § 1, p. 105.

(9) Per quistioni che si collegano al nostro problema, siano menzionate le ricerche di F. BUREAU, delle quali ci limitiamo solo a indicare, anche per la bibliografia, la Conferenza: *Quelques questions de Géométrie suggérées par la théorie des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques*, « Colloque de Géométrie algébrique », Masson, Paris (1950) e la Memoria: *Divergent Integrals and Partial Differential Equations*, « Comunic. on pure and appl. Mathem. », vol. VIII (1955). Cfr. anche: E. LINÉS ESCARDO, *Resolución en forma finita del problema de Cauchy sobre una hipersuperficie cualquiera en la ecuación de ondas con cualquier número de variables, y en otras notables de tipo hiperbólico con coeficientes constantes*, « Collec. Math. », Seminario mat. de Barcelona, vol. II (1949).

1. Denotiamo con S un mezzo omogeneo, isotropo, conduttore, in riposo, con \mathfrak{E} , \mathfrak{H} rispettivamente la forza elettrica e magnetica in un punto di coordinate cartesiane ξ, η, ζ e all'istante di tempo τ , con $\varepsilon, \lambda, \mu, c$ il potere induttore specifico, la conducibilità elettrica, la permeabilità magnetica e la velocità della luce nel vuoto. In assenza di correnti di convezione e di sorgenti di elettricità, alle equazioni di Maxwell-Hertz in S delle vibrazioni elettromagnetiche si può dare la forma seguente:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - a \operatorname{rot} \mathbf{H} + b \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & a &= \sqrt{\mu/\varepsilon}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{a} \operatorname{rot} \mathbf{E} - b \mathbf{H} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, & b &= 2\pi\lambda\mu, \end{aligned} \quad t = \tau/\varepsilon\mu,$$

$$\mathbf{E} = e^{bt} \mathfrak{E}, \quad \mathbf{H} = e^{bt} \mathfrak{H},$$

ove gli operatori rot , div sono riferiti alle coordinate cartesiane x, y, z legate alle ξ, η, ζ dalle relazioni

$$x = \xi/c \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad y = \eta/c \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad z = \zeta/c \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Dalle (1) si trae, come conseguenza, che ognuno dei vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} soddisfa all'equazione

$$(2) \quad \Delta_2 U - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b^2 U = 0, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Per fissare le idee, prendiamo in considerazione il vettore \mathbf{E} e cerchiamo per esso una espressione analitica la quale permetta di determinare il suo valore in ogni punto P_1 di S e per qualunque valore positivo t_1 della variabile t (superiore ad un certo limite) nell'ipotesi di conoscere i vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} all'interno di S nell'istante iniziale e sui punti di σ per qualunque valore di t . Per evitare in seguito ogni confusione, noi indicheremo con x_1, y_1, z_1 le coordinate del punto P_1 fissato, ma qualunque, all'interno di S , mentre denoteremo con x, y, z quelle di un punto Q variabile in S e sopra σ . Denotiamo con E_x la componente di \mathbf{E} secondo l'asse delle x ; poiché questa funzione soddisfa all'equazione (2), il suo valore nel punto P_1 e per il valore t_1 della variabile t è dato da ⁽¹⁰⁾

$$(3) \quad 4\pi E_x(P_1, t_1) = b^2 \int_S \left\{ E_x \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{I_1(\rho)}{\rho} + \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right\}_{t=0} dS +$$

(10) Sia U una soluzione regolare dell'equazione (2) in S e per qualunque t ; denotiamo con $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto interno di S , con t_1 un fissato valore positivo della variabile t e con n la normale interna in un punto di σ . Conveniamo di rappresentare con $[h]$ ciò che diventa una generica funzione $h = h(x, y, z, t)$ quando al posto di t poniamo $t - r$, ove r indica la distanza fra il punto P_1 di S e un punto Q variabile in S e su σ , cioè poniamo

$$[h] = h(x, y, z, t - r).$$

Il valore di U nel punto P_1 e all'istante t_1 si può ottenere mediante la formula seguente:

$$4\pi U(P_1, t_1) = b^2 \int_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{I_1(\rho)}{\rho} + \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{\partial U}{\partial t} \right\}_{t=0} dS +$$

$$+ b^2 \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \left\{ E_x \frac{\partial}{\partial n} \frac{I_1(\rho)}{\rho} - \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial n} \right\} dt - \frac{b^2}{2} \int_{\sigma} [E_x] \frac{\partial r}{\partial n} d\sigma -$$

$$- \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial E_x}{\partial n} - E_x \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_x}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Cominciamo a trasformare l'integrale

$$(4) \quad A = \int_S \left\{ E_x \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{I_1(\rho)}{\rho} \right) + \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial t} \right\}_{t=0} dS.$$

Dalla prima delle equazioni vettoriali (1) si trae

$$(5) \quad \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \right)_{t=0} = a \frac{\partial H_z^{(0)}}{\partial y} - a \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial z} - b E_x^{(0)},$$

ove con $H_z^{(0)}$, $H_y^{(0)}$, $E_x^{(0)}$ intendiamo le determinazioni delle componenti H_z , H_y , E_x all'istante $t=0$. Sostituendo nella (4), con applicazione del lemma di Green, si trae in definitiva

$$(6) \quad A = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_S E_x^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS - a \frac{\partial}{\partial z_1} \int_S H_y^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS +$$

$$+ a \frac{\partial}{\partial y_1} \int_S H_z^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS - b \int_S E_x^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS - a \int_{\sigma} (H_z^{(0)} \cos ny - H_y^{(0)} \cos nz) \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} d\sigma,$$

ove ρ_0 è la determinazione di ρ per $t=0$.

$$+ b^2 \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \frac{I_1(\rho)}{\rho} - \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dt - \frac{b^2}{2} \int_{\sigma} [U] \frac{\partial r}{\partial n} d\sigma -$$

$$- \int_{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right] d\sigma,$$

ove $I_1(\rho)$ è la funzione di Bessel non oscillante del primo ordine e di argomento $\rho = b \sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}$. Relativamente a questa formula, facciamo osservare che il procedimento tenuto per ottenerla esige che t_1 sia superiore ad un certo limite positivo; perciò le deduzioni che sono da essa dedotte saranno valide purché i valori t_1 ottemperino a questa limitazione, anche se essa non sarà in seguito menzionata. [A. TONOLO, *Sull'integrazione dell'equazione di propagazione delle onde smorzate e forzate*, « Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova », Anno IV (1933)].

Dal complesso delle equazioni (1) si ottiene

$$(7) \quad \frac{\partial E_x}{\partial n} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial E_x}{\partial z} \cos nx \right) + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial E_y}{\partial y} \cos nx \right) + \\ + a \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right) + ab (H_y \cos nz - H_x \cos ny).$$

Perciò, posto

$$(8) \quad B = \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial n} dt,$$

possiamo scrivere

$$(9) \quad B = \alpha + \beta + a\gamma + ab\delta,$$

ove

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \left\{ \frac{\partial E_x}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial E_x}{\partial z} \cos nx \right\} dt, \\ \beta &= \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \left\{ \frac{\partial E_y}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial E_y}{\partial y} \cos nx \right\} dt, \\ \gamma &= \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right\} dt, \\ \delta &= \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \{ H_y \cos nz - H_x \cos ny \} dt. \end{aligned} \right.$$

Trasformiamo l'integrale α . Si osservi dapprima che si ha ⁽¹¹⁾

$$(11) \quad \int_{\sigma} \cos nz d\sigma \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t_1-r} E_x \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt = \int_{\sigma} \cos nz d\sigma \int_0^{t_1-r} \left\{ E_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{I_1(\rho)}{\rho} + \right. \\ \left. + \frac{I_1(\rho)}{\rho} \frac{\partial E_x}{\partial x} \right\} dt - \frac{1}{2} \int_{\sigma} [E_x] \cos nz \frac{\partial r}{\partial x} d\sigma.$$

Se quindi si ricorda l'identità

$$(12) \quad \int_{\sigma} \left\{ \mathbf{n} \wedge \text{grad}_Q \int_0^{t_1-r} E_x \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt \right\} d\sigma = 0.$$

(11) Si ricordi che

$$\left\{ \frac{I_1(\rho)}{\rho} \right\}_{\rho=0} = \frac{1}{2}$$

si ottiene in definitiva

$$(13) \quad \alpha = \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} E_x \left\{ \cos nx \frac{\partial}{\partial z} \frac{I_1(\rho)}{\rho} - \cos nz \frac{\partial}{\partial x} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \right\} dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{\sigma} [E_z] \left\{ \cos nz \frac{\partial r}{\partial x} - \cos nx \frac{\partial r}{\partial z} \right\} d\sigma.$$

Similmente si trova

$$(14) \quad \beta = \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} E_y \left\{ \cos nx \frac{\partial}{\partial y} \frac{I_1(\rho)}{\rho} - \cos ny \frac{\partial}{\partial x} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \right\} dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{\sigma} [E_y] \left\{ \cos ny \frac{\partial r}{\partial x} - \cos nx \frac{\partial r}{\partial y} \right\} d\sigma.$$

Chimica. — *Struttura della catena del polipropilenossido cristallino* (*). Nota di GIULIO NATTA, PAOLO CORRADINI e GINO DALL'ASTA, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

In precedenti Note presentate a questa Accademia, erano stati definiti come polimeri isotattici, i polimeri vinilici lineari a concatenamento testa-coda nei quali sequenze di atomi di carbonio terziario posseggono la stessa configurazione sterica (¹).

Tali polimeri presentano allo stato cristallino struttura elicoidale caratterizzata dall'equivalenza degli atomi di carbonio terziario.

È stato possibile dimostrare che l'asse elicogiro lungo cui si ripetono le unità monomeriche può assumere, a seconda dell'ingombro del sostituito laterale, una simmetria ternaria (polipropilene, polistirolo, modificazione stabile del polibutilene), oppure una simmetria quaternaria (poli-3-metilbutene-1) corrispondenti rispettivamente a 3 o 4 unità monomeriche per passo. Inoltre, per il poli-4-metil pentene-1 ed il poli-4-metil esene-1 sono state trovate delle spirali contenenti 3,5 unità monomeriche per passo e perciò periodi di identità corrispondenti a 7 unità monomeriche (²).

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) G. NATTA, «Atti Acc. Naz. Lincei», Memorie, ser. VIII, vol. IV, Sez. II, fasc. 4, 61 (1955).

(2) G. NATTA, P. PINO, G. MAZZANTI, P. CORRADINI, U. GIANNINI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. XIX, fasc. 6, 397 (1955); G. NATTA P. CORRADINI, e I. W. BASSI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. XIX, fasc. 6, 404 (1955); P. CORRADINI e I. PASQUON, «Rend. Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. XIX, fasc. 6, 453 (1955).

Recentemente è stato pubblicato da Price ⁽³⁾ un lavoro sulla sintesi del polipropilenossido cristallino, ottenuto per polimerizzazione di monomeri otticamente attivi.

Per polimerizzazione invece del monomero racemico si ottiene, a meno di non usare particolari catalizzatori, un polimero amorfo basso fondente.

In particolari condizioni di polimerizzazione del monomero racemico, è stato ottenuto invece un polimero otticamente inattivo, che ha la stessa temperatura di fusione di quello ottenuto dal monomero otticamente attivo.

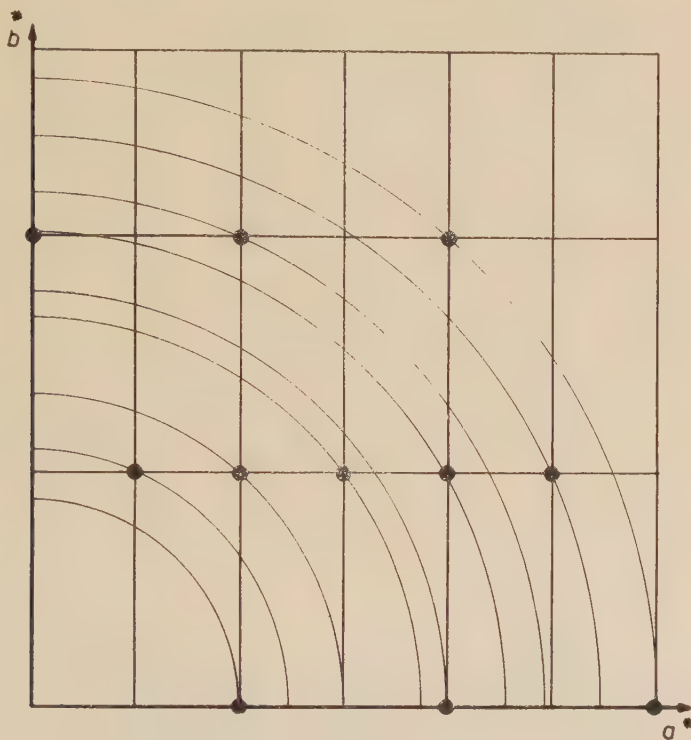


Fig. 1. - Ricostruzione del reticolo reciproco (sul piano equatoriale) di un cristallo di polipropilenossido.

Nel polipropilenossido cristallino gli atomi di carbonio terziario di ogni singola catena debbono possedere tutti la stessa configurazione sterica, ed infatti il polimero cristallino ottenuto dal monomero otticamente attivo, risulta pure otticamente attivo. Si deve però ritenere, date le analogie delle sue proprietà fisiche con quelle del polimero cristallino otticamente inattivo, che quest'ultimo sia costituito da una miscela racemica di macromolecole, ciascuna costituita da unità monomeriche o tutte *levo* o tutte *destro*.

(3) C. C. PRICE, M. OSGAN, R. E. HUGHES e C. SHAMBELAN, « J. Am. Chem. Soc. », 78, 690 (1956).

Per stabilire se il polimero cristallino del polipropilenossido presenti analogie con la struttura dei polimeri isotattici, abbiamo esaminato coi raggi X il polimero da noi preparato secondo il procedimento di Price e della Dow Chem. Comp. (4). Tale polimero è stato estruso sotto forma di filamenti e successivamente stirato a freddo.

Esso fornisce un fotogramma di fibra con linee nette da cui si calcola un periodo di identità di $7,16 \pm 0,05 \text{ \AA}$. Tale valore praticamente coincide con

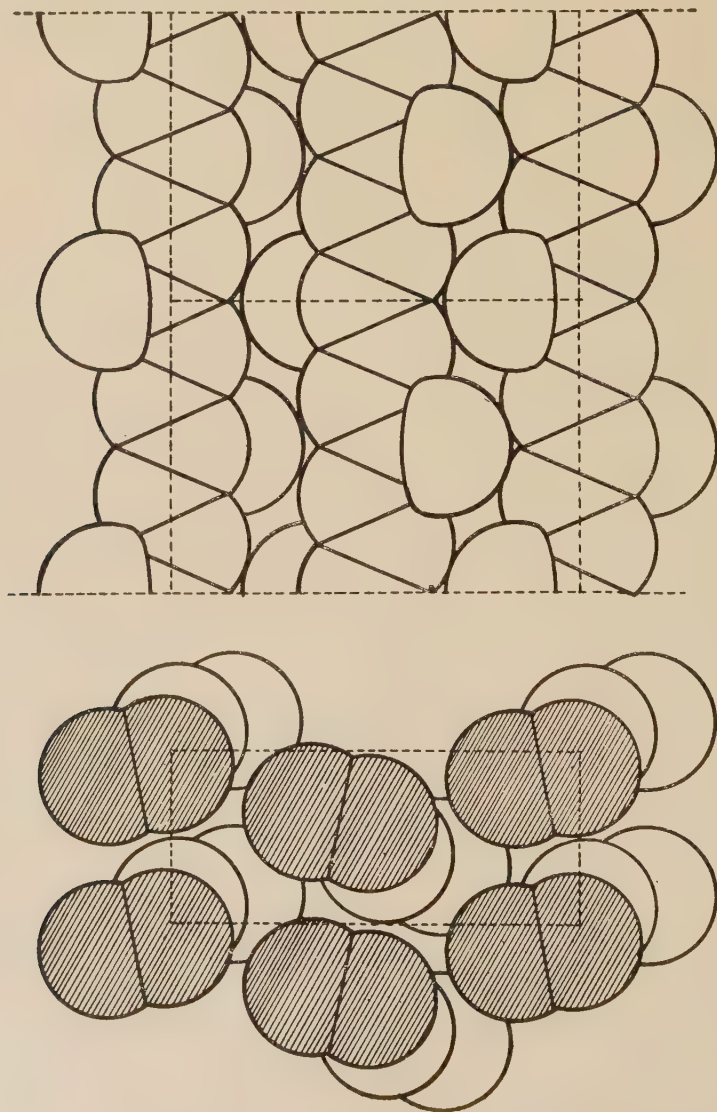


Fig. 2. - Disposizione delle molecole del polipropilenossido cristallino in proiezione sui piani $a-b$ e $a-c$.

(4) M. E. PRUITT e J. M. BAGGET, U.S. Pat. 2.706.181 (12 aprile 1955).

quello (7,18 Å) che si calcola per una catena planare ($\diagdown \text{C} \diagup \text{C} \diagdown \text{O} \diagup \text{C} \diagdown \text{C} \diagup \text{O}$) assumendo i normali angoli di valenza ($109^\circ 30'$) e distanze di legame (C—O 1,43 Å, C—C 1,54 Å) e pertanto si può ritenere che la catena del polipropilenossido sia planare, come aveva proposto Price. Nella figura 1 è mostrata una ricostruzione del reticolo reciproco (sul piano equatoriale) di un cristallo del polimero.

La cella elementare risulta ortorombica con $a = 10,52 \text{ Å}$, $b = 4,67 \text{ Å}$; da cui si calcola una densità di 1.096 in accordo con quella sperimentale (1,05). Nella cella sono contenute due catene approssimativamente centrate (come si può desumere dalla debolezza dei riflessi $h k 0$ con $h + k = 2n + 1$) in $0, 0, z$ ed in $1/2, 1/2, z$ in maniera analoga a quelle del polietilene cristallino.

Nella figura 2 è mostrata la disposizione delle molecole in proiezione sui piani $a-b$ e $a-c$ che ha dato il miglior accordo tra fattori di struttura calcolati ed intensità sperimentali (tabella I).

TABELLA I.

$h k l$	$\sin \theta/\lambda$	$d_{\text{sp.}} (\text{Å})$	Int. Sper.	$(n F^2) \text{ Calc.}$
1 0 0	—	—	—	0
2 0 0	.095	5,25	<i>f</i>	142
0 1 0	—	—	—	0
1 1 0	.117	4,26	<i>ff</i>	310
3 0 0	—	—	—	0
2 1 0	.144	3,47	<i>d</i>	29
3 1 0	.179	2,80	<i>m</i>	85
4 0 0	.192	2,61	<i>m</i>	43
0 2 0, 4 1 0	.218	2,29	<i>dd</i>	23
1 2 0	—	—	—	16
5 0 0	—	—	—	0
2 2 0	.236	2,12	<i>d</i>	39
3 2 0	—	—	—	10
5 1 0	.262	1,91	<i>d</i>	71
6 0 0, 4 2 0	.287	1,74	<i>d</i>	88

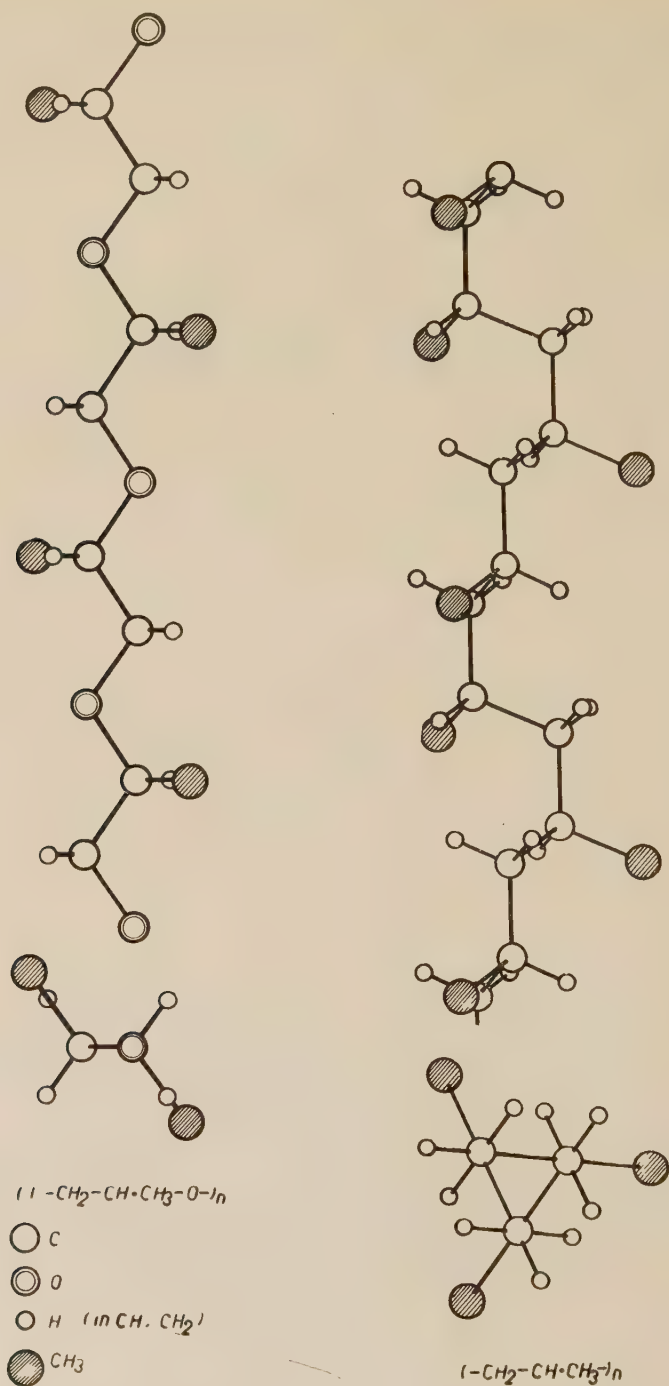


Fig. 3. - Confronto della struttura delle catene allo stato cristallino del polipropilenossido e del polipropilene isotattico.

Tutte le distanze interatomiche risultano superiori a $4,0 \text{ \AA}$. Poiché le molecole si ripetono geometricamente (avendo tutti gli atomi di carbonio lungo una catena la medesima configurazione sterica) lungo un asse binario elicogiro, e cadono coi loro assi all'incirca in $0, 0, z$ ed in $1/2, 1/2, z$, i gruppi spaziali possibili sono il Pna ed il $P2_1 2_1 2_1$. Essi differiscono, nei riguardi della disposizione delle molecole, per il fatto che l'uno consente solo l'esistenza in $1/2, 1/2, z$ di molecole enantiomorfe rispetto a quelle che sono in $0, 0, z$ (struttura caratteristica di un composto racemico) mentre l'altro consente solo l'esistenza di molecole nella cella o tutte destre o tutte levogire. L'uno può essere derivato dall'altro scambiando semplicemente in una delle due catene, fermi restando tutti gli altri atomi, il gruppo CH_2 con l'ossigeno. Le estinzioni osservate sono in accordo con entrambi i gruppi spaziali, e c'è da attendersi che i riflessi hkl abbiano intensità non molto diverse nei due gruppi spaziali.

Notevoli sono le analogie del prodotto da noi esaminato con la fibroina della seta, la cui struttura è stata studiata da numerosi Autori ed infine risolta da Pauling ⁽⁵⁾.

La struttura che abbiamo attribuito al polipropilenossido è confrontata nella figura 3 con quella del polipropilene isotattico. Le due catene differiscono dal punto di vista chimico perché i gruppi successivi $-\text{CH}_2-\text{CH}(\text{CH}_3)-$ sono in un caso (polipropilene) direttamente uniti nella catena, nell'altro caso sono intercalati da un atomo di ossigeno (fig. 3).

La forma geometrica della catena allo stato solido risente della diversa distanza esistente tra i successivi atomi di carbonio asimmetrico. Nel caso del polipropilenossido il maggiore allontanamento dei gruppi laterali consente una struttura planare che è impedita per ragioni steriche nel caso del polipropilene.

Mentre quindi per quest'ultimo l'equivalenza strutturale degli atomi di carbonio terziario viene a realizzarsi intorno ad un asse ternario elicogiro, nel caso invece del polipropilenossido, tale equivalenza è già possibile con una struttura corrispondente ad una catena principale planare, che si ripete intorno ad un asse binario elicogiro.

Ciò conferma il fatto già previsto da Pauling, che le catene dei polimeri, che contengono atomi di carbonio asimmetrico equivalenti, debbono assumere allo stato cristallino forme elicoidali.

(5) « Scientific American », vol. 191, n. 1 p. 51 (luglio 1954).

Chimica fisica. — *Nuove indagini sperimentali sulla risoluzione nello spettro del cristallo della banda ultrarossa riferibile ai gruppi CN riscontrata nelle soluzioni acquose di ferrocianuro di potassio*^(*).
Nota di G. B. BONINO e di G. FABBRI, presentata^(**) dal Socio G. B. BONINO.

In un precedente lavoro⁽¹⁾ abbiamo messo in evidenza che utilizzando mezzi sperimentali più adatti si potevano ottenere spettri ultrarossi di assorbimento del ferrocianuro di potassio cristallino assai più completi di quello pubblicato da Miller e Wilkins⁽²⁾.

Però restava ancora aperto il problema del perché la banda unica ultrarossa a 2041 cm^{-1} , riferibile all'oscillazione CN, nella soluzione acquosa di $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$, e corrispondente ad una oscillazione triplamente degenera del

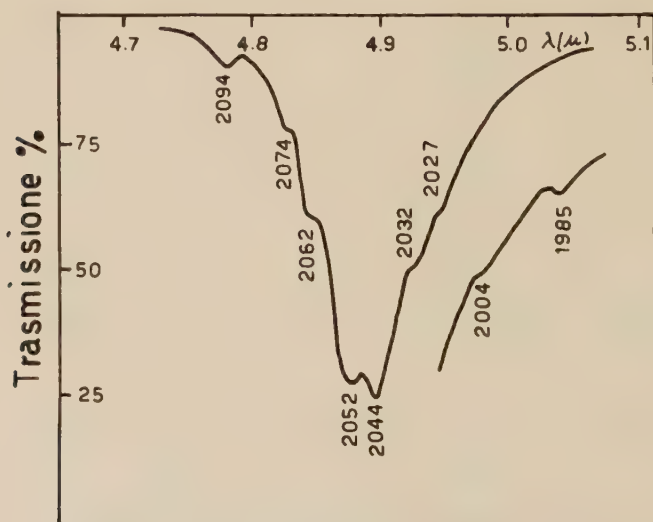


Fig. 1.

tipo T_{1u} non si risolvesse in tre componenti nel nostro spettro del $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ cristallino ma invece solo in due componenti (gli Autori americani trovavano una sola componente).

Viceversa lo spettro del sale anidro mostra una più complessa molteplicità di bande in questa zona dello spettro ultrarosso attorno ai $2000\text{--}2100\text{ cm}^{-1}$.

(*) Lavoro eseguito al Centro Studi di Chimica Fisica ed Idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico «Giacomo Ciamician» della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) BONINO e FABBRI, questi «Rendiconti», 19, 386 (1955).

(2) MILLER e WILKINS, «Analytical Chem.», 24, 1253 (1952).

Prima di trarre conclusioni da ricerche di carattere teorico su questi fatti, abbiamo voluto riprendere le indagini sperimentali forzando le possibilità del nostro impianto spettrometrico con opportune integrazioni per vedere se le due bande trovate a $2044\text{--}2052\text{ cm}^{-1}$ per il $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ non nascondessero qualche altra componente.

Nella zona $2000\text{--}2100\text{ cm}^{-1}$ (bande del CN) il registratore di Brown annesso allo spettrometro per ultrarosso di Beckman da noi posseduto ci permetteva nelle nostre condizioni di esperienza di registrare utilmente 24 cm^{-1} di spettro per ogni cm. lineare di avanzamento della carta del registratore. Sostituendo al registratore di Brown un registratore Speedomax della Leeds

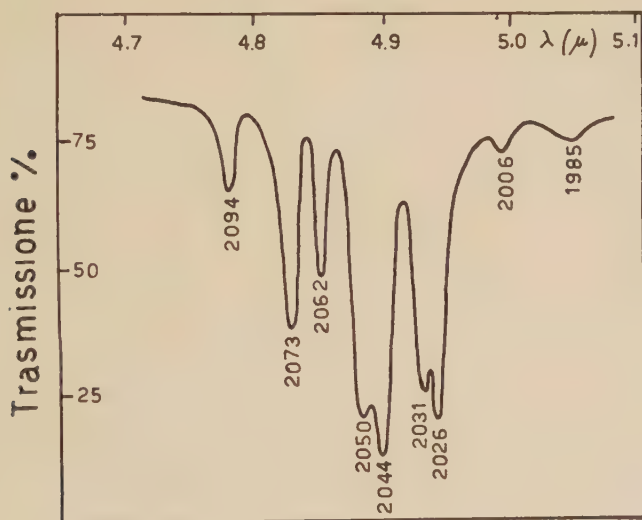


Fig. 2.

e Northrup di Filadelfia abbiamo migliorato, sotto questo punto di vista, la situazione potendo registrare utilmente 7 cm^{-1} di spettro per ogni centimetro lineare di avanzamento della carta del registratore. Il maggior potere amplificatore di quest'ultimo registratore permetteva di utilizzare a pieno la maggiore velocità di avanzamento della carta rispetto alla velocità di rotazione del prisma dello spettrometro.

Pertanto si riusciva ad ottenere con il secondo registratore un effettivo aumento nella capacità dell'apparecchio a risolvere bande molto vicine.

In queste ultime nostre condizioni sperimentali nella zona dello spettro ultrarosso, cosiddetta del CN, e per esempio a $5\text{ }\mu$, la fessura spettrometrica che abbiamo potuto utilizzare corrispondeva nello spettro ad una larghezza di 2 cm^{-1} usando prisma a fluoruro di litio mentre nelle condizioni realizzate nel precedente lavoro ⁽¹⁾ con la stessa ottica in fluoruro di litio a $5\text{ }\mu$ non si poteva scendere ad un valore inferiore a 4 cm^{-1} come corrispondente dell'apertura della fessura spettrometrica nello spettro registrato.

Con tali modifiche al dispositivo sperimentale abbiamo potuto migliorare i nostri precedenti risultati ed ottenere nella zona del CN dello spettro ultrarosso per il ferrocianuro di potassio cristallizzato con tre molecole di acqua una larga banda sensibilmente risolta in ben 9 massimi. Per quanto

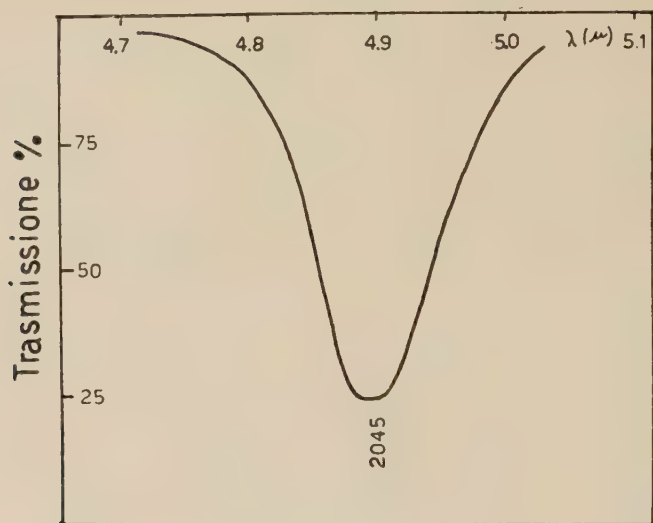


Fig. 3.

la risoluzione sia stentata, i massimi sono nettamente percettibili, come anche si può constatare nella fig. 1 ottenuta rapportando la curva di trasmissione allo spettro di fondo. Viceversa nello spettro del ferrocianuro anidro, nella stessa zona, le 9 bande sono nettamente risolte (ved. fig. 2). Si dovrebbe con-

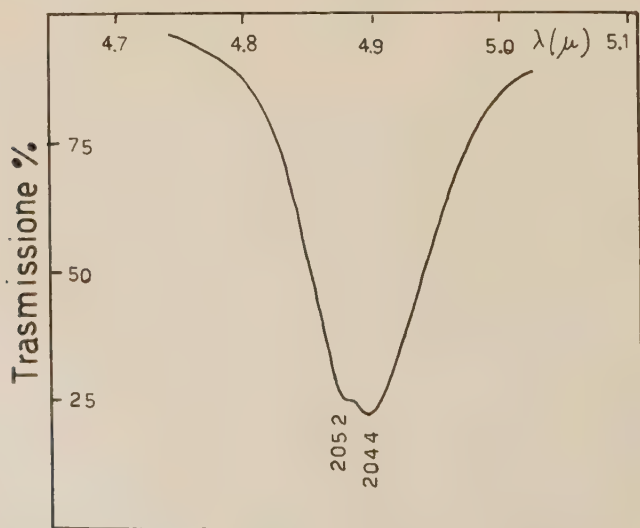


Fig. 4.

cludere che la risoluzione della banda nelle stesse 9 componenti è già in atto nello spettro del ferrocianuro idrato, però il grado di risoluzione è di gran lunga superiore nello spettro del ferrocianuro anidro.

Nella fig. 3 riproduciamo invece la stessa banda ultrarossa del ferrocianuro idrato rilevata con lo stesso spettrometro ma utilizzando un prisma di salgemma anziché il prisma di fluoruro di litio. In questo caso la fessura spettrometrica nella posizione di 5μ equivaleva a 8 cm^{-1} nello spettro. Nella fig. 4 è riprodotta la stessa banda ottenuta con prisma di fluoruro di litio ma senza l'aiuto del registratore Speedomax sopra ricordato.

Queste curve danno netta la sensazione degli effetti che si ottengono aumentando il potere risolutivo degli apparecchi nello studio dello spettro ultrarosso del ferrocianuro di potassio allo stato cristallino.

Gli stessi affinamenti della tecnica non possono portare invece ad alcun nuovo risultato nello studio della stessa banda del CN del ferrocianuro di potassio in soluzione acquosa dove la riga del CN a 2041 cm^{-1} , che corrisponde ad una oscillazione triplamente degenerata attiva in ultrarosso, non si mostra affatto scissa, permanendo la degenerescenza nel caso dello ione in soluzione.

Nella fig. 5 riproduciamo la banda del CN a 2041 cm^{-1} da noi ottenuta studiando le soluzioni acquose di ferrocianuro di potassio.

Questa registrazione si riferisce ad una soluzione acquosa satura del sale a temperatura ordinaria. Per l'esame dello spettro la soluzione era contenuta in una speciale cella di assorbimento le cui pareti erano costituite da due sottilissimi fogli di polietilene. Ben si intende che le intensità segnate nella curva della fig. 5 danno i rapporti delle trasmissioni tra cella vuota e cella piena di soluzione. La banda è ottenuta con spettrometro a prisma di fluoruro di litio e la fessura spettrometrica corrisponde nello spettro a 4 cm^{-1} .

Nella Tabella I sono registrati i risultati spettroscopici ottenuti per la banda del CN nelle nuove condizioni sperimentali sopra descritte. Sono dati i valori ottenuti sia per il ferrocianuro cristallino idrato che per quello anidro. In calce alla tabella è ripetuto anche il valore di massimo assorbimento ottenuto invece per la soluzione satura di ferrocianuro nella detta zona fra 2000 e 2100 cm^{-1} .

La tecnica di preparazione dei campioni del ferrocianuro cristallino da sottoporre all'analisi spettrometrica per queste ultime ricerche è uguale a quella già descritta nel nostro precedente lavoro ⁽¹⁾.

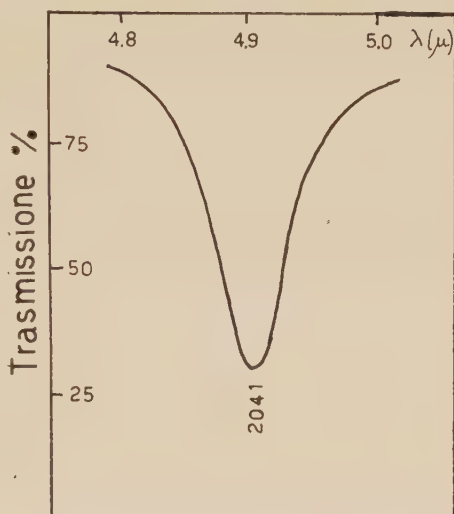


Fig. 5.

TABELLA I.

Bande ultrarosse riferibili ad oscillazioni prevalentemente localizzate ai gruppi $\text{C} \equiv \text{N}$ nel ferrocianuro di potassio cristallino risolte con gli accorgimenti sperimentali descritti in questa Nota.

$\text{K}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]$ anidro			$\text{K}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6] \cdot 3\text{H}_2\text{O}$		
ν (cm^{-1})	λ (μ)	intensità	ν (cm^{-1})	λ (μ)	intensità
2094	4,776	<i>d</i>	2094	4,776	<i>d</i>
2073	4,825	<i>f</i>	(2076)	(4,817)	
2062	4,850	<i>f</i>	(2062)	(4,849)	
2050	4,877	<i>ff</i>	2052	4,872	<i>ff</i>
2044	4,893	<i>ff</i>	2044	4,893	<i>ff</i>
2031	4,921	<i>ff</i>	(2032)	(4,922)	
2026	4,935	<i>ff</i>	(2027)	(4,932)	
2006	4,986	<i>dd</i>	(2004)	(4,989)	
1985	5,040	<i>dd</i>	(1985)	(5,038)	

Banda del CN in soluzione acquosa satura di $\text{K}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]$:
massimo di assorbimento: $\lambda = 4,900 \mu$; $\nu = 2041 \text{ cm}^{-1}$; intensità: fortissima.

Chimica fisica. — *Ricerche sulle oscillazioni «riferibili ai gruppi $\text{C} \equiv \text{N}$ » nel ferrocianuro di potassio cristallino*^(*). Nota ^(**) del Socio G. B. BONINO.

Il noto lavoro di Miller e Wilkins ⁽¹⁾ sullo spettro ultrarosso del ferrocianuro di potassio allo stato cristallino mostra, nella zona caratteristica del gruppo atomico $\text{C} \equiv \text{N}$, una intensa banda semplice a $4,96 \mu$ (2015 cm^{-1}). Questa corrisponde alla banda di assorbimento, pure unica, mostrata da soluzioni acquose di ferrocianuri alcalini ($\text{Na}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$) e rivelata di già nello spettro ultrarosso da Gordy e Williams ⁽²⁾.

La lettura del lavoro di Miller e Wilkins mi ha sorpreso perché, se pure era logico attendersi una unica banda ultrarossa di assorbimento nella «zona

(*) Lavoro eseguito al Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico «Giacomo Ciamician» della Università di Bologna.

(**) Presentata nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) MILLER e WILKINS, «Anal. Chem.», 24, 1253 (1952).

(2) GORDY e WILLIAMS, «Journ. Chem. Phys.», 3, 664 (1935).

$C \equiv N$ » per la soluzione acquosa di ferrocianuro alcalino, si sarebbe pensato di dover riscontrare nello spettro del ferrocianuro cristallino una scissione della detta banda in varie componenti. E ciò innanzi tutto perché la banda ultrarossa in questione non può riferirsi (nel caso dello ione isolato in soluzione) che ad una delle 4 oscillazioni di tipo T_{1u} dell'ione $Fe(CN)_6$ nella simmetria ottaedrica Oh . Questo tipo di oscillazione è l'unico attivo nello spettro ultrarosso di una molecola o di un ione complesso per detta simmetria ⁽³⁾.

Il fatto che tale oscillazione sia triplamente degenerare ci fa attendere nello spettro del cristallo una risoluzione in due o tre oscillazioni distinte a seconda della simmetria dell'azione perturbatrice dovuta alla simmetria cristallina.

D'altra parte si sa che la cella elementare del cristallo di $K_4Fe(CN)_6 \cdot 3H_2O$ contiene 4 molecole ordinate secondo gli elementi di simmetria del gruppo spaziale cristallino e pertanto si devono attendere anche eventuali sdoppiamenti delle oscillazioni fondamentali dello ione complesso isolato in conseguenza dell'accoppiamento delle oscillazioni interne (molecolari) fra ioni oscillanti contemporaneamente nel cristallo.

La molteplicità avrebbe potuto parzialmente riferirsi a frequenze di combinazione fra oscillazioni «interne» fondamentali dello ione complesso e oscillazioni «esterne» (del reticolo cristallino) che avrebbero potuto avere frequenze molto basse (per esempio dell'ordine di 50–100 numeri d'onda) data la notevole massa dell'ione ferrocianidrico. Le frequenze di combinazione di queste con la fondamentale $T_{1u}(C \equiv N)$ avrebbero perciò portato a componenti, se pur deboli, ma sempre nei pressi della frequenza fondamentale.

L'unicità della banda $C \equiv N$ trovata dagli Autori americani era di difficile spiegazione (ed in vero i detti Autori non hanno neppure tentato una spiegazione dei loro spettri). Si sarebbe potuto pensare ad una, pur discutibile, applicazione del teorema di Jahn e Teller ⁽⁴⁾ pensando al più alto grado di simmetria locale (rispetto al gruppo spaziale o cristallino) del campo intermolecolare che si sarebbe potuto realizzare attraverso alla regolare disposizione degli ioni potassio attorno all'ione ferrocianidrico. Si dedurrebbe infatti dal detto teorema che oscillazioni degeneri non si scindono in un campo cristallino nelle simmetrie per esempio C_4 , C_{4v} , C_{4h} , Oh . Però tale ipotesi resta del tutto gratuita nella fattispecie finché non la si può provare sulla base di dati quantitativi sulla ristretta simmetria locale del campo che agisce sull'ione ferrocianidrico dedotta da un accurato esame della struttura delle celle cristalline elementari.

Si sono ripetuti perciò in questo Istituto gli spettri ultrarossi del ferrocianuro di potassio solido anidro ed idrato, ed in una prima Nota preliminare apparsa in questi «Rendiconti» ⁽⁵⁾ in collaborazione con il dott. Fabbri si è

(3) Ved. BONINO, SALVETTI, questi «Rendiconti».

(4) JAHN e TELLER, «Proc. Roy. Soc. A.», 161, 220 (1937); HORNIG, «Journ. Chem. Phys.», 16, 1076 (1948).

(5) BONINO e FABBRI, questi «Rendiconti», VIII, vol. XIX, 386 (1955).

mostrato che, come era da attenderci, la banda ultrarossa del ferrocianuro di potassio riferibile alla oscillazione T_{1u} del gruppo CN non è semplice. Aspetti differenti di questa risoluzione della nota banda nel cristallo si osservano per gli spettri del ferrocianuro anidro e per quelli del solito ferrocianuro di potassio con tre molecole di acqua di cristallizzazione.

Questo atteso risultato correggeva profondamente il lavoro degli Autori americani e consigliava di insistere ancora sperimentalmente per vedere se, con mezzi di ancor più alto potere risolutivo, si potesse mettere in evidenza in modo più completo la complessità della detta banda ultrarossa del ferrocianuro cristallino e chiarire meglio le differenze riscontrate in un primo tempo fra ferrocianuro anidro e ferrocianuro idrato.

In una Nota pubblicata in questo stesso fascicolo in collaborazione con il dott. Fabbri si è potuto migliorare ancora il precedente risultato e stabilire che la banda di assorbimento ultrarossa del ferrocianuro di potassio solido anidro (nella zona tra $1900-2100\text{ cm}^{-1}$ circa (zona del CN)) si presenta scissa in ben 9 componenti ottimamente rilevabili e delle quali quattro fortissime, come intensità, due forti e le altre deboli.

Anche la banda del sale idrato ad un esame molto accurato mostra la stessa molteplicità di 9 componenti se pure in modo assai meno netto dato l'allargamento delle bande riferibili alle componenti più intense.

Nuove ricerche (in collaborazione con il dott. Fabbri) sullo spettro ultrarosso del ferrocianuro in soluzione acquosa e sulle quali si è riferito, hanno confermato l'unicità della banda T_{1u} del CN mostrando dunque che la tripla degenerazione di detta oscillazione non è scissa quando lo ione ferrocianidrico è « isolato » nelle condizioni della soluzione acquosa.

Una interpretazione dello spettro ultrarosso di oscillazione di ioni complessi nei cristalli costituisce, come si sa, un problema complicato che si può affrontare con metodi appropriati di approssimazione che utilizzano però tutti opportune ipotesi semplificatrici.

Stabilito che le regole di selezione, dedotte dallo studio della simmetria di una molecola isolata (o, come spesso può essere equivalente, in soluzione), non sono sufficienti per descrivere lo spettro ultrarosso e Raman allo stato cristallino, due Autori indiani e cioè Bhaganvantam e Venkatarayudu⁽⁶⁾, hanno cercato di risolvere il problema partendo dalla idea che tutte le frequenze spettroscopicamente importanti possano essere rivelate e classificate mediante l'esame della cella elementare cristallina visualizzata come isolata.

Con l'aiuto della teoria dei gruppi, da una dettagliata conoscenza della struttura interna del cristallo e della sua simmetria, si può, seguendo questo metodo realizzato dagli Autori indiani, ottenere il numero, la simmetria e le caratteristiche di attività delle varie oscillazioni in ultrarosso ed in Raman per i cristalli.

(6) BHAGANVANTAM e VENKATARAYUDU, « Proc. Ind. Acad. Sci. », 9 A, 224 (1939); 13 A, 543 (1941).

Il metodo, assai pratico ed elementare per cristalli a cella elementare abbastanza semplice, diventa però macchinoso e talvolta anche malsicuro nel caso di strutture cristalline complicate.

Più recentemente R. S. Halford⁽⁷⁾ ha elaborato un metodo di approssimazione più semplice che può essere fruttuosamente utilizzato, almeno per un primo attacco del problema della interpretazione degli spettri Raman ed ultrarossi di molecole o di ioni complessi in un cristallo.

In un successivo lavoro Winston e Halford⁽⁸⁾ approfondiscono il significato teorico di questo metodo e pongono un ordinato parallelismo con quello degli Autori indiani.

Rimando a questi lavori originali per i dettagli del metodo e mi limito qui a riassumere, in breve sintesi, soltanto qualche punto essenziale.

Noti il gruppo spaziale del cristallo e il numero di molecole per ogni cella elementare si possono dedurre serie di punti del cristallo stesso a cui compete solo una parte degli elementi di simmetria del gruppo spaziale (« Site » di Halford).

Una cella elementare cristallina può presentare varie serie di questi punti che definiscono con i loro elementi di simmetria « gruppi locali » che sono sottogruppi del gruppo spaziale.

Stabiliti questi gruppi locali, si determinano le regole di selezione non più per le rappresentazioni irriducibili del gruppo molecolare, come si fa per le molecole libere, ma invece per le rappresentazioni irriducibili di un gruppo locale appropriato.

La relazione tra le oscillazioni della molecola « isolata » e quelle della stessa molecola nel cristallo possono essere stabilite confrontando una tabella dei gruppi molecolari e dei gruppi locali. Il gruppo locale appropriato ed accettabile deve essere isomorfo con un sottogruppo sia del gruppo spaziale che del gruppo molecolare.

Una tabella pubblicata a conclusione del lavoro di Halford facilita queste scelte che purtroppo però, nei casi complicati, non sono sempre esenti da ambiguità⁽⁹⁾.

Nel caso del ferrocianuro di potassio dai lavori di Pospelov e Zhdanov⁽¹⁰⁾ si hanno elementi per descrivere il ferrocianuro di potassio cristallino in due varietà, una monoclina secondo il gruppo spaziale C_{2h}^6 con 4 molecole per cella elementare, e una tetragonale secondo il gruppo spaziale C_{4h}^6 con 8 molecole per cella elementare.

Già Wjrouboff⁽¹¹⁾ nel 1869 aveva riscontrato fenomeni di « politipia » nei cristalli di ferrocianuro di potassio. I citati Autori russi nel 1947 si sono fermati però in modo particolare su questo studio⁽¹²⁾. Dovremo perciò svi-

(7) R. S. HALFORD, « Journ. Chem. Phys. », 14, 8 (1946).

(8) WINSTON e HALFORD, « Journ. Chem. Phys. », 17, 607 (1949).

(9) Ved. citazione⁽¹⁵⁾.

(10) POSPELOV e ZHDANOV, « Z. Fis. Khim. SSSR », 21, 405, 521 (1947).

(11) WJROUBOFF, « Annales de Chimie et de Physique » (IV), 16, 293 (1869).

(12) POSPELOV e ZHDANOV, « Z. Fis. Khim. SSSR », 21, 405, 521, 879 (1947).

luppare la ricerca sia tenendo conto della alternativa monoclina, sia di quella tetragonale, forme riscontrate con reciproca notevole frequenza nei cristalli di ferrocianuro di potassio.

Dalle tabelle di Halford si deduce allora:

Alternativa monoclina C_{2h}^6 : $4C_i^{(4)}, C_2^{(4)}$;

Alternativa tetragonale C_{4h}^6 : $2S_4^{(4)}, 2C_i^{(8)}, C_2^{(8)}$.

Abbiamo nel primo caso cioè 4 serie tipiche di quattro elementi ciascuna caratterizzate dalla simmetria C_i e una serie di quattro elementi a simmetria C_2 ; nel secondo caso si hanno due serie tipiche di quattro elementi ciascuna a simmetria S_4 dove collocare le due serie di 4 ioni ferrocianidrici costituenti le 8 molecole di ferrocianuro della cella elementare.

TABELLA I.

Risoluzione delle oscillazioni proprie dello ione ferrocianidrico $Fe(CN)_6^{4-}$.

Ione libero (in soluzione acquosa) sim. Oh	Ione nel cristallo	
	Monoclino	Tetragonale
	« site » C_i	« site » S_4
$2 A_{1g} (Ra)$	$2 A_g (Ra)$	$2 A (Ra)$
$2 E_g (Ra)$	$4 A_g (Ra)$	$2 B (U. R. e Ra); 2 A (Ra)$
$1 T_{1g} (i)$	$3 A_g (Ra)$	$E (U. R. e Ra); A (Ra)$
$4 T_{1u} (U.R.)$	$12 A_u (U.R.)$	$4 B + 4 E (U. R. e Ra)$
$2 T_{2g} (Ra)$	$6 A_g (Ra)$	$2 B + 2 E (U. R. e Ra)$
$2 T_{2u} (i)$	$6 A_u (U.R.)$	$2 E (U.R. e Ra) + 2 A (Ra)$

Per ambo i casi si deducono immediatamente le regole di selezione per le 33 oscillazioni proprie dello ione ferrocianidrico.

Si sa che nel caso dello ione isolato⁽¹³⁾ le oscillazioni proprie dello ione ferrocianidrico, secondo il gruppo di simmetria Oh, sono le seguenti:

$$2 A_{1g} (Ra) + 2 E_g (Ra) + 1 T_{1g} (i) + 4 T_{1u} (u. r.) + 2 T_{2g} (Ra) + 2 T_{2u} (i) \\ (Ra) = \text{attiva in Raman}; (u. r.) = \text{attiva in ultrarosso}; \\ (i) = \text{inattiva in ambo gli spettri}.$$

Nella Tabella I sono date le caratteristiche di simmetria e le regole di selezione per queste 33 oscillazioni sia per lo ione ferrocianidrico libero

(13) BONINO e SALVETTI, questi « Rendiconti ».

(simmetria O_h) sia per lo ione ferrocianidrico nel cristallo monoclinico con gruppo spaziale C_{2h}^6 , sia per lo stesso nel cristallo tetragonale, gruppo spaziale C_{4h}^6 , dedotte applicando il metodo di Halford.

Le oscillazioni riferibili ai gruppi $C \equiv N$ dello ione ferrocianidrico libero (simmetria O_h) sono le seguenti:

$$1 A_{1g}(\text{Ra}) \quad ; \quad 1 E_g(\text{Ra}) \quad ; \quad 1 T_{1u}(\text{u. r.}).$$

Nella figura 1 sono riprodotti gli schemi di queste oscillazioni che impegnano particolarmente il gruppo CN nello ione ferrocianidrico e che hanno frequenze attorno ai $1900\text{--}2100\text{ cm}^{-1}$.

Si sa infatti⁽¹⁴⁾ che gli spettri Raman di soluzioni acquose di ferrocianuro di potassio mostrano una riga polarizzata (A_{1g}) e una depolarizzata (E_g) rispettivamente a 2080 e 2048 cm^{-1} mentre la stessa soluzione acquosa



Fig. 1.

di ferrocianuro di potassio nello spettro ultrarosso mostra soltanto una banda corrispondente all'oscillazione T_{1u} a 2041 cm^{-1} ⁽¹⁴⁾.

Secondo la alternativa della simmetria cristallina C_{2h}^6 nello spettro ultrarosso del ferrocianuro di potassio cristallino la banda relativa all'oscillazione T_{1u} si dovrebbe risolvere dunque in tre componenti di tipo $A_u(C_2)$, mentre secondo l'alternativa cristallina C_{4h}^6 (tetragonale) la T_{1u} si dovrebbe sdoppiare secondo il gruppo locale S_4 in una oscillazione di tipo B e in una di tipo E. Dovrebbe poi, in quest'ultima alternativa, comparire anche nello spettro ultrarosso nella suddetta zona del CN un'altra banda corrispondente ad una oscillazione di tipo B della simmetria S_4 e proveniente dalla oscillazione del tipo E_g ottaedrica che è inattiva nello spettro ultrarosso del ferrocianuro in soluzione mentre risulta attiva e depolarizzata in Raman.

Una scelta fra le due alternative potrebbe essere facilitata dalla conoscenza degli spettri Raman del ferrocianuro cristallino. Ci stiamo occupando del problema in questo Istituto, ma l'ottenimento di questi spettri presenta

(14) Ved. per esempio MATHIEU e CORNEVIN, « Journ. de Chimie Physique (Guye) », 36, 261 (1939).

qualche difficoltà. La colorazione gialla del ferrocianuro non permette di utilizzare per l'eccitazione Raman radiazioni a lunghezza d'onda inferiore al giallo-verde. Viene perciò resa meno efficiente la risoluzione degli spettri in aggiunta alle difficoltà di una più bassa e spesso evanescente intensità delle righe Raman.

TABELLA II.

Righe Raman e bande ultrasosse di assorbimento riferibili ad oscillazioni particolarmente localizzate in gruppi — C \equiv N nel ferrocianuro di potassio.

Soluzione acquosa		Stato cristallino			
		Cristallo monoclino C $_{2h}^6$ « site » C $_i$		Cristallo tetragonale C $_{4h}^6$ « site » S $_4$	
Ra	U. R.	Ra.	U. R.	Ra	U. R.
1 A $_{1g}$	—	1 A $_g$	—	1 A	—
1 E $_g$	—	2 A $_g$	—	1 A ; 1 B	1 B
—	1 T $_{1u}$	—	3 A $_u$	1 B ; 1 E	1 B ; 1 E

Nota: 1 A $_g$ indica che è attiva una sola oscillazione di tipo A $_g$; 3 A $_u$ che sono attive tre oscillazioni di tipo A $_u$, ecc.

Ma in linea di principio, nel caso del cristallo monoclino (C $_{2h}^6$) sarebbero attive in Raman (nella zona del CN) tre oscillazioni distinte « non depolarizzate » anziché due (una « non depolarizzata » ed una seconda « depolarizzata ») come avviene per lo ione ferrocianidrico in soluzione acquosa. Queste tre oscillazioni sarebbero inattive in ultrarosso. Nello spettro ultrarosso si dovrebbero invece avere tre differenti e distinte oscillazioni (inattive invece in Raman). Nell'alternativa C $_{4h}^6$ il metodo di Halford ci farebbe prevedere in Raman ben 5 oscillazioni di cui due « non depolarizzate » (di tipo A) e inattive in ultrarosso e 3 « depolarizzate » (tipo B ed E) attive anche in ultrarosso (ved. Tabella II).

Qualora si studiasse nell'ultrarosso un cristallo orientato con l'aiuto di radiazioni polarizzate si potrebbe anche controllare se si verifica quanto la teoria prevede nel caso dell'alternativa C $_{4h}^6$. Infatti in questo caso l'oscillazione di tipo B presenta la componente del momento elettrico oscillante parallelo all'asse delle z mentre per quella di tipo E tale momento elettrico risulterebbe secondo $x + iy$.

Però in un caso o nell'altro sarebbero da attendersi tre bande nella zona del CN dello spettro ultrarosso del ferrocianuro cristallino. Viceversa l'esperienza mostra una maggiore molteplicità. Ma, come già ha fatto osservare

Couture ⁽¹⁵⁾, in numerosi casi i risultati sperimentali degli spettri infrarossi e Raman dei cristalli mostrano un numero di bande o di righe superiore a quello previsto con il metodo di Halford. In particolare con questo metodo non si tien conto dell'accoppiamento simmetrico o antisimmetrico di una stessa oscillazione interna di due o più ioni complessi vicini nella cella cristallina elementare. Tale fenomeno porta per esempio al raddoppio della banda dovuta alle stesse oscillazioni di 2 ioni diversi e che si accoppiano rispetto ad un determinato piano di simmetria. D'altra parte non si tien conto della possibilità di combinazione di oscillazioni interne degli ioni con oscillazioni reticolari di bassa frequenza e fra loro eventualmente combinabili in conseguenza di favorevoli caratteri di simmetria.

TABELLA III.

Bande ultrasosse e righe Raman del ferrocianuro di potassio riferibili ad oscillazioni particolarmente localizzate ai gruppi —C \equiv N tra 1900 e 2100 cm⁻¹.

Spettro Raman e ultrarosso della solu- zione acquosa di K ₄ Fe(CN) ₆ (1)	Spettro ultrarosso del K ₄ Fe(CN) ₆ cristallino		Tipi di oscillazioni			
			a) secondo l'alternativa monoclina C _{2h} ⁶		b) secondo l'alternativa tetraedrica C _{4h} ⁶	
	ν (cm ⁻¹)	intensità	Riferimento alle frequenze ottaedriche originali	« site » C _i	Riferimento alle frequenze ottaedriche originali (2)	« site » S ₄
ν_1 A _{1g} 2080 Ra P. .	2094	<i>d</i>	$\nu_6 + \nu^*$		$\nu_6 + \nu^*$	
	2073	<i>f</i>	$\left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \nu_6 \text{ T}_{1u}$	A _u	$\nu_3 \text{ E}_g$	B
ν_3 E _g 2048 Ra D. .	2062	<i>f</i>				
	2050	<i>ff</i>		A _u	$\nu_6 \text{ T}_{1u}$	B + E
	2044	<i>ff</i>				
	2031	<i>ff</i>		A _u		
ν_6 T _{1u} 2041 U.R. . .	2026	<i>ff</i>				
	2006	<i>dd</i>	$\nu_3 - \nu^*$			$\nu_3 - \nu^*$
	1985	<i>dd</i>	$\nu_6 - \nu^*$			$\nu_6 - \nu^*$

Ra P. = Raman « non depolarizzata »; Ra D. = Raman « depolarizzata »; U. R. = ultrarosso; *ff* = fortissima; *f* = forte; *d* = debole; *dd* = debolissima.

(1) Indico le frequenze ottaedriche con i simboli ν_1, ν_2 ecc. e secondo gli schemi proposti per il caso analogo degli esacarbonili metallici a molecola ottaedrica da HawKins, Mattrow, Sabo e Carpenter (« J. Chem. Phys. », 23, 2422 (1955)).

(2) La oscillazione « esterna » reticolare ipotetica ν^* : avrebbe una frequenza di circa 55 cm⁻¹.

Osservo invero che, specie nello spettro del ferrocianuro di potassio anidro, da noi registrato, si ha netta la sensazione di trovarci di fronte a tre coppie di bande forti e fortissime accanto ad altre righe assai più deboli.

Nel riscontrare i risultati sperimentali pubblicati sullo spettro ultrarosso nella cosiddetta « zona del CN » troviamo cioè tre doppietti di cui due intensissimi rispettivamente a $2044-2050$ e $2026-2031\text{ cm}^{-1}$ al posto della semplice banda a 2041 cm^{-1} dello spettro ultrarosso del ferrocianuro in soluzione acquosa. E poi si osserva ancora un terzo doppietto a $2073-2062\text{ cm}^{-1}$ di media intensità. Questa parte « intensa » dello spettro ultrarosso del CN del ferrocianuro di potassio allo stato cristallino potrebbe interpretarsi nell'alternativa C_{2h}^6 come corrispondente alle tre oscillazioni di tipo A_u sdoppiate ciascuna per accoppiamento reciproco fra eguali oscillazioni di ioni ferrocianidrici vicini nel cristallo. Invece nell'alternativa C_{4h}^6 si potrebbero classificare i due doppietti intensi come riferibili alle due oscillazioni (B, E) provenienti dall'oscillazione triplamente degenerare T_{1u} della simmetria ottaedrica, più una oscillazione di tipo B proveniente dall'oscillazione ottaedrica E_g inattiva nello spettro ultrarosso dello ione isolato.

Anche ciascuna di queste tre risultanti oscillazioni sarebbe sdoppiata per accoppiamento come sopra riferito.

Le altre bande $C \equiv N$ deboli e debolissime si potrebbero considerare come frequenze di combinazione tra una oscillazione « CN » con una ipotetica frequenza « reticolare » di circa 55 cm^{-1} come è indicato nella Tabella III.

Nella Tabella III sono riassunte anche le varie ipotesi che si possono fare, dopo questa preliminare ispezione del problema, per lo spettro ultrarosso del ferrocianuro di potassio cristallino.

Stiamo tentando di applicare a questo studio metodi teorici più generali e complessi ma di ciò verrà riferito in un prossimo lavoro.

Fisiologia. — *Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto* (*). Nota di ETTORE FADIGA, GIULIO CESARE PUPILLI e GIAN PIETRO VON BERGER, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Nel 1944 Snider e Stowell⁽¹⁾ hanno delimitato nel Gatto l'area di proiezione visiva della corteccia cerebellare, estesa prevalentemente al *declive*, al *folium* e al *tuber vermis* e alla *pyramis*. Con esperimenti eseguiti su Gatti trattati con Pentobarbital o cloralosio, ovvero con entrambi i farmaci, essi hanno osservato che le risposte alla stimolazione fotica sono chiaramente apprezzabili solo negli animali a cui sia stato somministrato cloralosio, associato o non al barbiturico: le risposte medesime sarebbero generalmente impedito dal-

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) R. S. SNIDER e A. A. STOWELL, « J. Neurophysiol. », VII, 331 (1944).

l'azione depressiva dei narcotici, il solo cloralosio favorendo la loro comparsa per « un'azione eccitante o stricnino-simile » [Snider e Stowell ⁽¹⁾, p. 345], propria di tale sostanza. Secondo ricerche di Gastaut, Naquet, Badier e Roger ⁽²⁾, la somministrazione di cardiazolo nel Gatto in narcosi barbiturica fa comparire risposte cerebellari allo stimolo fotico, sovrapponibili a quelle ottenute in narcosi cloralosica; d'altra parte, il medesimo stimolo non produrrebbe mai modificazioni dell'attività elettrica cerebellare durante la sola narcosi barbiturica, anche superficiale. Richiamandosi ai concetti esposti da Gastaut e Hunter ⁽³⁾ circa ai fenomeni d'irradiazione centrale dovuti al cardiazolo, Gastaut *et alii* ammettono che anche le risposte derivate dal cervelletto non abbiano un significato specifico, ma al pari di quelle fronto-precettali siano da riferirsi a impulsi diffusi per vie normalmente impervie, che tanto il cardiazolo quanto il cloralosio renderebbero « permeabili ». Abbiamo creduto conveniente ricercare nel Gatto la effettuabilità della reazione elettrica cerebellare allo stimolo luminoso, in assenza dei farmaci che costantemente la rivelano.

La preparazione dell'animale consisteva nell'incannulamento della trachea, nella incisione e nello scollamento dei tessuti pericranici, nell'apertura di una breccia ossea in corrispondenza della superficie dorsale del cervelletto. Al termine dell'atto operatorio ⁽⁴⁾, che si svolgeva in narcosi eterica, i Gatti venivano curarizzati con Sincurarina (somministrata per via intravenosa nella dose di 5 mg/kg), soccorsi con la respirazione artificiale (pompa Beaudouin) e lasciati in ambiente oscuro e tranquillo. La corteccia cerebellare scoperta era mantenuta sotto uno strato di olio di vaselina, riscaldato alla temperatura di 37°-38° C con una lampada a raggi infrarossi; i tessuti molli attorno alla breccia cranica erano infiltrati con soluzione di novocaina (cloridrato all'1 %). Prima di cominciare i rilievi sperimentali, si attendeva che fossero trascorse almeno 2-3 h dalla somministrazione di etere, in modo che gli effetti del narcotico potessero dissiparsi completamente; i rilievi stessi si svolgevano sempre nell'oscurità, il più possibile al riparo da qualsiasi stimolo esterno. Che le ordinarie precauzioni prese per escludere interferenze dovute a stimoli sonori fossero adeguate, è dimostrato dal fatto che identici risultati si ottenevano in prove eseguite in camera provvista di isolamento acustico.

Per la stimolazione luminosa ci siamo serviti di un fotostimolatore Kaiser a grande luminosità, ponendo la lampada (tubo a luminescenza LSD7) a 30 cm dall'occhio in midriasi atropinica; il *click* dell'apparecchio era risultato, in prove di controllo eseguite con la esclusione della sorgente luminosa, del tutto insufficiente per determinare risposte cerebellari di origine acustica.

(2) H. GASTAUT, R. NAQUET, M. BADIER et A. ROGER, « J. Physiologie », XLIII, 737 (1951).

(3) H. GASTAUT a. J. HUNTER, « EEG clin. Neurophysiol. », II, 263 (1950).

(4) Per ottenere preparati utilizzabili, è molto importante che le conseguenze traumatiche dell'intervento siano ridotte al minimo e che vengano evitati con grande diligenza notevoli abbassamenti della pressione arteriosa [cfr. HENNEMAN, COOKE e SNIDER, « Res. Publ. Ass. Res. nerv. ment. Dis. », XXX, 317 (1952)].

I *flashes* avevano la durata di 75 μ sec e potevano essere regolati secondo tre intensità, in modo da fornire alla distanza testé indicata un illuminamento corrispondente rispettivamente a 0,45-2,5-7,8 megalux (le meno elevate intensità di stimolazione sono dell'ordine di grandezza di quelle usate da altri AA.; l'illuminamento massimo è stato utilizzato nelle osservazioni fatte per indagare gli effetti della variazione di intensità luminosa); la stimolazione era unilaterale, provvedendosi alla schermatura dell'occhio non utilizzato. Tra una stimolazione e la successiva si facevano intercorrere almeno 20 sec, giacché le risposte si mostrano più evidenti dopo una pausa discretamente lunga.

L'oscillografo catodico adoperato è un Du Mont a due pennelli (mod. 322 A), connesso con un preamplificatore Grass (mod. P 4) a 4 stadi, a resistenza-capacità: la registrazione veniva fatta con un fotochimografo Du Mont mod. 321. Le derivazioni erano monopolari e avvenivano mediante elettrodi costituiti da sottili fili di Ag-AgCl a punta smussa, essendo l'elettrodo indifferente posto a contatto col M. temporale di un lato, in corrispondenza di un'area resa necrotica mediante elettrocoagulazione. Conforme a quanto era stato fatto da AA. precedenti [Combs ⁽⁵⁾, Widén ⁽⁶⁾], l'attività elettrica spontanea della corteccia cerebellare era in massima parte filtrata, senza distorsione apprezzabile delle risposte; tuttavia, per avere elementi di valutazione intorno allo stato funzionale della corteccia esplorata, il suo ritmo pulsatorio veniva esaminato nella rispettiva gamma frequenziale, all'inizio di ogni esperimento. Nei tracciati riprodotti, la polarità negativa è distinta dalla deflessione verso l'alto; il tempo di accensione del *flash* è indicato dalla deviazione del secondo pennello catodico, connesso col circuito derivato del fotostimolatore.

Le risposte cerebellari che abbiamo fatte oggetto del nostro studio si registrano solo in preparati in ottimo stato funzionale, e sono assai più labili di quelle provocate con stimoli acustici o tattili. L'area corticocerebellare, in cui più di frequente si notano variazioni dell'attività elettrica per effetto dello stimolo luminoso, si estende ai seguenti lobuli ⁽⁷⁾: *a*) il *declive* (lobulo VI); *b*) il *folium vermis* e la parte anteriore del *tuber* (sublobulo VII A); *c*) il *tuber posterior* (sublobulo VII B). I potenziali riflessi si derivano con maggiore costanza, in ciascuna zona, dalla rispettiva parte mediana; la distribuzione topografica dell'area cerebellare testé indicata è apparsa indipendente dal lato scelto per la stimolazione. Facciamo presente come nelle nostre condizioni sperimentali la regione interessata sia di solito meno ampia di quella delimitata da Snider e Stowell ⁽¹⁾ nel Gatto cloralosato, e corrisponda all'incirca alle zone dalle quali detti AA. hanno registrato i potenziali più elevati.

Le risposte che abbiamo ottenute hanno in generale l'aspetto proprio dei potenziali destati nel cervelletto da impulsi di origine diversa [cfr. la lettera-

(5) C. M. COMBS, « J. Neurophysiol. », XVII, 123 (1954).

(6) L. WIDÉN, « Acta physiol. scand. », XXXIII, suppl. 117 (1955).

(7) Tra parentesi è indicata la denominazione secondo LARSELL, « J. comp. Neurol. », XCIX, 135 (1953).

tura in Bremer⁽⁸⁾]: nella maggioranza dei casi, esse risultano (fig. 1) di una componente superficie-positiva, della durata di 20-30 msec e di ampiezza compresa tra 50 e 250 μ V, e di una componente superficie-negativa, che in genere è più lenta e meno ampia della precedente (fig. 1, A e B), talora di ampiezza eguale o maggiore (fig. 1, C e D); a questi potenziali può far séguito, in rari casi e in specie quando la componente negativa ha rimarchevole sviluppo, una oscillazione superficie-positiva, che è di ampiezza assai scarsa e di lunga durata (anche superiore ai 100 msec) e raggiunge lentamente la linea isoelettrica. In qualche grafico si nota, immediatamente prima della componente positiva,

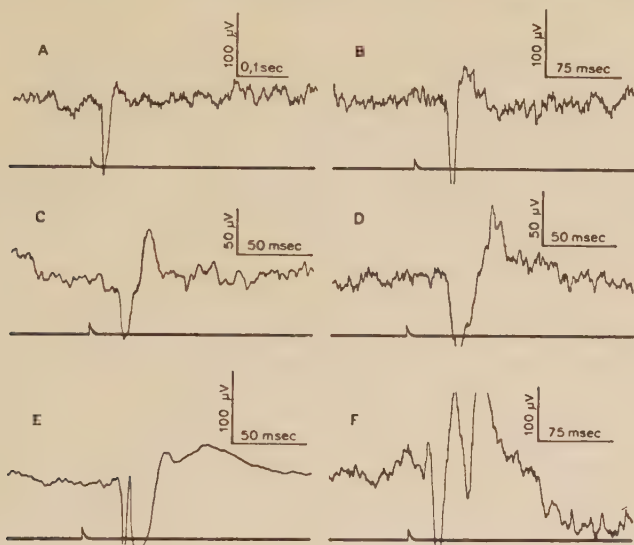


Fig. 1. — Risposte allo stimolo fotico registrate dalla corteccia del verme cerebellare di Gatto non narcotizzato.

Derivazione dalla superficie del *folium vermis*. In questa figura, come nelle successive, le deflessioni verso l'alto corrispondono alla polarità negativa.

la comparsa di una deflessione di segno opposto, di scarsa ampiezza e della durata di 5-10 msec; assai di rado si possono avere risposte di carattere ripetitivo (fig. 1, F). A volte si osserva un'onda negativa, rapida, che interrompe la fase discendente della oscillazione superficie-positiva (fig. 1, E) o che compare tra questa e la componente negativa già descritta.

Il tempo di latenza della risposta cerebellare allo stimolo luminoso è compreso tra 25 e 60 msec (valori più frequenti: 30-40 msec), le risposte di latenza maggiore registrandosi specie al termine di esperimenti protratti a lungo e in preparati leggermente deteriorati. La latenza, l'ampiezza e l'area di distribuzione delle risposte variano col variare della intensità di stimolazione: col crescere dell'illuminamento, il tempo di latenza si accorcia, l'ampiezza di entrambe le componenti della risposta si fa maggiore e il territorio di proiezione ottica viene estendendosi anche alle parti più periferiche delle zone

(8) F. BREMER, « Rev. neurol. », LXXXVII, 65 (1952).

elencate dianzi, anziché mantenersi circoscritto nelle sole parti mediane delle singole lamelle.

La descrizione che ora abbiamo fatta delle risposte allo stimolo fotico, derivabili dal cervelletto di Gatto non narcotizzato, concerne i risultati della maggior parte dei casi. Facciamo tuttavia presente che di rado si riscontra un'area di proiezione assai più ampia di quella suindicata: oltre a comprendere i lobuli vermiani menzionati, essa si estende anche agli emisferi, dove le risposte ottenute dal *crus I* sono in genere superficie-negative, mentre quelle

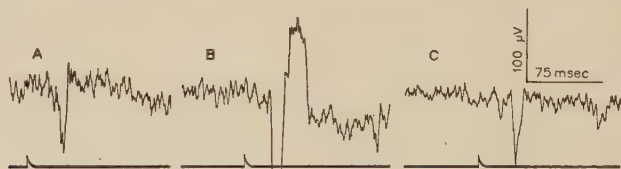


Fig. 2. - Risposte allo stimolo fotico registrate dalla corteccia del verme cerebellare di Gatto non narcotizzato, prima e dopo applicazione locale di stricnina.

Derivazione dalla superficie del *folium vermis*. A, reazione normale; B, risposta ottenuta 5 min dopo il trattamento della corteccia con soluzione di nitrato di stricnina al 0,1 %; C, risposta registrata 10 min dopo lavaggio con soluzione fisiologica.

derivate dal *crus II* s'iniziano con un'onda superficie-positiva, molto meno ampia della componente di segno opposto. Poiché queste reazioni elettriche della corteccia emisferica sono costanti nel Gatto trattato con cloralosio, i ri-

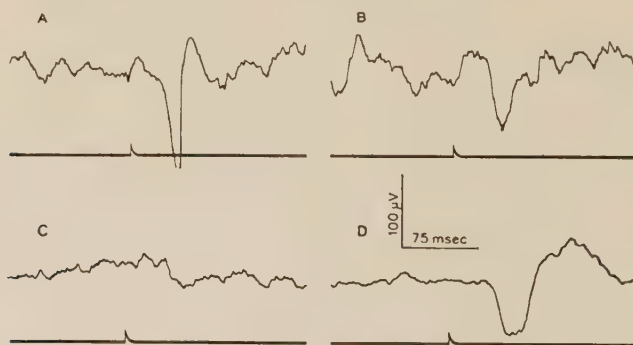


Fig. 3. - Risposte allo stimolo fotico registrate dalla corteccia del verme cerebellare di Gatto non narcotizzato, prima e dopo applicazione locale di cocaina.

Derivazione dalla superficie del *folium vermis*. A, reazione normale; B e C, risposte ottenute rispettivamente 5 e 15 min dopo il trattamento della corteccia con soluzione di cloridrato di cocaina al 5 %; D, risposta registrata 15 min dopo lavaggio con soluzione fisiologica.

sultati della loro analisi saranno esposti nella Nota che concerne gli esperimenti eseguiti su animali in narcosi cloralosica.

L'applicazione sulla corteccia cerebellare di soluzioni di stricnina, cocaina o Nembutal, effettuata secondo il metodo di Baglioni e Magnini⁽⁹⁾, modifica il voltaggio dei potenziali da noi osservati⁽¹⁰⁾: la stricnina (nitrato al

(9) S. BAGLIONI e M. MAGNINI, « Arch. Fisiol. », VI, 240 (1909).

(10) Le sostanze erano disciolte, nella percentuale indicata, in soluzione di NaCl al 0,9 %.

0,1 %) accresce l'ampiezza della componente positiva della risposta, come della negativa (fig. 2); la cocaina (cloridrato al 5 %) e il Nembutal (Abbott, al 6 %) aboliscono quest'ultima, mentre deprimono fortemente la prima (fig. 3). I farmaci saggiati lasciano tuttavia immutata la piccola deflessione negativa che talora direttamente precede la componente superficie-positiva, e hanno scarso effetto sulla oscillazione positiva lenta con cui in rari casi termina il potenziale riflesso. I dati raccolti concordano generalmente con quelli descritti da AA. precedenti [Bremer e Bonnet⁽¹¹⁾; cfr. Bremer⁽⁸⁾] a proposito delle risposte cerebellari a impulsi destati da stimoli acustici.

La effettuabilità della reazione elettrica del cervelletto alla stimolazione fottica nel Gatto non narcotizzato, prova che la reazione medesima non è da attribuirsi unicamente a processi d'irradiazione: le vie che collegano le stazioni ottiche mesencefaliche alla corteccia cerebellare possono farsi 'attive, per effetto dello stimolo specifico, anche senza sottoporre il preparato all'azione di determinati farmaci. Si deve quindi ammettere che una componente connessa con la funzione visiva rientri tra i fattori dell'attività del cervelletto.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica (Teoria degli Insiemi). — *Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti*^(*). Nota II di TULLIO VIOLA, presentata^(**) dal Socio Straniero W. SIERPIŃSKI.

In questa Nota viene ripreso l'argomento iniziato in una Nota precedente dallo stesso titolo.

II. — PROPRIETÀ DELL'INSIEME E.

4. Premettiamo alcune osservazioni sulle operazioni ω_{mn} descritte ai numeri precedenti ($m, n = 1, 2, \dots$).

Anzitutto è immediato che ogni φ_m è una certa ω_{mn} ($m \geq 1$, n dipendente da m). Basta osservare infatti che, per ogni $r = 2, 3, \dots, \varphi_r$ non è altro che una particolare ω_r^{II} .

Si riconosce anche subito che ogni ω_{mn} ($n = 1, 2, \dots$) è una certa $\omega_{m+p,q}$ (p qualunque ≥ 1 , q dipendente da m, n, p). Infatti ω_{mn} è evidentemente una particolare ω_{m+1}^{IV} , dunque anche una ω_{m+2}^{IV} , una ω_{m+3}^{IV} , ecc.

Abbiamo poi il seguente

(11) F. BREMER et V. BONNET, « J. Physiologie », XLIII, 662 (1951).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

LEMMA. - Ogni prodotto $\omega_{mn'} \omega_{mn''}$ è una certa ω_{mn} , oppure è l'identità ($m \geq 1$, n' ed n'' qualunque, n dipendente da m, n', n'').

La proposizione è evidente, se $m = 1$. Per $m = r > 1$, ragioniamo per induzione, supponendo la proposizione già dimostrata per l'indice $r-1$. Naturalmente basta soffermarsi sulle sole due ipotesi:

a) $\omega_{rn'}$ è una ω_r^I o ω_r^{II} , $\omega_{rn''}$ una ω_r^{II} o ω_r^{III} ;

b) oppure $\omega_{rn'}$ è una ω_r^{III} o ω_r^{IV} , $\omega_{rn''}$ una ω_r^I o ω_r^{IV} .

Esaminiamo l'ipotesi *a*. Trascurando di scrivere, per semplicità, i fattori iniziali di $\omega_{rn'}$ e quelli finali di $\omega_{rn''}$, possiamo dare al prodotto $\omega_{rn'} \omega_{rn''}$ l'aspetto seguente:

$$(3) \quad \omega_{rn'} \omega_{rn''} = \cdots \omega_{r-1, n_2} \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1, n_1} \varphi_r^{i_1} \varphi_r^{i_p} \omega_{r-1, n_p} \varphi_r^{i_p-1} \omega_{r-1, n_{p-1}} \cdots$$

Se $i_1 \neq -i_p$, la proposizione è dimostrata. Se $i_1 = -i_p$, risulta

$$\omega_{rn'} \omega_{rn''} = \cdots \omega_{r-1, n_2} \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1, n_1} \omega_{r-1, n_p} \varphi_r^{i_p-1} \omega_{r-1, n_{p-1}} \cdots$$

Dopo ciò, il prodotto $\omega_{r-1, n_1} \omega_{r-1, n_p}$, può essere una $\omega_{r-1, n}$ e allora la proposizione è dimostrata; può essere invece l'identità, e allora si ha la relazione

$$\omega_{rn'} \omega_{rn''} = \cdots \omega_{r-1, n_2} \varphi_r^{i_2} \varphi_r^{i_p-1} \omega_{r-1, n_{p-1}} \cdots$$

analoga alla (3) e sulla quale si può ragionare in modo analogo. Proseguendo via via per riduzioni successive, si perviene così a dimostrare la proposizione in ogni caso, nell'ipotesi *a*.

Nell'ipotesi *b* si ragiona in modo perfettamente analogo.

Nei nn. 5, 6, 7, dimostreremo che *tutti i punti z_m ($m = 1, 2, \dots$) di E sono distinti fra loro.*

5. Un generico z_m può scriversi nella forma

$$(4) \quad z_m = \varphi_{p_1}^{\pm 1} \varphi_{p_2}^{\pm 1} \cdots \varphi_{p_h}^{\pm 1} z_1,$$

in cui p_1, p_2, \dots, p_h sono certi interi positivi, fra loro distinti o no. Gli esponenti ± 1 possono qui suporsi arbitrari, e ⁽⁹⁾ dipendenti fra loro solo nel senso che, per due indici consecutivi p_{i-1}, p_i ($i = 2, 3, \dots, h$), risulti sempre

$$(5) \quad \varphi_{p_{i-1}}^{\pm 1} \varphi_{p_i}^{\pm 1} \neq 1.$$

Dalla (4) si ricava

$$z_1 = \varphi_{p_h}^{\mp 1} \varphi_{p_{h-1}}^{\mp 1} \cdots \varphi_{p_1}^{\mp 1} z_m.$$

La tesi da dimostrarsi equivale dunque, almeno formalmente, a quella, più semplice: *tutti i z_m (per $m > 1$) sono distinti da z_1 .*

(9) Fatta ovviamente eccezione per z_1 e per tutti quegli z_m (come per esempio per $z_2 = \varphi_1 z_1$) per i quali, a norma del procedimento sopra descritto, è $h = 1$,

Ragionando per assurdo, supponiamo che sia

$$(6) \quad z_1 = \varphi_{p_1}^{\pm 1} \varphi_{p_2}^{\pm 1} \cdots \varphi_{p_h}^{\pm 1} z_1$$

ferma restando la condizione (5) ⁽¹⁰⁾.

Ponendo (per $j = 1, 2, \dots, h$)

$$\varphi_{p_j}^{\pm 1} z = \lambda'_{p_j} - \frac{1}{\lambda'_{p_j} + z}$$

ove $\lambda'_{p_j} = \pm \lambda_{p_j}$ (secondoché l'esponente del corrispondente operatore φ_{p_j} , nella (6), è ± 1), la (6) si può scrivere

$$(7) \quad z_1 = \lambda'_{p_1} - \frac{1}{\lambda'_{p_1} + \lambda'_{p_2} - \frac{1}{\lambda'_{p_2} + \lambda'_{p_3} - \cdots - \frac{1}{\lambda'_{p_{h-1}} + \lambda'_{p_h} - \frac{1}{\lambda'_{p_h} + z_1}}}}$$

ed è dunque del tipo

$$(8) \quad z_1 = \frac{A_{p_1 p_2 \dots p_h} z_1 + B_{p_1 p_2 \dots p_h}}{C_{p_1 p_2 \dots p_h} z_1 + D_{p_1 p_2 \dots p_h}},$$

ove

$$\begin{cases} A_{p_1} = \lambda'_{p_1}, & B_{p_1} = \lambda'^2_{p_1} - 1, \\ C_{p_1} = 1, & D_{p_1} = \lambda'_{p_1}, \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{p_1 p_2} = \lambda'_{p_1} \lambda'_{p_2} + \lambda'^2_{p_1} - 1 \\ \quad = A_{p_1} (\lambda'_{p_1} + \lambda'_{p_2}) - 1, \\ C_{p_1 p_2} = \lambda'_{p_1} + \lambda'_{p_2}, \end{array} \right. & \begin{array}{l} B_{p_1 p_2} = \lambda'_{p_1} \lambda'^2_{p_2} + \lambda'^2_{p_1} \lambda'_{p_2} - \lambda'_{p_1} - \lambda'_{p_2} \\ \quad = A_{p_1 p_2} \lambda'_{p_2} - A_{p_1}, \\ D_{p_1 p_2} = \lambda'_{p_1} \lambda'_{p_2} + \lambda'^2_{p_2} - 1 \\ \quad = C_{p_1 p_2} \lambda'_{p_2} - C_{p_1}, \end{array} \\ \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{cases}$$

In generale $A_{p_1 p_2 \dots p_h}$, $B_{p_1 p_2 \dots p_h}$, $C_{p_1 p_2 \dots p_h}$, $D_{p_1 p_2 \dots p_h}$ (per $h \geq 2$) indicano certi polinomi, a coefficienti interi, nelle $h+1$ espressioni

$$\lambda'_{p_1}, \lambda'_{p_1} + \lambda'_{p_2}, \lambda'_{p_2} + \lambda'_{p_3}, \dots, \lambda'_{p_{h-1}} + \lambda'_{p_h}, \lambda'_{p_h}.$$

E valgono, per $h > 2$, le formule ricorrenti:

$$(9) \quad \begin{cases} A_{p_1 p_2 \dots p_h} = A_{p_1 p_2 \dots p_{h-1}} (\lambda'_{p_{h-1}} + \lambda'_{p_h}) - A_{p_1 p_2 \dots p_{h-2}}, \\ B_{p_1 p_2 \dots p_h} = A_{p_1 p_2 \dots p_h} \lambda'_{p_h} - A_{p_1 p_2 \dots p_{h-1}}, \\ C_{p_1 p_2 \dots p_h} = C_{p_1 p_2 \dots p_{h-1}} (\lambda'_{p_{h-1}} + \lambda'_{p_h}) - C_{p_1 p_2 \dots p_{h-2}}, \\ D_{p_1 p_2 \dots p_h} = C_{p_1 p_2 \dots p_h} \lambda'_{p_h} - C_{p_1 p_2 \dots p_{h-1}}. \end{cases}$$

(10) Cfr. la nota precedente,

Abbiamo dunque

$$\varphi_{p_{i-1}}^{\pm 1} \varphi_{p_i}^{\pm 1} z = \frac{A_{p_{i-1} p_i} z + B_{p_{i-1} p_i}}{C_{p_{i-1} p_i} z + D_{p_{i-1} p_i}}$$

e la (5) significa ovviamente che è $\lambda'_{p_{i-1}} + \lambda'_{p_i} \neq 0$ per ogni $i = 2, 3, \dots, h$.

6. È utile, per il seguito, richiamare alcune semplici proprietà algoritmiche dei coefficienti $C_{p_1 p_2 \dots p_h}$ introdotti al numero precedente.

Anzitutto osserviamo che, accanto alla formula ricorrente (9₃), vale anche la seguente, ad essa analoga,

$$(10) \quad C_{p_1 p_2 \dots p_h} = (\lambda'_{p_1} + \lambda'_{p_2}) C_{p_2 p_3 \dots p_h} - C_{p_3 p_4 \dots p_h},$$

come si può dimostrare con tutta facilità per induzione, dopo la diretta ed immediata verifica fatta per $h = 3$.

Le (9₃), (10) si generalizzano poi nella formula seguente, valida per ogni indice u tale che $1 < u < h$:

$$(11) \quad C_{p_1 p_2 \dots p_h} = C_{p_1 p_2 \dots p_u} C_{p_{u+1} \dots p_h} - C_{p_1 p_2 \dots p_{u-1}} C_{p_{u+1} p_{u+2} \dots p_h}.$$

Anche questa formula può dimostrarsi facilmente per induzione. Infatti essa è già verificata per $u = 2$ ⁽¹¹⁾. Supposto dunque, se $u > 2$, di averla dimostrata per i valori $2, 3, \dots, u-1$ dell'indice, risulta:

$$\begin{aligned} C_{p_1 p_2 \dots p_h} &= C_{p_1 p_2 \dots p_{u-1}} C_{p_u \dots p_h} - C_{p_1 p_2 \dots p_{u-2}} C_{p_u p_{u+1} \dots p_h} = \\ &= C_{p_1 p_2 \dots p_{u-1}} [(\lambda'_{p_{u-1}} + \lambda'_{p_u}) C_{p_u p_{u+1} \dots p_h} - C_{p_{u+1} p_{u+2} \dots p_h}] - \\ &\quad - C_{p_1 p_2 \dots p_{u-2}} C_{p_u p_{u+1} \dots p_h} = \\ &= [C_{p_1 p_2 \dots p_{u-1}} (\lambda'_{p_{u-1}} + \lambda'_{p_u}) - C_{p_1 p_2 \dots p_{u-2}}] C_{p_u p_{u+1} \dots p_h} - \\ &\quad - C_{p_1 p_2 \dots p_{u-1}} C_{p_{u+1} p_{u+2} \dots p_h}, \end{aligned}$$

donde la (11), c. d. d.

7. La (6), per l'ipotesi fatta che z_1 sia algebricamente indipendente dalle $\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots, \lambda_{p_h}$, ha per conseguenza

$$(12) \quad C_{p_1 p_2 \dots p_h} = 0.$$

Ora noi sappiamo già che

$$C_{p_i} \neq 0 \quad (\text{per ogni } i = 1, 2, \dots, h),$$

$$C_{p_{i-1} p_i} \neq 0 \quad (\text{per ogni } i = 2, 3, \dots, h).$$

(11) Infatti, per $u = 2$, essa si riduce alla (10). Per $u = h-1$, invece, essa si riduce alla (9₃).

Ragionando per induzione, supponiamo d'aver già dimostrato, se $h > 2$, tutte le $(h^2 - h - 2)/2$ disuguaglianze

$$(13) \quad C_{p_{i-r} p_{i-r+1} \dots p_i} \neq 0 \\ (r = 1, 2, \dots, h-2 \quad ; \quad i = r+1, r+2, \dots, h).$$

Se p_h è distinto da tutti gli indici p_1, p_2, \dots, p_{h-1} , la (12), in virtù della (9₃), è assurda, perché essa è un'equazione lineare in λ_{p_h} , con coefficiente del termine di primo grado uguale a $\pm C_{p_1 p_2 \dots p_{h-1}} \neq 0$ (mentre λ_{p_h} è algebricamente indipendente da $\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots, \lambda_{p_{h-1}}$).

Se $p_h = p_{h-1} = \dots = p_u$, la (12) è un'equazione di grado $h-1$ in λ_{p_h} , con coefficiente del termine di grado $h-1$ uguale a $(\pm 2)^{h-1}$ (12); anche in tal caso, dunque, la (12) è assurda.

Se $p_h = p_{h-1} = \dots = p_u$ (con $1 < u < h$), ma $p_h \neq p_{u-1}, p_h \neq p_{u-2}, \dots, p_h \neq p_1$, la (12) è di grado $h-u+1$ in λ_{p_h} , e la (11) mostra che il coefficiente del termine di grado $h-u+1$ è $\pm 2^{h-u} C_{p_1 p_2 \dots p_{u-1}}$ (13).

Nel caso generale, infine, applicando più volte e in modo opportuno le formule (9₃), (10), (11), si riconosce facilmente che nella (12) il coefficiente del termine di grado massimo in λ_{p_h} può sempre decomporre (a parte il segno) nel prodotto d'una certa potenza di 2, moltiplicata per una o più espressioni del tipo (13), ciascuna delle quali dotata esclusivamente di indici p_j diversi da p_h (14).

(12) Precisamente è uguale a $(+2)^{h-1}$, se nella (6) tutti gli esponenti sono $+1$, è invece uguale a $(-2)^{h-1}$, se nella (6) tutti gli esponenti sono -1 .

(13) Osservazione analoga a quella della nota precedente.

(14) Un esempio particolare varrà a indicare il metodo generale più conveniente per giungere alla citata decomposizione.

Sia $h = 13$ e $p_{13} = p_{10} = p_9 = p_8 = p_4$, ma p_{13} diverso da ciascuno dei rimanenti indici $p_1, p_2, p_3, p_5, p_6, p_7, p_{11}, p_{12}$. In tal caso $C_{p_1 p_2 \dots p_{13}}$ risulta di grado 7 in $\lambda_{p_{13}}$ e si ha:

$$C_{p_1 p_2 \dots p_{13}} = C_{p_1 p_2 \dots p_{11}} C_{p_{11} p_{12} p_{13}} - C_{p_1 p_2 \dots p_{10}} C_{p_{12} p_{13}}.$$

Il prodotto $C_{p_1 p_2 \dots p_{11}} C_{p_{11} p_{12} p_{13}}$ è di grado 7 in $\lambda_{p_{13}}$, il prodotto $C_{p_1 p_2 \dots p_{10}} C_{p_{12} p_{13}}$ è invece di grado 6 e può quindi essere trascurato nella ricerca del coefficiente di $\lambda_{p_{13}}^7$. Indi si ha:

$$C_{p_1 p_2 \dots p_{11}} = C_{p_1 p_2 \dots p_{10}} (\lambda'_{p_{10}} + \lambda'_{p_{11}}) - C_{p_1 p_2 \dots p_9}.$$

Il prodotto $C_{p_1 p_2 \dots p_{10}} (\lambda'_{p_{10}} + \lambda'_{p_{11}})$ è di grado 6, il termine $C_{p_1 p_2 \dots p_9}$ di grado 4 e quindi si trascura. Segue:

$$C_{p_1 p_2 \dots p_{10}} = C_{p_1 p_2 \dots p_5} C_{p_5 p_6 \dots p_{10}} - C_{p_1 p_2 p_3 p_4} C_{p_6 p_7 p_8 p_9 p_{10}}.$$

Il prodotto $C_{p_1 p_2 p_3 p_4} C_{p_6 p_7 p_8 p_9 p_{10}}$ si trascura.

$$C_{p_1 p_2 \dots p_5} = C_{p_1 p_2 p_3 p_4} (\lambda'_{p_4} + \lambda'_{p_5}) - C_{p_1 p_2 p_3}.$$

Risulta dunque che il coefficiente di $\lambda_{p_{13}}^7$ in $C_{p_1 p_2 \dots p_{13}}$ è

$$\pm 2^2 C_{p_1 p_2 p_3} C_{p_5 p_6 p_7} C_{p_{11} p_{12}}.$$

In ogni caso dunque la (12) risulta assurda, c. d. d.

8. Per provare che l'insieme E costruito ai nn. 2, 3 risolve, nel piano iperbolico, il problema enunciato al n. 1, faremo vedere precisamente che, per ogni $m = 1, 2, \dots$, risulta

$$\varphi_m E = E - \{z_m\}^{(15)}.$$

All'uopo cominciamo col dimostrare che $\varphi_m E \subseteq E$, cioè che $\varphi_m z_h \in E$ qualunque sia $h = 1, 2, \dots$. Distinguiamo vari casi.

a) $h = m = 1$. Allora è $\varphi_m z_h = z_2$.

b) $h = 1, m > 1$. Allora $\varphi_m z_h$ è uno z_m^{II} .

c) $h > 1$. Sia $z_h = z_{rn}$. Distinguiamo i due sottocasi $c_1)$ $m \leq r$, $c_2)$ $m > r$ e, ulteriormente ancora, ciascuno di questi.

$c_{11})$ $m = r = 1$. Allora è $\varphi_m z_h = \varphi_1 z_{1n} = z_{1 \cdot n+1}$.

$c_{12})$ $r > 1, m \leq r$ e z_{rn} del tipo (2) $_{r-1}$, cioè $z_{rn} = z'_{rk} = \varphi_r^k z_r$ e perciò

$$\varphi_m z_h = \varphi_m \varphi_r^k z_r.$$

Se $m = r$, è $\varphi_m z_h = \varphi_r^{k+1} z_r = z'_{r \cdot k+1}$. Se invece $m < r$, ricordando (n. 4) che φ_m è una certa $\omega_{r-1 \cdot i}$, si ha $\varphi_m z_h = \omega_{r-1 \cdot i} z'_{rk}$ e questo è uno z_r^{IV} .

$c_{13})$ $r > 1, m \leq r$ e z_{rn} uno z_r^{I} o uno z_r^{II} , per esempio

$$z_{rn} = \omega_{r-1 \cdot n_p} \varphi_r^{i_p} \omega_{r-1 \cdot n_{p-1}} \varphi_r^{i_{p-1}} \dots \omega_{r-1 \cdot n_2} \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1 \cdot n_1} \varphi_r^{i_1} z_0$$

con $z_0 = z_1$ oppure $z_0 = z_{sl}$ ($s < r$ e $z_{sl} = z_r$). È allora, per $m = r$,

$$\varphi_m z_h = \varphi_r \omega_{r-1 \cdot n_p} \varphi_r^{i_p} \omega_{r-1 \cdot n_{p-1}} \varphi_r^{i_{p-1}} \dots \omega_{r-1 \cdot n_2} \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1 \cdot n_1} \varphi_r^{i_1} z_0$$

uno z_r^{II} . Per $m < r$, è invece

$$\varphi_m z_h = \omega_{r-1 \cdot n'} \omega_{r-1 \cdot n_p} \varphi_r^{i_p} \omega_{r-1 \cdot n_{p-1}} \varphi_r^{i_{p-1}} \dots \omega_{r-1 \cdot n_2} \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1 \cdot n_1} \varphi_r^{i_1} z_0$$

uno z_r^{I} o uno z_r^{II} (secondoché il prodotto $\omega_{r-1 \cdot n'} \omega_{r-1 \cdot n_p}$ è una $\omega_{r-1 \cdot n''}$ oppure l'identità, v. lemma del n. 4).

Se

$$z_{rn} = \varphi_r^{i_p} \omega_{r-1 \cdot n_{p-1}} \varphi_r^{i_{p-1}} \dots \omega_{r-1 \cdot n_2} \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1 \cdot n_1} \varphi_r^{i_1} z_0,$$

si ragiona in modo analogo ⁽¹⁶⁾.

$c_{14})$ $r > 1, m \leq r$ e z_{rn} uno z_r^{III} o uno z_r^{IV} , per esempio

$$z_{rn} = \varphi_r^{i_p} \omega_{r-1 \cdot n_p} \varphi_r^{i_{p-1}} \dots \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1 \cdot n_2} \varphi_r^{i_1} \omega_{r-1 \cdot n_1} z'_{rl}.$$

(15) Con $\varphi_m E$ intendiamo l'insieme ottenuto applicando l'operazione φ_m ad ogni singolo punto z di E :

$$\varphi_m E = \{\varphi_m z\}_z \in E.$$

(16) Si osservi che, in tal caso, può accadere che sia $\varphi_m z_h = z_0$ (precisamente se e solo se $m = r, p = 1, i_1 = -1$).

È allora, per $m = r$,

$$\varphi_m z_h = \varphi_r^{i_p+1} \omega_{r-1, n_p} \varphi_r^{i_p-1} \dots \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1, n_2} \varphi_r^{i_1} \omega_{r-1, n_1} z'_{rl}$$

uno z_r^{III} o uno z_r^{IV} (secondochè $i_p \neq -1$ oppure $i_p = -1$). Per $m < r$, è invece

$$\varphi_m z_h = \omega_{r-1, n'} \varphi_r^{i_p} \omega_{r-1, n_p} \varphi_r^{i_p-1} \dots \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1, n_2} \varphi_r^{i_1} \omega_{r-1, n_1} z'_{rl}$$

uno z_r^{IV} .

Se

$$z_{rn} = \omega_{r-1, n_p} \varphi_r^{i_p-1} \dots \varphi_r^{i_2} \omega_{r-1, n_2} \varphi_r^{i_1} \omega_{r-1, n_1} z'_{rl},$$

si ragiona in modo analogo ⁽¹⁷⁾.

$c_{21})$ $m > r$ e $z_h = z_m$. Allora è $\varphi_m z_h = z'_{m1}$.

$c_{22})$ $m > r$ e $z_h \neq z_m$. Allora $\varphi_m z_h = \varphi_m z_{rn}$ è uno z_m^{II} .

9. Dimostriamo ora che, per ogni coppia d'indici m, h con $m \neq h$, è

$\varphi_m^{-1} z_h \in E$.

a) Per $h = 1$, $\varphi_m^{-1} z_h$ è uno z_m^{II} .

b) Per $h > 1$, poniamo $z_h = z_{rn}$ e distinguiamo i due sottocasi:

$b_1)$ $m \leq r$, $b_2)$ $m > r$.

$b_{11})$ $m = r = 1$. Allora è

$$\varphi_m^{-1} z_h = \begin{cases} z_{1, n-1} & \text{per } n > 1, \\ z_1 & \text{per } n = 1. \end{cases}$$

$b_{12})$ $r > 1$, $m \leq r$ e z_{rn} del tipo $(2)_{r-1}$, cioè $z_{rn} = z'_{rk} = \varphi_r^k z_r$ e perciò

$$\varphi_m^{-1} z_h = \varphi_m^{-1} \varphi_r^k z_r.$$

Se $m = r$, è

$$\varphi_m^{-1} z_h = \varphi_r^{k-1} z_r = \begin{cases} z'_{rk-1} & \text{per } k > 1, \\ z_r & \text{per } k = 1. \end{cases}$$

Se $m < r$, è $\varphi_m^{-1} z_h = \omega_{r-1, i} z'_{rk}$ cioè uno z_r^{IV} .

$b_{13})$ $r > 1$, $m \leq r$ e z_{rn} uno z_r^{I} oppure uno z_r^{II} . In tal caso si ragiona come nel caso c_{13} del n. 8.

$b_{14})$ $r > 1$, $m \leq r$ e z_{rn} uno z_r^{III} oppure uno z_r^{IV} . Si ragiona come nel caso c_{14} del n. 8.

$b_2)$ $m > r$. In tal caso $\varphi_m^{-1} z_{rn}$ è uno z_m^{II} .

10. Dimostriamo infine che $\varphi_m^{-1} z_m \in E$ per ogni $m = 1, 2, \dots$. All'uopo faremo vedere che non può essere

$$(14) \quad z_m = \varphi_m z_h$$

per nessuna coppia d'indici $m, h \leq m$.

(17) In tal caso può accadere che sia $\varphi_m z_h = z'_{rl}$ (precisamente se e solo se $p = 1$ e $\varphi_m = \omega_{r-1, n'} = \omega_{r-1, n_1}$, cfr. la nota precedente e il lemma del n. 4).

La (14) si scrive

$$z_m = \frac{\lambda_m z_h + (\lambda_m^2 - 1)}{z_h + \lambda_m}$$

ed è senz'altro incompatibile con la scelta fatta di λ_m (n. 2):

a) per $h \leq m$.

Consideriamo dunque il caso

b) $h > m$. Sia, in tal caso, $z_h = z_{r_n}$.

b₁) $r > m$. Se z_{r_n} è del tipo $(2)_{r-1}$, $\varphi_m z_h$ è uno z_r^{IV} . Se z_{r_n} è uno z_r^{I} , oppure uno z_r^{II} , oppure uno z_r^{III} , $\varphi_m z_h$ è rispettivamente uno z_r^{I} o z_r^{II} , uno z_r^{I} , uno z_r^{IV} . Se z_{r_n} è uno z_r^{IV} , $\varphi_m z_h$ è uno z_r^{IV} o z_r^{III} , oppure è addirittura del tipo $(2)_{r-1}$ (18). In tutti i possibili sottocasi, si riconosce dunque che $\varphi_m z_h$ è un certo z_{rk} e perciò $\neq z_m$ (nn. 5, 6, 7) (19).

b₂) $r = m = 1$. Allora è $\varphi_m z_h = \varphi_1^{n+1} z_1 = z_{1 \cdot n+1} \neq z_1$ (nn. 5, 6, 7).

b₃) $r = m > 1$. Se z_{r_n} è del tipo $(2)_{r-1}$, $\varphi_m z_h$ è anch'esso del tipo $(2)_{r-1}$. Se z_{r_n} è uno z_r^{I} oppure uno z_r^{IV} , $\varphi_m z_h$ è rispettivamente uno z_r^{II} , uno z_r^{III} . Se z_{r_n} è uno z_r^{II} , $\varphi_m z_h$ è uno z_r^{II} o z_r^{I} , oppure è un certo $z_o \neq z_m$ ($z_o = z_1$, oppure $z_o = z_{st}$ con $s < r$) (20). Se z_{r_n} è uno z_r^{III} , $\varphi_m z_h$ è uno z_r^{III} o z_r^{IV} . Dunque, in tutti i possibili sottocasi, è ancora $\varphi_m z_h \neq z_m$ (21).

b₄) Infine $r < m$. Osservando che $z_{r_n} \neq z_m$ (22), si riconosce che $\varphi_m z_h$ è uno z_m^{II} , dunque è ancora e sempre $\varphi_m z_h \neq z_m$, c. d. d.

Analisi matematica. — *Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli* (*). Nota di ENNIO DE GIORGI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. In questo lavoro si studiano le proprietà differenziali e specialmente l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari; tale argomento è stato oggetto di molte ricerche di cui non possiamo dare qui un quadro completo, limitandoci a citare qualche lavoro da cui il lettore potrà ricavare più ampie informazioni bibliografiche. Ricorderemo in particolare i risultati di Hopf, Stampacchia, Morrey, che danno teoremi di differenziabilità (e in particolare di analiticità) per estremali sempre meno regolari; precisamente si richiede l'esistenza di derivate seconde hólde-

(18) Quest'ultima eventualità si presenta se e solo se $z_{r_n} = \varphi_m^{-1} z_{rk}$ con z_{rk} del tipo $(2)_{r-1}$.

(19) Si osservi che, in virtù del procedimento diagonale descritto al n. 3, ogni z_{rk} è un certo z_s con $s > r$: dev'essere quindi $z_s \neq z_m$, se $r \geq m$.

(20) Quest'ultima eventualità si presenta se e solo se $z_{r_n} = \varphi_r^{-1} z_o$ (cfr. la nota) (18).

(21) Cfr. la nota (19).

(22) Il caso $z_{r_n} = z_m$ è già stato discusso in a.

(*) Lavoro eseguito nell'I.N.A.C.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

riane in [2]⁽¹⁾, di derivate prime hölderiane in [7], di derivate prime continue in [4].

A un diverso indirizzo appartengono invece alcune ricerche di Stampacchia contenute in [7]; egli parte dai teoremi di esistenza ottenuti coi metodi diretti del calcolo delle variazioni, nei quali le soluzioni vengono ricercate in classi molto ampie di funzioni, e studia le proprietà di queste soluzioni (*a priori* assai poco regolari) dimostrando, fra l'altro, l'esistenza di derivate parziali seconde di quadrato sommabile soddisfacenti l'equazione differenziale di Eulero quasi ovunque.

Rimanevano però da trovare (qualora si escludano gli integrali doppi, per i quali rinviamo il lettore a [1], [3], [5], [6], gl'integrali quadratici che danno luogo ad equazioni di Eulero lineari e qualche altro caso particolare) teoremi che facessero, per così dire, da ponte fra i risultati ottenuti nel primo indirizzo e quelli ottenuti nel secondo, assicurando che le soluzioni dei problemi variazionali trovate coi metodi diretti soddisfano almeno le condizioni richieste in [4]; un primo teorema di questo tipo è appunto il risultato di questo lavoro. La sua dimostrazione è fondata su un altro teorema (relativo ai caratteri hölderiani delle funzioni che soddisfano certe condizioni integrali) che ho voluto mettere in evidenza, perché ritengo possa essere utilmente applicato nello studio di altre questioni analoghe.

Colgo infine l'occasione per ringraziare il prof. G. Stampacchia che ha richiamato la mia attenzione sugli argomenti ora esposti ed i cui consigli mi sono stati assai utili in questo lavoro.

2. Nello spazio euclideo r -dimensionale S_r fissiamo un campo E ed indichiamo con $\mathfrak{A}^{(2)}$ la classe delle funzioni $w(x)$ definite in E e soddisfacenti le condizioni seguenti:

1^a $w(x)$ è assolutamente continua su quasi tutti i segmenti, paralleli agli assi coordinati, contenuti in E .

2^a $w(x)$ e le sue derivate parziali prime sono funzioni di quadrato sommabile in ogni insieme chiuso e limitato contenuto in E .

Indicheremo invece con \mathfrak{B} la classe delle funzioni $w(x)$ che, oltre alle condizioni 1^a, 2^a, soddisfano la

3^a Esiste una costante γ tale che, comunque si fissino un punto $y \in E$ (di cui $\delta(y)$ sia la distanza da $(S_r - E)$) e tre numeri reali k, ρ_1, ρ_2 , (con $0 < \rho_1 < \rho_2 < \delta(y)$), risulti

$$\frac{\gamma}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \int_{\mathfrak{A}(k) \cdot I(Q_2; y)} (w(x) - k)^2 dx_1 \cdots dx_r \geq \int_{\mathfrak{A}(k) I(Q_1; y)} |\text{grad } w|^2 dx_1 \cdots dx_r,$$

$$\frac{\gamma}{(\rho_1 - \rho_2)^2} \int_{\mathfrak{B}(k) I(Q_2; y)} (w(x) - k)^2 dx_1 \cdots dx_r \geq \int_{\mathfrak{B}(k) I(Q_1; y)} |\text{grad } w|^2 dx_1 \cdots dx_r,$$

(1) Il numero fra parentesi quadra è quello che compete al lavoro citato nella bibliografia riportata alla fine della Nota.

avendo indicato con $I(\rho; y)$ l'intorno di raggio ρ di y , con $A(k)$ l'insieme dei punti di E ove $w(x) > k$, con $B(k)$ l'insieme di quelli ove $w(x) < k$. Vale allora il seguente

TEOR. I. - Ogni funzione $w(x)$ appartenente alla classe \mathcal{B} è uniformemente hölderiana in ogni insieme chiuso e limitato contenuto in E ⁽²⁾.

Senza dare la completa dimostrazione del teorema ora enunciato (che verrà pubblicata altrove), accenniamo brevemente ai lemmi su cui si fonda; tali lemmi, qualora si pensino fissati un punto $y \in E$ ed una funzione $w(x) \in \mathcal{B}$ e quindi si ponga

$$I(\rho) = I(\rho; y) \quad , \quad A(k; \rho) = A(k) \cdot I(\rho; y) \quad , \quad B(k; \rho) = B(k) \cdot I(\rho; y),$$

possono enunciarsi nella forma seguente:

LEMMA I. - Esiste una costante β_1 tale che, per ogni terna di numeri ρ, k, λ verificanti le condizioni

$$0 < \rho < \delta(y) \quad , \quad k < \lambda,$$

si abbia

$$\beta_1 \int_{[A(k; \rho) - A(\lambda; \rho)]} |\text{grad } w| dx_1 \cdots dx_r \geq (\lambda - k) \tau^{(r-1)/r},$$

ove con τ si indica il più piccolo dei due numeri $\text{mis } A(\lambda; \rho), \text{mis } [I(\rho) - A(k; \rho)]$.

LEMMA II. - Esiste una costante β_2 tale che, per ogni coppia di numeri ρ, k soddisfacenti le condizioni

$$0 < \rho < \delta(y) \quad , \quad 2 \text{ mis } A(k; \rho) \leq \text{mis } I(\rho),$$

sia

$$\beta_2 \int_{\tilde{A}(k; \rho)} |\text{grad } w|^2 dx_1 \cdots dx_r \geq [\text{mis } A(k; \rho)]^{-2/r} \int_{\tilde{A}(k; \rho)} (w(x) - k)^2 dx_1 \cdots dx_r.$$

LEMMA III. - Ad ogni numero positivo $\sigma < 1$ può associarsi un numero $\theta(\sigma)$, tale che dalle

$$\text{mis } A(k; \rho) < \rho^r \theta(\sigma) \quad ; \quad 0 < \rho < \delta(y)$$

segua

$$\text{mis } A(k + \sigma \rho; \rho - \sigma \rho) = 0,$$

ove si è posto

$$c = \rho^{-r/2} [\theta(\sigma)]^{-1/2} \left[\int_{\tilde{A}(k; \rho)} (w - k)^2 dx_1 \cdots dx_r \right]^{1/2}.$$

LEMMA IV. - Esiste un numero $\eta > 0$, tale che, per $0 < \rho < \delta(y)$, si abbia sempre

$$(1 - \eta) \text{osc. } [w; 4\rho] > \text{osc. } [w; \rho],$$

ove $\text{osc. } [w; \rho]$ è l'oscillazione di $w(x)$ in $I(\rho)$.

(2) Naturalmente la frase va intesa nel senso della teoria dell'integrazione: cioè $w(x)$ o è hölderiana essa stessa o è quasi ovunque eguale ad una funzione hölderiana; analoghe considerazioni valgono per il lemma IV e il teor. II.

3. Sia $f(p_1, \dots, p_r)$ una funzione continua in S_r insieme alle derivate parziali prime e seconde; poniamo

$$f_{hk}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial p_h \partial p_k}, \quad f_h(p) = \frac{\partial f}{\partial p_h}$$

e supponiamo che esistano due numeri positivi μ_1, μ_2 tali che si abbia

$$|\mu_1| |\lambda|^2 \leq \sum_{h,k}^{1,r} f_{hk} \lambda_h \lambda_k \leq |\mu_2| |\lambda|^2$$

per ogni punto $p \equiv (p_1, \dots, p_r) \in S_r$ e per ogni vettore $\lambda \equiv (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. Riprendendo in considerazione la classe $\mathfrak{A}^{(2)}$ introdotta nel n. 2, diremo che una funzione $u^*(x) \in \mathfrak{A}^{(2)}$ è *estremale in E dell'integrale*

$$(I) \quad I(u) = \int f\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_r}\right) dx_1 \cdots dx_r$$

se, per ogni insieme chiuso e limitato $C \in E$ e per ogni funzione $g(x)$, continua in S_r con le derivate parziali prime e nulla identicamente in $(S_r - C)$, si ha

$$\oint_C \sum_{h=1}^r \frac{\partial g}{\partial x_h} f_h\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u^*}{\partial x_r}\right) dx_1 \cdots dx_r = 0.$$

Stampacchia ha provato in [7] che le derivate prime delle estremali di (I) appartengono ad $\mathfrak{A}^{(2)}$; da tale risultato e dal teor. I segue l'annunciato teorema di analiticità:

TEOR. II. — *Ogni estremale in E dell'integrale (I) ha le derivate parziali prime uniformemente hölderiane in ogni insieme chiuso e limitato contenuto in E; se poi $f(p)$ è analitica in S_r , l'estremale è analitica in E.*

BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. HOPF, *Zum analytischen Charakter der Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme*, «Math. Zeitschrift», band 30, pp. 404-413 (1929).
- [2] HOPF, *Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, «Math. Zeitschrift», band 34, pp. 194-233 (1932).
- [3] C. B. MORREY, *Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics*, «Univ. California. Publ. Math.» (N. S.), vol. I (1943).
- [4] C. B. MORREY, *Second order elliptic systems of differential equations*, «Annals of Math. Studies», N. 33 Princeton Un. Press. (1954).
- [5] M. SCHIFFMAN, *Differentiability and analyticity of solutions of double integral variational problems*, «Annals of Math.», vol. 48 (1947).
- [6] A. G. SIGALOV, *On condition of differentiability and analiticity of solutions of two dimensional problems of the calculus of variations*, «Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.» (N. S.), 85 (1952) (Math. Reviews vol. 14 n. 3).
- [7] G. STAMPACCHIA, *Sistemi di equazioni di tipo ellittico a derivate parziali del primo ordine e proprietà delle estremali degli integrali multipli*, «Ricerche di Matematica», vol. I, pp. 200-226 (1952).

Geometria. — *Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti.* Nota II (*) di GIUSEPPE TALLINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

4. In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $q = p^h \geq 2$, chiameremo *k -calotta* un insieme di k punti che contenga ogni retta avente più di due punti in comune con l'insieme. Sia δ ($0 \leq \delta \leq n$) la massima dimensione degli spazi contenuti in una k -calotta; diremo allora che quest'ultima ha l'indice di specializzazione δ , e la indicheremo con $\mathcal{C}(k, \delta)$.

Notiamo che, poiché in un $S_{n,q}$, con $q = 2$, ogni retta possiede tre punti, così ogni insieme di k punti risulta una k -calotta se $q = 2$. Nello studio delle k -calotte di un $S_{n,q}$ si potrà dunque escludere, come banale, il caso $q = 2$. Supporremo perciò d'ora innanzi $q = p^h > 2$.

In un $S_{n,q}$, una $\mathcal{C}(k, 0)$ risulta un insieme di k punti a tre a tre non allineati. In relazione alle $\mathcal{C}(k, 0)$ si pone il seguente:

PROBLEMA. — Per dati n e q , quale è il massimo valore di k siffatto che in $S_{n,q}$ esista qualche $\mathcal{C}(k, 0)$? Detto $M_{n,q}$ un tale valore, di quali proprietà godono le $\mathcal{C}(M_{n,q}, 0)$? Esiste una varietà algebrica $V_{(n,q)}$ di $S_{n,q}$ che risulti una $\mathcal{C}(M_{n,q}, 0)$? Supposta esistente una tale $V_{(n,q)}$, si può asserire che ogni $\mathcal{C}(M_{n,q}, 0)$ sia una $V_{(n,q)}$?

Per $n = 3$ e $p \neq 2$, si può rispondere affermativamente a questo problema, dimostrandosi⁽¹⁸⁾ facilmente che in un $S_{3,q}$, con $p \neq 2$, ogni $\mathcal{C}(q^2 + 1, 0)$ risulta una quadrica a punti ellittici. Ne segue che $M_{3,q} = q^2 + 1$, perché se fosse $M_{3,q} > q^2 + 1$, in $\mathcal{C}(M_{3,q}, 0)$ sarebbero certamente contenuti una quadrica a punti ellittici ed un punto non appartenente ad essa; ma per un punto passa sempre una secante ad una quadrica, onde la $\mathcal{C}(M_{3,q}, 0)$ conterrebbe almeno tre punti allineati e ciò è assurdo. Lo stesso dicasi per il caso $n = 3$ e $q = 4$, in quanto anche in questo caso ogni $\mathcal{C}(q^2 + 1, 0)$ è una quadrica a punti ellittici.

Per $n = 3$ e $p = 2$, con $q > 4$, si riesce invece a rispondere affermativamente alle prime tre domande del problema, ma la quarta domanda attende ancora una risposta. Infatti in un $S_{3,q}$, con $p = 2$ e $q > 4$, si sa che $M_{3,q} = q^2 + 1$ ⁽¹⁹⁾ e che ogni quadrica a punti ellittici risulta⁽²⁰⁾ una $\mathcal{C}(q^2 + 1, 0)$, ma non è ancora stato dimostrato il viceversa, ossia che ogni $\mathcal{C}(q^2 + 1, 0)$ sia una quadrica a punti ellittici. Si conoscono⁽²¹⁾ però molte proprietà delle $\mathcal{C}(q^2 + 1, 0)$ analoghe a quelle delle quadriche a punti ellittici.

(*) Continuazione della Nota I apparsa in questo volume dei «Rendiconti» a pp. 311-317.

(**) Nella seduta dell'11 febbraio 1956.

(18) Cfr. A. BARLOTTI [1] e G. PANELLA [4]. (I numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della Nota I).

(19) Cfr. B. QVIST [6], n. 6.

(20) Cfr. il n. 3 della Nota I.

(21) Cfr. A. BARLOTTI [1].

Per $n > 3$, nulla si conosceva finora – che io sappia – relativamente al problema precedente. Sussiste però la proposizione seguente – che dimostriamo nel lavoro annunciato nel n. 1 – la quale dà una risposta parziale al problema.

In un $S_{n,q}$, con $n > 3$, si ha $M_{n,q} < q^{n-1} + 1$.

5. In questo numero esporremo i risultati a cui siamo pervenuti nello studio della $\mathcal{C}(k, \delta)$ di un $S_{n,q}$, con $p \neq 2$.

In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $p \neq 2$, si hanno anzitutto le seguenti proposizioni, che seguono agevolmente da quanto detto al n. 2.

1° Una quadrica non specializzata di tipo iperbolico di un $S_{2r+1,q}$ risulta una $\mathcal{C}(Q_{2r} + q^r, r)$.

2° Una quadrica non specializzata di un $S_{2r,q}$ risulta una $\mathcal{C}(Q_{2r-1}, r-1)$.

3° Un cono quadrico di tipo iperbolico di un $S_{n,q}$, avente come spazio vertice un $S_{2\delta-n}$ ($n/2 \leq \delta \leq n-1$), è una $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$.

4° Un cono quadrico di un $S_{n,q}$, avente come spazio vertice un $S_{2\delta-n+1}$ ($(n-1)/2 \leq \delta \leq n-1$), è una $\mathcal{C}(Q_{n-1}, \delta)$.

Ebbene siamo riusciti ad invertire le precedenti proposizioni, dimostrando i seguenti teoremi.

TEOREMA I. – *Ogni calotta $\mathcal{C}(Q_{n-1}, \delta)$ di un $S_{n,q}$, con δ a priori vincolato soltanto alle limitazioni $0 \leq \delta \leq n-1$, è tale che δ verifica di fatto le limitazioni $n/2 - 1 \leq \delta \leq n-1$. La calotta risulta, per ogni δ soddisfacente alle limitazioni $n/2 - 1 < \delta \leq n-1$, un cono quadrico con vertice un $S_{2\delta-n+1}$; e, per $\delta = n/2 - 1$ (nel qual caso n deve essere pari), una quadrica non specializzata.*

TEOREMA II. – *Ogni calotta $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^\delta, \delta)$ di un $S_{n,q}$, con δ a priori vincolato soltanto alle limitazioni $0 \leq \delta \leq n-1$, è tale che δ verifica di fatto alle limitazioni $(n-1)/2 \leq \delta \leq n-1$. La calotta risulta, per ogni δ soddisfacente alle limitazioni $(n-1)/2 < \delta \leq n-1$, un cono quadrico di tipo iperbolico con vertice un $S_{2\delta-n}$; e, per $\delta = (n-1)/2$ (nel qual caso n deve essere dispari), una quadrica non specializzata di tipo iperbolico.*

Sussiste, più in generale, il seguente teorema, il quale contiene i precedenti.

TEOREMA III. – *In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $p \neq 2$, ogni $\mathcal{C}(k, \delta)$, dove k e δ sono a priori due qualunque numeri rispettivamente soddisfacenti alle limitazioni $Q_{n-1} \leq k < Q_n$ e $0 \leq \delta \leq n-1$, risulta necessariamente o uno dei quattro tipi di quadriche di cui si parla nelle proposizioni 1°, 2°, 3°, 4°, oppure si compone di un iperpiano e di un S_t (con $0 \leq t < n-1$).*

6. In questo numero esporremo i risultati a cui siamo pervenuti nello studio delle $\mathcal{C}(k, \delta)$ di un $S_{n,q}$, con $p = 2$.

In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $p = 2$, sussistono le 1°, 2°, 3°, 4° del numero precedente. Si hanno inoltre le seguenti proposizioni, che seguono agevolmente da quanto detto al n. 3.

5° In un $S_{n,q}$, con $p = 2$, ogni cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$ -arco o un $(q+2)$ -arco di un piano, sghembo con l' S_{n-3} , è rispettivamente una $\mathcal{C}(Q_{n-1}, n-2)$ o una $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^{n-2}, n-2)$.

6° In un $S_{2r,q}$, con $p = 2$, l'insieme dei punti costituito dai punti di una quadrica non specializzata e dal suo centro⁽²²⁾, costituisce una $\mathcal{C}(Q_{2r-1} + 1, r-1)$.

7° In un $S_{n,q}$, con $p = 2$, l'insieme dei punti costituito dai punti di un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$ -arco di un piano sghembo con l' S_{n-3} , e dai punti di un S_t ($0 \leq t \leq n-3$) immerso nell' S_{n-2} proiezione dall' S_{n-3} del centro⁽²³⁾ del $(q+1)$ -arco è una $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q', n-2)$.

8° In un $S_{n,q}$, con $p = 2$, l'insieme dei punti costituito dai punti di un cono quadrico proiettante da un $S_{2\delta-n+1}$ ($(n-1)/2 \leq \delta \leq n-3$) vertice una quadrica non specializzata di un $S_{2(n-\delta-1)}$ sghembo con l' $S_{2\delta-n+1}$ vertice, e dai punti di un S_t ($0 \leq t \leq 2\delta-n+2$) immerso nell' $S_{2\delta-n+2}$ proiezione del centro della quadrica dall' $S_{2\delta-n+1}$ vertice, è una $\mathcal{C}(Q_{n+1} + q^t, \delta)$.

Ebbene, siamo riusciti a invertire le proposizioni precedenti, dimostrando anche in questo caso, due teoremi analoghi ai teoremi I e II del numero precedente, ed inoltre il seguente teorema, che, tra l'altro, contiene i due teoremi suddetti.

TEOREMA III'. - In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $p = 2$, ogni $\mathcal{C}(k, \delta)$, dove k e δ sono a priori due qualunque numeri rispettivamente soddisfacenti alle limitazioni $Q_{n-1} \leq k < Q_n$ e $0 \leq \delta \leq n-1$, deve necessariamente coincidere o con uno degli otto tipi di quadriche e di insiemi di punti di cui si parla nelle proposizioni 1°, 2°, 3°, 4°, 5°, 6°, 7°, 8°, oppure si compone di un iperpiano e di un S_t ($0 \leq t < n-1$).

7. Diamo ora qualche cenno sulle dimostrazioni dei teoremi enunciati nei due numeri precedenti.

In un $S_{n,q}$, con $n \geq 3$ e $p \geq 2$, si consideri una $\mathcal{C}(k, \delta)$ con $Q_{n-1} \leq k < Q_n$ e δ verificante a priori le limitazioni $0 \leq \delta \leq n-1$. Posto $k = Q_{n-1} + l$ (con $0 \leq l < q^n$), si consideri un \bar{S}_δ contenuto in $\mathcal{C}(k, \delta)$. Gli $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ sono in numero di $Q_{n-\delta-1}$; denoteremo con $l_0, l_1, l_2, \dots, l_\delta, l_{\delta+1}$ il numero di tali $S_{\delta+1}$ che incontrano ulteriormente $\mathcal{C}(k, \delta)$ rispettivamente in nessun punto, un punto, due punti distinti e quindi in una retta, \dots , δ punti indipendenti e quindi in un $S_{\delta-1}$, $\delta+1$ punti indipendenti e quindi in un S_δ . Sarà intanto $l_{\delta+1} = Q_{n-\delta-1} - \sum_{i=0}^{\delta} l_i$.

Uguagliando il numero dei punti di $\mathcal{C}(k, \delta)$ contenuti in ciascun $S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$, distinti dai punti di \bar{S}_δ , con il numero dei punti di $\mathcal{C}(k, \delta)$, distinti dai punti di \bar{S}_δ , si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + \left[Q_{n-\delta-1} - \sum_{i=0}^{\delta} l_i \right] q^\delta = k - Q_\delta,$$

(22) Per la definizione di centro di una quadrica non specializzata di un $S_{2r,q}$, con $p = 2$, cfr. n. 3.

(23) Un $(q+1)$ -arco di un $S_{2,q}$, con $p = 2$, individua, come è noto cfr. B. QVIST [6], un punto per cui passano tutte le tangenti al $(q+1)$ -arco. Chiamiamo *centro* detto punto.

da cui:

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{\delta} l_i q^{i-1} + q^{\delta} = l + q^{\delta} \left(\sum_{i=0}^{\delta} l_i \right).$$

L'equazione indeterminata (8), nelle incognite $l, l_0, \dots, l_{\delta}$, soggette all'ovvia condizione di essere interi non negativi, ammette, come si dimostra facilmente, le seguenti soluzioni, ed esse soltanto:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} l = 0, & l_0 = 1, \quad l_i = 0, & (i = 1, 2, \dots, \delta) \\ l = 1, & l_0 = 0, \quad l_1 = 1, \quad l_i = 0, & (i = 2, \dots, \delta) \\ l = q, & l_0 = l_1 = 0, \quad l_2 = 1, \quad l_i = 0, & (i = 3, \dots, \delta) \\ \dots & \dots & \dots \\ l = q^t, & l_0 = l_1 = \dots = l_t = 0, \quad l_{t+1} = 1, \quad l_i = 0, & (i = t+2, \dots, \delta) \\ \dots & \dots & \dots \\ l = q^{\delta-1}, & l_0 = l_1 = \dots = l_{\delta-1} = 0, \quad l_{\delta} = 1 \\ l = q^{\delta}, & l_0 = l_1 = \dots = l_{\delta} = 0. \end{array} \right.$$

Ne segue che k deve essere del tipo: $k = Q_{n-1}$, oppure $k = Q_{n-1} + q^t$ (con $0 \leq t \leq \delta$). Dunque lo studio delle $\mathcal{C}(Q_{n-1}, \delta)$ e $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ (con $0 \leq t \leq \delta$) equivale allo studio delle varie $\mathcal{C}(k, \delta)$ con $Q_{n-1} \leq k \leq Q_n$.

Prendiamo in esame una $\mathcal{C}(Q_{n-1}, \delta)$. Dalla prima delle (9), unica soluzione della (8) avente $l = 0$, segue che, comunque si consideri un \bar{S}_{δ} di $\mathcal{C}(Q_{n-1}, \delta)$, tra i $Q_{n-\delta-1} S_{\delta+1} \supset \bar{S}_{\delta}$, ve ne è uno che non interseca ulteriormente $\mathcal{C}(Q_{n-1}, \delta)$, mentre tutti gli altri intersecano ulteriormente $\mathcal{C}(Q_{n-1}, \delta)$ ciascuno in un S_{δ} . In base a questa proprietà, con argomentazioni diverse nei due casi $p \neq 2$ e $p = 2$, si dimostra che la $\mathcal{C}(Q_{n-1}, \delta)$ risulta necessariamente:

o una quadrica non specializzata, se n è pari,

o un cono quadrico con vertice un $S_{2\delta-n+1}$, ($n/2 - 1 < \delta \leq n-1$),

o, se $p = 2$, un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+1)$ -arco di un piano sghebo con l' S_{n-3} .

Prendiamo ora in esame una $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^{\delta}, \delta)$. Dall'ultima delle (9), unica soluzione della (8) avente $l = q^{\delta}$, segue che, comunque si consideri un \bar{S}_{δ} di $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^{\delta}, \delta)$ i $Q_{n-\delta-1} S_{\delta+1} \supset \bar{S}_{\delta}$ incontrano ciascuno ulteriormente $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^{\delta}, \delta)$ in un S_{δ} . In base a questa proprietà, con argomentazioni diverse nei due casi $p \neq 2$ e $p = 2$, si dimostra che la $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^{\delta}, \delta)$ risulta necessariamente:

o una quadrica non specializzata di tipo iperbolico, se n è dispari,

o un cono quadrico di tipo iperbolico avente come spazio vertice un $S_{2\delta-n} ((n-1)/2 < \delta \leq n-1)$,

o, se $p = 2$ e $\delta = n-2$, un cono proiettante da un S_{n-3} un $(q+2)$ -arco di un piano, sghebo con l' S_{n-3} .

Rimangono da esaminare le $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ *con* $0 \leq t < \delta$. Per una tale $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^t, \delta)$, dalla $(t+2)$ -esima delle (9), unica soluzione della (8) che abbia $l = q^t$, segue che, comunque si consideri un \bar{S}_δ di $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^t, \delta)$, tra i $Q_{n-\delta-1} S_{\delta+1} \supset \bar{S}_\delta$ ve ne è uno che interseca ulteriormente $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ in un S_t , tutti gli altri intersecano ulteriormente $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ ciascuno in un S_δ . In base a questa proprietà si dimostra che: per $\delta = n-1$ la $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ risulta costituita da un iperpiano e da un S_t ; per $\delta < n-1$ una tale $\mathcal{C}(Q_{n-1} + q^t, \delta)$ non può esistere, se $p \neq 2$; risulta invece uno degli insiemi di punti di cui si parla nelle proposizioni 6°, 7°, 8° al n. 6, se $p = 2$.

Geometria. - *Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione.* Nota III (*) di DAVID KIRBY, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

§ III. LE VARIE PROIEZIONI DI UN RAMO ALGEBROIDE.

6. Consideriamo una proiezione di uno spazio affine, A_N , da un punto P (il quale può eventualmente giacere nell'iperpiano all'infinito) su di un iperpiano proprio, L, contenente l'origine, O, delle coordinate (y_1, y_2, \dots, y_N) .

Assumendo come iperpiano L quello di equazione $\sum_{i=1}^N l_i y_i = 0$ e come punto

P quello di coordinate omogenee $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N)$, ove $\sum_{i=1}^N l_i \gamma_i = 1$, sicché sarà $\gamma_r \neq 0$ per qualche intero $r \neq 0$, si possono scegliere in L coordinate $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{N-1})$ con origine O, in modo che le equazioni della proiezione risultino

$$(7) \quad \begin{cases} x'_i = \frac{\gamma_r y_i - \gamma_i y_r}{1 - \gamma_0 \sum_{j=1}^N l_j y_j} & (i = 1, 2, \dots, r-1) \\ x'_i = \frac{\gamma_r y_{i+1} - \gamma_{i+1} y_r}{1 - \gamma_0 \sum_{j=1}^N l_j y_j} & (i = r, r+1, \dots, N-1). \end{cases}$$

Basta inoltre applicare la trasformazione, regolare in O, di equazioni

$$x_j = x'_i \left\{ \gamma_r + \gamma_0 \sum_{j=1}^{r-1} l_j x'_j + \gamma_0 \sum_{j=r+1}^N l_j x'_{j-1} \right\}^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

(*) Continuazione delle Note I e II pubblicate alle pp. 179 e 325 di questi « Rendiconti ».

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

per ottenere le equazioni della proiezione nella forma

$$(8) \quad \begin{cases} x_i = \frac{\gamma_r y_i - \gamma_i y_r}{\gamma_r - \gamma_0 y_r} & (i = 1, 2, \dots, r-1) \\ x_i = \frac{\gamma_r y_{i+1} - \gamma_{i+1} y_r}{\gamma_r - \gamma_0 y_r} & (i = r, r+1, \dots, N-1). \end{cases}$$

Pertanto, se il ramo Γ rappresentato dalle equazioni

$$(9) \quad y_i = P_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

viene proiettato da P su di L , il ramo ottenuto genera l'anello $K\{Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_{N-1}(t)\}$, ove

$$(10) \quad \begin{cases} Q_i(t) = \frac{\gamma_r P_i(t) - \gamma_i P_r(t)}{\gamma_r - \gamma_0 P_r(t)} & (i = 1, 2, \dots, r-1) \\ Q_i(t) = \frac{\gamma_r P_{i+1}(t) - \gamma_{i+1} P_r(t)}{\gamma_r - \gamma_0 P_r(t)} & (i = r, r+1, \dots, N-1); \end{cases}$$

e questo risulta evidentemente indipendente dall'iperpiano L . Diremo che il ramo Γ' , rappresentato dalle equazioni

$$(11) \quad x_i = Q_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N-1),$$

è una *proiezione* del ramo Γ ; ciò basterà ai nostri fini, perché considereremo soltanto invarianti rispetto all'equivalenza regolare.

Non è ovvio se l'anello $K\{Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_{N-1}(t)\}$ risulti o meno unitario. Però si dimostra che esistono al massimo ∞^2 centri P di proiezione per i quali non accade ciò. Quel massimo viene raggiunto quando Γ giace in un piano; ma, in base a considerazioni geometriche, sembrerebbe che, se un tale centro P esistesse, Γ sarebbe particolare. Nel seguito considereremo soltanto quelle proiezioni per le quali $K\{Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_{N-1}(t)\}$ risulta unitario.

Per brevità, poniamo

$$H(t) = K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}, \text{ e } H'(t) = K\{Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_{N-1}(t)\},$$

ove valgano le (10). Segue dalle (9) e (11) che Γ genera $H(t)$ e Γ' genera $H'(t)$; inoltre, dalle (10) si ha che $H(t) \supseteq H'(t)$, ed anche $*H(t) \supseteq *H'(t)$. Tenuto conto dal Lemma I, si vede che:

Γ e Γ' risultano regolarmente equivalenti se, e soltanto se, $W(H) = W(H')$; Γ e Γ' risultano canonicamente equivalenti se, e soltanto se, $W(*H) = W(*H')$.

Usando il Teor. VII, si vede che l'ultimo risultato equivale al seguente:

Γ e Γ' risultano canonicamente equivalenti se, e soltanto se, essi hanno la stessa successione di molteplicità.

Ora, se $W(H) \neq W(H')$, e quindi $W(H) \supset W(H')$, ne segue che:

Il primo elemento di $W(H)$ che non sia un elemento di $W(H')$ risulta sempre un carattere base di Γ .

Sia χ il suddetto primo elemento, e sia χ_r il primo carattere base di Γ che non appartenga a $W(H')$. Allora $H'(t)$ contiene evidentemente i primi $r-1$ elementi di una base di $H(t)$; quindi $H(t) \equiv H'(t) \pmod{t^r}$. Ne segue che $\chi = \chi_r$, onde i primi $r-1$ caratteri base di Γ e Γ' coincidono.

In pari modo si ottiene che:

*Se $W(*H) \neq W(*H')$, il primo elemento di $W(*H)$ che non sia un elemento di $W(*H')$ risulta un carattere base canonico, $*\chi_s$, di Γ . Inoltre $*H(t) \equiv *H'(t) \pmod{t^{k_s}}$, ed i primi $s-1$ caratteri base canonici di Γ e Γ' coincidono.*

7. Proponiamoci di trovare gli insiemi dei centri P di proiezione associati, come alla fine del n. 6, al carattere base χ_r ed al carattere base canonico $*\chi_s$. Considereremo anzitutto soltanto gli anelli $H(t)$ e $H'(t)$, e così soltanto il carattere base χ_r ; per il nostro scopo, sceglieremo opportunamente le coordinate in A_N , poggiando sul seguente lemma che si dimostra facilmente con ragionamento per assurdo.

LEMMA II. - *Si possono scegliere in A_N coordinate tali che Γ sia rappresentato dalle*

$$y_i = R'_i(t) + R_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

ove $O\{R_j(t)\} = \chi_j$ ($j = 1, 2, \dots, l$), $R'_i(t) = R_j(t) = 0$ ($j = l+1, l+2, \dots, N$), $R'_i(t) \in K\{R_1(t), R_2(t), \dots, R_{i-1}(t)\}$ ($i = 2, 3, \dots, l$), $R'_i(t) \in K\{R_1(t), R_2(t), \dots, R_l(t)\}$ ($i = l+1, l+2, \dots, N$), e $K\{R_1(t), R_2(t), \dots, R_{i-1}(t), R'_i(t), \dots, R'_N(t)\}$ non contenga alcun elemento di ordine χ_i ($i = 1, 2, \dots, l$), $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l$ essendo i caratteri base di Γ .

Fatta tale scelta delle coordinate (y_1, y_2, \dots, y_N) designeremo con L_i lo spazio i -dimensionale, contenente l'origine O , di equazioni $y_{i+1} = y_{i+2} = \dots = y_N = 0$ ($i = 0, 1, \dots, l$). Abbiamo subito il seguente significato geometrico degli spazi L_0, L_1, \dots, L_l ; diremo ch'essi costituiscono un nido in quanto ciascuno di essi appartiene al successivo.

L_i è l'intersezione degli iperpiani tangenti nel punto O alle ipersuperficie (per le quali O sia semplice) aventi con Γ in O molteplicità d'intersezione maggiore di χ_i , per $i = 0, 1, \dots, l$, ove $\chi_0 = 0$; come pure alle ipersuperficie per le quali la suddetta molteplicità non è inferiore a χ_{i+1} , ove $\chi_{l+1} = \infty$ ($i = 0, 1, \dots, l$).

Usando le precedenti notazioni si dimostra con argomento algebrico diretto, tuttavia piuttosto lungo, il

TEOREMA VIII. - *Se P giace in L_r , ma non in L_{r-1} , il primo elemento del semigruppò $W(H)$ di Γ , che non sia un elemento del semigruppò $W(H')$ relativo alla proiezione Γ' di Γ dal punto P , uguaglia χ_r ($r = 1, 2, \dots, l$). Inoltre, se P giace fuori di L_l , Γ e Γ' risultano regolarmente equivalenti.*

È chiaro, in base ai significati geometrici testé ottenuti, relativi al nido di spazi L_0, L_1, \dots, L_l , che quest'ultimo risulta invariante rispetto alle omografie di A_N . Chiameremo tale nido il nido di proiezione del ramo Γ .

Consideriamo una trasformazione T di A_N in sé avente O come punto fisso, in modo che T sia regolare nell'intorno di O . Si può rappresentare T nella forma

$$y'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} y_j + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

ove i puntini stanno per termini d'ordine maggiore di uno, e $|a_{ij}| \neq 0$. Designamo con $L(T)$ l'affinità di equazioni

$$y'_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} y_j \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

che chiameremo *la parte lineare di T* . Si vede subito che T si può scrivere come il prodotto di $L(T)$ per una trasformazione regolare avente come parte lineare precisamente l'identità. Pertanto, tenuto conto del Lemma II, oppure del risultato ad esso successivo, si ottiene il

TEOREMA IX. — *Se T trasforma Γ nel ramo $\bar{\Gamma}$, $L(T)$ trasforma il nido di proiezione di Γ nel nido di proiezione di $\bar{\Gamma}$.*

Segue anche dal Lemma II che, se P non giace nello spazio L_r ($0 \leq r \leq l$), e se L'_s denota la proiezione dello spazio L_s ($0 \leq s \leq r$), allora L'_0, L'_1, \dots, L'_r risultano i primi r elementi del nido di proiezione del ramo Γ' , ottenuto per proiezione del ramo Γ dal punto P .

Facendo uso di questo risultato e delle osservazioni fatte verso la fine del n. 6, si dimostra il

TEOREMA X. — *L_0, L_1, \dots, L_l sia il nido di proiezione del ramo Γ in A_N . Preso uno spazio m -dimensionale S_m che non contenga L_0 , Γ' denoti la proiezione di Γ da S_m su di uno spazio $(N - m - 1)$ -dimensionale, sghebo rispetto ad S_m e contenente L_0 . Se S_m incontra L_r , ma non L_{r-1} , allora χ_r — ossia l' r -esimo carattere base di Γ — è il primo elemento del semigruppato di Γ che non risulti un elemento del semigruppato di Γ' . Inoltre, se S_m non incontra L_l , Γ e Γ' risultano regolarmente equivalenti.*

Si vede senz'altro che, con le notazioni del Teor. X, i caratteri di Γ' che sono minori di χ_r risultano precisamente gli stessi dei caratteri di Γ inferiori a χ_r .

8. Considereremo da ultimo come si alteri la chiusura canonica di un anello, quando un suo ramo generatore venga proiettato. Otterremo così risultati analoghi alla maggior parte di quelli del n. 7.

Si può dimostrare il seguente lemma, affine al Lemma II; la relativa dimostrazione è simile a quella del Lemma II, ma un poco più complessa.

LEMMA III. — *Si possono scegliere le coordinate in A_N in guisa che Γ sia rappresentato dalle*

$$y = \bar{R}'_i(t) + \bar{R}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

ove $O \{ \bar{R}_j(t) \} = * \chi_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $\bar{R}'_1(t) = \bar{R}_j(t) = 0$ ($j = n+1, n+2, \dots, N$), $\bar{R}'_i(t) \in *K \{ \bar{R}_1(t), \bar{R}_2(t), \dots, \bar{R}_{i-1}(t) \}$ ($i = 2, 3, \dots, n$), $\bar{R}'_i(t) \in *K \{ \bar{R}_1(t), \bar{R}_2(t), \dots, \bar{R}_n(t) \}$ ($i = n+1, n+2, \dots, N$), ed inoltre $*K \{ \bar{R}_1(t), \bar{R}_2(t), \dots$

$\dots, \bar{R}_{i-1}(t), \bar{R}'_i(t), \dots, \bar{R}'_N(t)\}$ non contenga alcun elemento avente ordine $^*\chi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), dove $^*\chi_1, ^*\chi_2, \dots, ^*\chi_n$ siano i caratteri base canonici di Γ .

Si può anche dimostrare un teorema analogo al Teor. VIII; ma una sua dimostrazione diretta riuscirebbe molto complicata. Premettiamo quindi qualche lemma.

LEMMA IV. - Se $P(t)$ è un elemento di $^*K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}$ avente ordine zero, si ha

$$^*K\{P_1(t)P(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\} = ^*K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}.$$

Applicando questo lemma N volte, si vede che:

$$^*K\{P_1(t)P(t), P_2(t)P(t), \dots, P_N(t)P(t)\} = ^*K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}.$$

Inoltre il lemma è ancora vero quando consideriamo l'anello $^*K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\} \bmod t^s$. Possiamo tradurre questi risultati in termini geometrici; a questo scopo, presi due punti P', P'' tali che la retta $P'P''$ contenga l'origine O del ramo Γ , siano rispettivamente Γ', Γ'' le proiezioni di Γ dai punti P', P'' . Se $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ generano rispettivamente gli anelli $H(t), H'(t), H''(t)$, abbiamo che:

Se s è il minimo elemento di $W(^*H)$ diverso da ogni elemento di $W(^*H')$, allora s risulta il minimo elemento di $W(^*H)$ diverso da ogni elemento di $W(^*H'')$. Inoltre, se Γ e Γ' risultano canonicamente equivalenti, Γ e Γ'' sono altresì canonicamente equivalenti.

Si prova inoltre il

LEMMA V. - Se $P(t)$ è un elemento di $^*K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}$ d'ordine positivo, si ha che

$$^*K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\} \supseteq ^*K\{P_1(t) - \alpha P(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\},$$

ove α denoti un qualsiasi elemento di K , ed inoltre

$$^*K\{P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\} \supset ^*K\{P_1(t) - \alpha P(t), P_2(t), \dots, P_N(t)\}$$

per al più un elemento α di K .

Possiamo estendere questo risultato in modo del tutto analogo all'estensione del Lemma IV. Il Lemma V fornisce inoltre una proprietà geometrica relativa alle proiezioni di un ramo. Con le notazioni successive al Lemma IV, togliamo ora la limitazione che la retta $P'P''$ debba contenere il punto O . Supponiamo che $\bar{P} (\neq O)$ giaccia sulla retta $P'P''$ e designiamo con $\bar{H}(t)$ l'anello generato dalla proiezione, $\bar{\Gamma}$, del ramo Γ dal punto \bar{P} . Possiamo dimostrare che:

Se s è il minimo elemento di $W(^*H)$ che non sia contenuto in uno di $W(^*H'), W(^*H'')$, allora, per al più una posizione di \bar{P} sulla retta $P'P''$, gli elementi di $W(^*H)$ minori di s non risultano elementi di $W(^*\bar{H})$. Inoltre se $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$ sono fra loro canonicamente equivalenti, Γ e $\bar{\Gamma}$ non risultano canonicamente equivalenti per una posizione al più del punto \bar{P} .

Consideriamo la proiezione Γ' del ramo Γ (di A_N) dal punto P , ove Γ e Γ' generino rispettivamente $H(t)$ e $H'(t)$. È chiaro che esiste un nido di

varietà $*L_1, *L_2, \dots, *L_n$, tale che $*L_r \supset *L_{r-1}$, che $*\chi_r$ sia il primo elemento di $W(*H)$ che non risulti un elemento di $W(*H')$ se, e soltanto se, P giace in $*L_r$ ma non in $*L_{r-1}$ ($r = 1, 2, \dots, n$), e che, se P non è un punto di $*L_n$, Γ e Γ' risultino fra loro canonicamente equivalenti. I numeri $*\chi_1, *\chi_2, \dots, *\chi_n$ (caratteri base canonici di Γ) vengono a comparire in base all'ultimo risultato del n. 6.

Il significato geometrico offerto dal Lemma IV implica che $*L_r$ risulti un cono di vertice O (origine di Γ). Dal significato geometrico del Lemma V segue che ogni retta, che non giaccia sulla varietà $*L_r$, incontra quest'ultima in al più un punto ($r = 1, 2, \dots, n$). Quindi $*L_0 \equiv O$ può venir aggiunto al nido $*L_1, *L_2, \dots, *L_n$ e ogni elemento del nido risulta uno spazio lineare.

Il nido formato dagli spazi $*L_0, *L_1, \dots, *L_n$ si dirà il *nido canonico di proiezione del ramo Γ* .

Col sistema di coordinate considerato nel Lemma III, si vede che il punto Y_r all'infinito della retta Oy_r risulta un punto di $*L_r$, ma non di $*L_{r-1}$ ($r = 1, 2, \dots, n$); inoltre, Y_r non giace nello spazio $*L_n$ ($r = n+1, n+2, \dots, N$). Pertanto $*L_r$ risulta lo spazio congiungente i punti O, Y_1, Y_2, \dots, Y_r ($r = 1, 2, \dots, n$), e così $*L_r$ ha la dimensione r ($r = 0, 1, \dots, n$).

Possiamo approfondire questo risultato in modo consimile a quello indicato nel n. 7, e dimostrare così il seguente teorema, analogo al Teor. X.

TEOREMA XI. — Sia $*L_0, *L_1, \dots, *L_n$ il nido canonico di proiezione del ramo Γ nello spazio A_N . Sia S_m un qualunque spazio m -dimensionale che non contenga il punto $*L_0$ (origine di Γ), e Γ' denoti la proiezione di Γ da S_m su di uno spazio $(N - m - 1)$ -dimensionale, sghembo con S_m , e contenente $*L_0$. Se S_m incontra $*L_r$, ma non $*L_{r-1}$, allora $*\chi_r$ (r -esimo carattere base canonico di Γ) risulta il primo elemento del semigruppò della chiusura canonica di Γ che non sia un elemento del semigruppò della chiusura canonica di Γ' . Inoltre, se S_m non incontra $*L_n$, Γ e Γ' risultano canonicamente equivalenti.

Rileviamo infine che $*L_1$ ed L_1 coincidono con la tangente al ramo Γ e che $*L_2$ ed L_2 coincidono fra loro. Però l'esempio seguente, nello spazio a quattro dimensioni, mostra che gli altri spazi associati al ramo possono differire fra loro, nonché dagli spazi osculatori. Assunte le equazioni di Γ nella forma

$$\Gamma: \quad X = t^6, \quad Y = t^{12} + t^{14}, \quad Z = t^{12} + t^{16} + t^{17}, \quad T = t^{12} + 2t^{16},$$

si vede infatti dai Lemmi II e III che risulta:

$$\begin{array}{ll} L_1: & Y = Z = T = 0, & *L_1: & Y = Z = T = 0, \\ L_2: & Z = T = 0, & *L_2: & Z = T = 0, \\ L_3: & 2Z = T, & *L_3: & T = 0. \\ L_4: & \text{lo spazio ambiente.} \end{array}$$

Inoltre, gli spazi osculatori Π_1, Π_2, Π_3 di Γ in O hanno rispettivamente le equazioni:

$$\Pi_1: \quad Y = Z = T = 0, \quad \Pi_2: \quad Y = Z = T = 0, \quad \Pi_3: \quad Z = T = 0.$$

Geometria. — *Sulle superficie di S_4 aventi cinque iperpiani di Blaschke indipendenti.* Nota di ORAZIO SORACE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. Un iperpiano dello spazio proiettivo S_4 , che sia secato dai piani tangenti di una superficie F secondo rette di una congruenza W (a falde focali distinte e non degeneri), è stato denominato da B. Segre ⁽¹⁾ S_3 di Blaschke della F . In quel lavoro l'A. fa vedere che una superficie F di S_4 può avere soltanto 0, 1, 2, 3, 4 o 5 S_3 di Blaschke, nei quali casi tali spazi sono fra loro linearmente indipendenti, oppure essa ne ammette ∞^1 dati dagli iperpiani tangenti di un cono quadrico due volte specializzato.

Nel caso in cui la superficie F ammette cinque S_3 di Blaschke linearmente indipendenti, assunti tali S_3 uno come iperpiano « all'infinito » e gli altri quattro come iperpiani coordinati $z^i = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), le coordinate di un punto corrente sulla F possono venir scritte nella forma

$$(1) \quad z^i = e^{\int U_i du + \int V_i dv} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

essendo U_i, V_i funzioni rispettivamente della variabile u e della variabile v da determinarsi come segue e tali che $U_i V_i \neq 0$.

Se

$$(2) \quad z_{uv} = P z_v + Q z_u$$

è l'equazione di Laplace cui soddisfano le (1), con

$$(3) \quad PQ \neq 0,$$

dovrà essere

$$(4) \quad \frac{P}{U_i} + \frac{Q}{V_i} = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Queste determinano P e Q in funzione delle U_i, V_i , e sono tra loro compatibili se ciascuna delle due matrici

$$\left(\frac{1}{U}, \frac{1}{V} \right), \quad \left(\frac{1}{U}, \frac{1}{V}, 1 \right)$$

ha caratteristica due. Le funzioni U_i, V_i dovranno inoltre soddisfare alla disuguaglianza

$$(5) \quad [U, V, U^2 + U', V^2 + V'] \neq 0,$$

(*) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) B. SEGRE, *Intorno ad un problema di Wilhelm Blaschke*, « Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg », 20, 1/2 (1955), 28-40.

dove il primo membro denota un determinante di ovvio significato, ed alla uguaglianza

$$(6) \quad [U, V, U^2 + U', U^3 + 3UU' + U''] [U, V, V^2 + V', V^3 + 3VV' + V''] + \\ PQ [U, V, U^2 + U', V^2 + V'] = 0.$$

Pesto

$$S = \frac{[U, V, U^2 + U', U^3 + 3UU' + U'']}{[U, V, U^2 + U', V^2 + V']},$$

le equazioni differenziali delle linee asintotiche sulle falde focali delle congruenze segate dai piani tangenti di F sull' S_3 « all'infinito » e sugli S_3 coordinati $z^i = 0$ sono rispettivamente

$$S du^2 + P dv^2 = 0$$

$$S du^2 + (P - U_i) dv^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Nel citato lavoro di B. Segre viene inoltre determinata in modo esplicito (p. 39) una classe di superficie F del tipo suddetto, ottenibili con l'assumere

$$U_i = a_i, \quad V_i = b_i,$$

dove le a_i, b_i sono costanti scelte opportunamente.

In questo lavoro il problema inerente a quel tipo viene risolto esplicitamente in tutta la sua generalità.

2. Se supponiamo

$$(7) \quad U_1 V_2 - U_2 V_1 \neq 0$$

le prime due delle (4) determinano P e Q in funzione di U_1, U_2, V_1, V_2 . Giacché la matrice $\left(\frac{1}{U}, \frac{1}{V}, 1\right)$ deve avere caratteristica due, sarà

$$\left(\frac{1}{U_i} - \frac{1}{U_1}\right) \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right) = \left(\frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1}\right) \left(\frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_1}\right) \quad (i = 3, 4);$$

poiché, in forza della (5), le U o le V non possono risultare tutte eguali fra loro, debbono quindi esservi due costanti h_3, h_4 tali che

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{U_i} - \frac{1}{U_1} = h_i \left(\frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_1} \right) \\ \frac{1}{V_i} - \frac{1}{V_1} = h_i \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \end{cases} \quad (i = 3, 4).$$

Posto

$$(9) \quad \begin{aligned} X &= \frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_1}, & \xi &= \frac{1}{U_1} \\ Y &= \frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}, & \eta &= \frac{1}{V_1}, \end{aligned}$$

per le (8) avremo

$$(10) \quad U_i = \frac{1}{h_i X + \xi} \quad , \quad V_i = \frac{1}{h_i Y + \eta} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dove si legga $h_1 = 0, h_2 = 1$.

Le funzioni $X(u), \xi(u), Y(v), \eta(v)$ e le costanti h_i dovranno soddisfare la (5) e la (6), con

$$P = \frac{Y}{\xi Y - \eta X} \quad , \quad Q = -\frac{X}{\xi Y - \eta X}$$

e le U_i, V_i date dalle (10). Inoltre per la (3) e le (9) deve essere

$$(11) \quad XY \xi \eta \neq 0$$

e per la (7)

$$(12) \quad \xi Y - \eta X \neq 0$$

Chiamando W il determinante di Vandermonde delle h_i e posto

$$H = \prod_i (h_i X + \xi) \quad , \quad K = \prod_i (h_i Y + \eta)$$

si trova che è

$$[U, V, U^2 + U', V^2 + V'] = -WH^{-2}K^{-2}(\xi Y - \eta X)^4(X + \xi X' - \xi' X)(Y + \eta Y' - \eta' Y),$$

onde per la (5) dovrà essere $W \neq 0$, e cioè le h_i dovranno risultare distinte, ed ancora:

$$(13) \quad (X + \xi X' - \xi' X)(Y + \eta Y' - \eta' Y) \neq 0.$$

Si trova poi che è

$$[U, V, U^2 + U', U^3 + 3UU' + U''] = WH^{-3}K^{-1}(\xi Y - \eta X)^3(X + \xi X' - \xi' X)^2[X + 2(\xi X' - \xi' X)],$$

$$[U, V, V^2 + V', V^3 + 3VV' + V''] = WH^{-1}K^{-3}(\xi Y - \eta X)^3(Y + \eta Y' - \eta' Y)^2[Y + 2(\eta Y' - \eta' Y)],$$

onde la (6) ci dà

$$[X + 2(\xi X' - \xi' X)][Y + 2(\eta Y' - \eta' Y)] - XY = 0.$$

Se l, m sono due costanti tali che

$$(14) \quad lm = 1,$$

tenendo presente la (11), potremo dedurre

$$1 + 2 \frac{\xi X' - \xi' X}{X} = l \quad , \quad 1 + 2 \frac{\eta Y' - \eta' Y}{Y} = m$$

e cioè

$$(15) \quad \left(\frac{\xi}{X}\right)' = \frac{\alpha}{X}, \quad \left(\frac{\eta}{Y}\right)' = \frac{\beta}{Y},$$

dove è stato posto $\alpha = \frac{1-l}{2}$, $\beta = \frac{1-m}{2}$, per cui la (14) diventa

$$(16) \quad \alpha + \beta = 2\alpha\beta.$$

Dalla (13) si deduce che dovrà essere $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$. Inoltre, nelle (10), per le h_i si potranno assumere quattro costanti distinte qualsiansi.

3. Esaminiamo dapprima il caso $\alpha = \beta = 0$. In tale ipotesi è $\xi = \gamma X$, $\eta = \delta Y$, γ e δ essendo due costanti arbitrarie, per la (12) distinte fra loro. Inoltre risulta

$$U_i = \frac{1}{h_i + \gamma} \frac{1}{X}, \quad V_i = \frac{1}{h_i + \delta} \frac{1}{Y},$$

onde, denotando U e V due arbitrarie funzioni rispettivamente della u e della v , tali che $U'V' \neq 0$, una delle classi di superficie cercate sarà rappresentata dalle equazioni

$$z^i = U^{\frac{1}{h_i + \gamma}} V^{\frac{1}{h_i + \delta}}$$

essendo γ e δ costanti arbitrarie distinte e le h_i costanti arbitrarie diverse tra loro e da $-\gamma$, $-\delta$. Le superficie trovate in ⁽¹⁾, e già citate, costituiscono appunto questa classe.

Essendo

$$P = \frac{U'}{(\gamma - \delta)U}, \quad Q = -\frac{V'}{(\gamma - \delta)V},$$

le linee $u, v = \text{cost.}$ definiscono una rete ad invarianti uguali (non nulli), dati dal prodotto di una funzione della sola u per una funzione della sola v . Tali linee risultano curve W di Klein-Lie ⁽²⁾.

Posto

$$a = \sqrt{\prod_r (h_r + \gamma)}, \quad b = \sqrt{\prod_r (h_r + \delta)}$$

$$a_i = \sqrt{\prod_r^{(i)} (h_r + \gamma)}, \quad b_i = \sqrt{\prod_r^{(i)} (h_r + \delta)}$$

(negli ultimi due prodotti manca il fattore corrispondente all'indice i), le asintotiche sulle falde focali delle congruenze secate dai piani tangenti di F sull' S_3 « all'infinito » e sugli S_3 coordinati $z^i = 0$ sono rispettivamente

$$U^a V^{\pm b} = \text{cost.}, \quad U^{a_i} V^{\pm b_i} = \text{cost.}$$

(2) F. KLEIN-S. LIE, *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*, « Comptes Rendus Ac. Sc. », 70 (1870), 1222-23, 1275-79.

Con un cambiamento delle variabili indipendenti, le superficie di questa classe potranno rappresentarsi con le equazioni

$$z^i = u^{\frac{1}{h_i + \gamma}} v^{\frac{1}{h_i + \delta}}.$$

4. Consideriamo ora il caso generale $\alpha\beta \neq 0$, che è il solo che rimanga, in quanto se vale una delle $\alpha = 0$, $\beta = 0$ anche l'altra deve sussistere, in forza della (16). Se U e V denotano due funzioni arbitrarie rispettivamente della sola u e della sola v , tali che $U'V' \neq 0$, si soddisfa nella maniera più generale alle (15) prendendo

$$X = \frac{\alpha}{U'} \quad , \quad Y = \frac{\beta}{V'} \quad , \quad \xi = \frac{\alpha U}{U'} \quad , \quad \eta = \frac{\beta V}{V'}.$$

Le superficie richieste saranno rappresentate dalle

$$z^i = (h_i + U)^\lambda (h_i + V)^\mu \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

dove le h_i sono quattro costanti distinte arbitrarie, ed avendo posto $\lambda = \alpha^{-1}$, $\mu = \beta^{-1}$; le costanti non nulle λ e μ dovranno essere diverse da uno e soddisfare alla (16), che così diviene

$$\lambda + \mu = 2.$$

Con un opportuno cambiamento delle variabili indipendenti, ci si riduce alle

$$z^i = (h_i + u)^\lambda (h_i + v)^\mu \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

sicch 

$$P = \frac{\lambda}{u-v} \quad , \quad Q = -\frac{\mu}{u-v}$$

e l'equazione di Laplace (2) diventa l'equazione di Eulero $E(-\lambda, -\mu)$ ⁽³⁾ (p. 55).

Le equazioni differenziali delle asintotiche sulle falde focali delle congruenze secate dai piani tangenti di F sull' S_3 « all'infinito » e sugli S_3 coordinati $z^i = 0$ sono rispettivamente

$$\frac{du}{\sqrt{\prod_r (h_r + u)}} \pm \frac{dv}{\sqrt{\prod_r (h_r + v)}} = 0 \quad ; \quad \frac{du}{\sqrt{\prod_r^{(i)} (h_r + u)}} \pm \frac{dv}{\sqrt{\prod_r^{(i)} (h_r + v)}} = 0$$

(negli ultimi due prodotti s'intende che manchi il fattore corrispondente all'indice i). La determinazione di tali asintotiche si effettua cos  mediante integrali ellittici.

(3) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, ecc., t. II (Paris, Gauthier Villars, 1915).

Magneto-idrodinamica. — *Su qualche effetto del secondo ordine nella magneto-idrodinamica.* Nota I di RENATO NARDINI, presentata (*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. INTRODUZIONE. — Nel corso di un recente studio sistematico sulla propagazione di fenomeni ondosi nella magneto-idrodinamica ⁽¹⁾, sono stati messi in evidenza, con un grado di generalità maggiore di quanto fosse stato fatto precedentemente ⁽²⁾, modi di propagazione che, in fluidi compressibili, di conducibilità elettrica così elevata da poter essere considerata infinita ⁽³⁾ e in presenza di un campo magnetico, manifestano una mutua influenza fra fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni che dipendono dalla comprimibilità del mezzo, in particolare fenomeni acustici.

Si è osservato, fra l'altro, che, se su un eventuale fronte d'onda (inteso come superficie di discontinuità per le derivate di ordine massimo che compaiono nelle equazioni del problema) è nulla la componente tangenziale H_t del campo magnetico, i valori possibili per la velocità di propagazione del detto fronte sono di tipo puramente magneto-idrodinamico e di tipo puramente acustico, mentre, per H_t diversa da zero, accanto a valori di tipo puramente magneto-idrodinamico, sono possibili valori che appaiono come forme di transizione fra i due tipi suddetti.

Nel presente lavoro in cui, sia pure in via approssimata e in un caso particolare, viene valutata quantitativamente la mutua influenza fra fenomeni magneto-idrodinamici ed onde acustiche di ampiezza finita, si profila (come è rilevato al n. 7) una conferma dei precedenti risultati qualitativi. A tale scopo, riferendosi ad un fluido compressibile e perfettamente conduttore, si tratta un fenomeno piano, riguardante cioè grandezze che dipendono dal tempo e da una sola coordinata cartesiana ortogonale, per esempio la z ; si ammette inoltre preesistente un campo magnetico primario costante H_0 parallelo all'asse z . Dopo aver introdotto le equazioni che reggono il fenomeno (n. 2), si riguardano come quantità del prim'ordine la concentrazione del fluido, le

(*) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) R. NARDINI, *Sui fronti d'onda nella magneto-idrodinamica*, « Riv. Mat. dell'Università di Parma », in corso di stampa nel vol. 6.

(2) Ci riferiamo ai lavori di N. HERLOFSON, *Magneto-hydrodynamic waves in a compressible fluid conductor*, « Nature », 165, 1950, 1020 21 e di H. C. VAN DE HULST, *Interstellar polarization and magneto-hydrodynamic waves*, « Problems of Cosmical Aerodynamics », Cap. VI e VII, Central Air Documents Office, 1951; tali lavori sono però limitati a fenomeni piani e a grandezze variabili sufficientemente piccole in modo da poter linearizzare le relative equazioni trascurando termini di grado superiore al primo nelle dette variabili.

(3) Ciò si verifica, per esempio, nel caso di gas molto rarefatti e fortemente ionizzati: a tale proposito ricorderemo che la conducibilità elettrica dei gas diffusi nelle regioni interstellari è valutata $10^7 \text{ ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ (si veda W. M. ELSASSER, *Dimensional Relations in Magneto-hydrodynamics*, « Phys. Rev. », 95, 1954, 1-5).

componenti della velocità delle particelle, le componenti del campo magnetico indotto e tutte le relative derivate che si presentano nelle dette equazioni. In prima approssimazione (cioè considerando trascurabili le quantità di ordine superiore al primo) si riscontra allora (n. 3) la presenza di un'onda acustica di ampiezza infinitesima e di un'onda magneto-idrodinamica, del tutto indipendenti fra loro; però se, applicando un metodo di successive approssimazioni, si prendono in considerazione anche le quantità del second'ordine, si riscontra (nn. 4 e 5) che il campo magnetico esercita sulle onde acustiche, qui di ampiezza finita, un'azione valutabile attraverso l'energia magnetica ed esprimibile mediante l'aggiunta, ai valori ottenuti in assenza del campo magnetico, di un termine che si propaga con velocità di tipo acustico c e di un termine che si propaga con velocità di tipo magneto-idrodinamico V ; nel caso quindi in cui è $V > c$, sul fronte d'onda $z = ct$ delle comuni onde sonore non è nulla generalmente la componente tangenziale del campo magnetico e perciò è da attendersi, in base ai risultati generali prima ricordati, che i fenomeni acustici siano modificati, anche nella velocità di propagazione, dalla presenza del campo magnetico: ciò si concreta appunto, per quanto ci è fornito in seconda approssimazione, in una specie di prolungamento dei fenomeni acustici fino al fronte d'onda $z = Vt$.

Si calcola poi (n. 6) l'effetto del second'ordine che la perturbazione acustica di ampiezza finita genera nei riguardi dei fenomeni magneto-idrodinamici e si rileva che, in ogni caso, la propagazione di tali fenomeni avviene con velocità magneto-idrodinamica V , anche se V è minore della velocità delle onde sonore: ciò è in accordo con il fatto che, in tale caso, sul fronte d'onda $z = Vt$ la componente tangenziale del campo magnetico è nulla e quindi non c'è da attendersi, almeno per quanto riguarda la velocità di propagazione, mutua influenza fra fenomeni acustici e fenomeni magneto-idrodinamici.

2. EQUAZIONI CHE RAPPRESENTANO IL FENOMENO. - È noto che, se un fluido di permeabilità magnetica costante μ e di conducibilità elettrica infinita si muove sotto l'azione di un campo magnetico \mathbf{H} , vale la relazione

$$\mathbf{E} = -\mu \mathbf{v} \wedge \mathbf{H},$$

dove \mathbf{E} è il campo elettrico e \mathbf{v} è la velocità delle particelle del mezzo. Allora le equazioni di Maxwell, nella prima delle quali si trascura la corrente di spostamento nei confronti della corrente di conduzione \mathbf{j} , diventano

$$(1) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } (\mathbf{v} \wedge \mathbf{H})$$

$$(3) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0.$$

Inoltre nell'equazione del moto alle forze meccaniche per unità di volume bisogna aggiungere il termine $\mu \mathbf{j} \wedge \mathbf{H}$ nel quale, tenendo presente la (1), si

può eliminare \mathbf{j} : la detta equazione allora diventa

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \{ \mu \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} - \operatorname{grad} p \},$$

dove ρ è la densità e p la pressione. Completano il quadro l'equazione di continuità

$$(5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

e l'equazione complementare

$$(6) \quad p = f(\rho).$$

Limitandoci, come si è detto nell'introduzione, al caso unidimensionale, supporremo che tutte le grandezze che compaiono nel problema dipendano solo dal tempo t e dall'unica coordinata cartesiana z . La (3) allora diventa

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

mentre proiettando la (2) sull'asse z si ha

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0;$$

la componente H_z del campo magnetico ha così valore costante e coincide perciò con il campo magnetico primario H_0 ; orientando opportunamente l'asse z , si potrà supporre $H_0 > 0$.

Proiettando poi la (2) sull'asse x o y si hanno le equazioni

$$(7) \quad \frac{\partial H_i}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v_i}{\partial z} - \frac{\partial v_z H_i}{\partial z} \quad (i = x, y).$$

Analogamente dalla (4) si ottengono le equazioni

$$(8) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} = \frac{\mu}{\rho} H_0 \frac{\partial H_i}{\partial z} \quad (i = x, y),$$

mentre proiettando la (4) sull'asse z si ricava

$$(9) \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = - \frac{\mu}{2\rho} \frac{\partial}{\partial z} (H_x^2 + H_y^2) - v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

La (5) equivale poi a

$$(10) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0.$$

Le (7), (8), (9) e (10), a cui si aggiunge la (6), costituiscono sette equazioni scalari, nelle sette incognite $H_x, H_y, v_x, v_y, v_z, p$ e ρ , che reggono il fenomeno ed hanno, come si vede un accentuato carattere di non linearità.

3. SOLUZIONE DI PRIMA APPROSSIMAZIONE. - Seguendo il procedimento mediante il quale, nello studio delle onde acustiche piane di ampiezza infinitesima, si linearizzano le equazioni della dinamica dei fluidi, introduciamo la condensazione s espressa da

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

dove ρ_0 è la densità media del fluido. Valendosi poi in base alla (6) della formula

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho},$$

sviluppando $dp/d\rho$ in serie di Taylor ed eseguendo l'integrazione si ottiene ⁽⁴⁾

$$(11) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f'(\rho_0) \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{1}{2} [-f'(\rho_0) + \rho_0 f''(\rho_0)] \frac{\partial s^2}{\partial z} + \dots;$$

qui ed in seguito i puntini indicano termini di terzo grado ed oltre nelle funzioni incognite e loro derivate. Posto inoltre ⁽⁵⁾

$$(12) \quad c^2 = f'(\rho_0) \quad \lambda^2 = \frac{1}{2} [f'(\rho_0) - \rho_0 f''(\rho_0)]$$

si ha

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = c^2 \frac{\partial s}{\partial z} - \lambda^2 \frac{\partial s^2}{\partial z} + \dots$$

D'altra parte si può ottenere lo sviluppo

$$(13) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} (1 - s + s^2 - \dots).$$

(4) È infatti

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\rho} f'(\rho) = f'(\rho_0) \frac{1}{\rho} + f''(\rho_0) \frac{\rho - \rho_0}{\rho} + \dots$$

inoltre, dato che si ha

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \log \frac{\rho}{\rho_0} = \log (1 + s) = s - \frac{s^2}{2} + \dots$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{(\rho - \rho_0)^n}{\rho} d\rho = \rho_0^n \int_0^s \frac{s^n}{1+s} ds = \rho_0^n \left(\frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+2}}{n+2} + \frac{s^{n+3}}{n+3} - \dots \right) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

si conclude con

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[f'(\rho_0) \left(s - \frac{s^2}{2} + \dots \right) + f''(\rho_0) \rho_0 \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} + \dots \right) + \dots \right],$$

da cui segue la formula (11) del testo.

(5) Nei casi concreti i secondi membri delle (12) sono certamente positivi.

Servendosi della (11) e della (13) e posto

$$(14) \quad W = \frac{\mu}{2} (H_x^2 + H_y^2),$$

dalla (9) e dalla (10) si ricava il sistema

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial v_z}{\partial t} + c^2 \frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial v_z^2}{\partial z} + \lambda^2 \frac{\partial s^2}{\partial z} \dots \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial s v_z}{\partial z}; \end{cases}$$

eliminando s dai termini lineari, ciò che si ottiene derivando la prima equazione rispetto al tempo t ed aggiungendo la seconda equazione moltiplicata per $-c^2$ e derivata rispetto alla coordinata z , si ha l'equazione

$$(16) \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_z^2}{\partial z \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 s v_z}{\partial z^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2 s^2}{\partial z \partial t} + \dots$$

Servendosi della (13), dalle (7) e dalle (8) si ricava invece il sistema

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_i}{\partial t} - H_0 \frac{\partial v_i}{\partial z} = -\frac{\partial v_z H_i}{\partial z} \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\mu}{\rho_0} H_0 \frac{\partial H_i}{\partial z} = -v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} - \frac{\mu}{\rho_0} H_0 \frac{\partial H_i}{\partial z} s + \dots \end{cases} \quad (i = x, y)$$

da cui, eliminando v_i nei termini lineari, con procedimento analogo a quello usato precedentemente, si ha l'equazione

$$(19) \quad \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 v_z H_i}{\partial z \partial t} - H_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho_0} H_0 s \frac{\partial H_i}{\partial z} \right) + \dots$$

dove si è posto

$$V^2 = \frac{\mu}{\rho_0} H_0^2,$$

essendo V la velocità di propagazione delle onde magneto-idrodinamiche di Alfvén in un mezzo di uguale permeabilità magnetica μ e di densità costante ρ_0 .

Trattando il caso di moti e di campo magnetico indotto sufficientemente piccoli in modo che si possano trascurare i termini di secondo ordine ed oltre, si hanno dalla (16) e dalla (18) le due equazioni lineari indipendenti

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} &= V^2 \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (i = x, y).$$

Supposte omogenee le condizioni iniziali

$$(19) \quad v_z(0, z) = \frac{\partial v_z(0, z)}{\partial t} = 0$$

$$(20) \quad H_i(0, z) = \frac{\partial H_i(0, z)}{\partial t} = 0 \quad (i = x, y),$$

e supposto al contorno

$$(21) \quad v_z(t, 0) = u(t), \quad H_i(t, 0) = h_i(t) \quad (i = x, y),$$

dove $u(t)$ e $h_i(t)$ sono funzioni assegnate, si hanno le soluzioni di prima approssimazione, contrassegnate dall'indice zero in alto,

$$(22) \quad v_z^{(0)} = u\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad [\text{con } u(\xi) \equiv 0 \text{ per } \xi < 0]$$

$$(23) \quad H_i^{(0)} = h_i\left(t - \frac{z}{V}\right) \quad [i = x, y; h_i(\xi) \equiv 0 \text{ per } \xi < 0].$$

Per semplificare la trattazione successiva supporremo che sia

$$(24) \quad h_x(0) = h_y(0) = u(0) = 0.$$

Dalla (22), introdotta nelle equazioni del sistema (15) linearizzate, si ricava ⁽⁶⁾

$$\frac{\partial s^{(0)}}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} u'\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad \frac{\partial s^{(0)}}{\partial t} = \frac{1}{c} u'\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

da cui, con la condizione iniziale $p(0, z) = p_0$ e quindi $s(0, z) = 0$, si ha

$$(25) \quad s^{(0)} = \frac{1}{c} u\left(t - \frac{z}{c}\right).$$

Introducendo infine la (23) nelle equazioni del sistema (17) linearizzate, si ottiene

$$\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial z} = \frac{1}{H_0} h_i'\left(t - \frac{z}{V}\right), \quad \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial t} = -\frac{\mu H_0}{\rho_0 V} h_i'\left(t - \frac{z}{V}\right) \quad (i = x, y)$$

da cui, tenendo presente la prima delle condizioni iniziali (19), si ha

$$(26) \quad v_i^{(0)} = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} h_i\left(t - \frac{z}{V}\right) \quad (i = x, y).$$

Tali valori, ricavati in prima approssimazione, e da considerarsi nulli quando l'argomento delle corrispondenti funzioni è negativo, rappresentano, per mezzo della (22) e della (25), la propagazione di un'onda longitudinale di tipo acustico avente velocità c e, per mezzo della (23) e della (26), la propagazione di un'onda trasversale di tipo magneto-idrodinamico avente velocità V ; risulta evidente che tali onde non interferiscono fra loro.

In una nota successiva esporremo un'analisi più approfondita del fenomeno.

(6) Con l'apice si intende indicare la derivata rispetto all'argomento.

Fisica matematica. — *Sul significato fisico della «teoria di relatività finale»*. Nota di GIUSEPPE ARCIDIACONO, presentata ^(*) dal Corrisp. L. FANTAPPIÈ.

1. PREMESSA. — È noto che nella fisica classica le equazioni di Maxwell non presentavano invarianza per il gruppo di Galileo Gl_{3+1}^{10} , ma per quello di Lorentz Lz_{3+1}^{10} . Poiché il gruppo di Lorentz si riduce per $c \rightarrow \infty$ a quello di Galileo, è stato necessario rendere tutte le leggi fisiche invarianti per il gruppo di Lorentz, cioè perfezionare la fisica classica costruendo la teoria di relatività ristretta.

D'altra parte, in recenti lavori ⁽¹⁾ il Fantappiè ha mostrato che a sua volta, il gruppo di Lorentz si può considerare come caso limite, per $R \rightarrow \infty$, del *gruppo finale* Fn_{3+1}^{10} , pervenendo al notevole risultato che, se rimaniamo con un gruppo a 10 parametri operante su un cronotopo a 4 dimensioni, quest'ultimo gruppo non è più caso limite di altri gruppi. Il gruppo finale è poi un gruppo semplice (cioè privo di sottogruppi invarianti), perché isomorfo al gruppo delle pseudorotazioni, con determinante $+1$, (Os_{4+1}^{10}) dello spazio euclideo a 5 dimensioni.

È quindi possibile perfezionare ulteriormente la teoria di relatività ristretta. Questa pura possibilità matematica riceve la sua giustificazione fisica dal fatto che *le equazioni del campo nucleare presentano invarianza proprio per il gruppo finale* (come vedremo al n. 2, ed in un successivo lavoro). Si apre quindi per la fisica il problema di sviluppare *una teoria di relatività finale* (i cui principi fondamentali sono stati stabiliti nei lavori ⁽¹⁾ del Fantappiè), la quale contenga come caso limite per $R \rightarrow \infty$, la teoria di relatività ristretta, e di rendere tutte le leggi fisiche invarianti per le trasformazioni del gruppo finale.

In questa Nota ci proponiamo di dare una semplice interpretazione fisica della teoria di relatività finale e di stabilire per esteso le trasformazioni del gruppo finale analoghe alle trasformazioni del gruppo di Lorentz. Dalle formule che stabiliremo si vedrà che mentre la relatività ristretta può considerarsi come la fisica delle *alte velocità*, la relatività finale sarà la fisica delle *grandi distanze* (nello spazio e nel tempo), nel senso che le correzioni che essa apporta alle leggi fisiche diventano apprezzabili quando entrano in giuoco distanze paragonabili alla costante R (raggio dell'Universo).

2. SIGNIFICATO FISICO DELLA TEORIA DI RELATIVITÀ FINALE. — Come ha stabilito il Fantappiè nelle Note citate ⁽¹⁾, la esigenza di un cronotopo che

(*) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) L. FANTAPPIÈ, *Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica*, «Rend. Acc. Lincei», vol. XII, fasc. 3, 285-290 (1952); *Su una nuova teoria di «relatività finale»*, «Rend. Acc. Lincei», ser. 8^a, vol. XVII, fasc. 5 (1954); *I fondamenti gruppi della fisica*, Memoria in corso di stampa nei «Rend. del Circolo Matematico di Palermo».

ammetta un gruppo di movimenti in sé a 10 parametri, porta per un noto teorema di geometria differenziale ⁽²⁾ a generalizzare il cronotopo di Minkowski (che è a curvatura nulla) in un cronotopo a curvatura costante.

Tale cronotopo può essere immaginato ⁽³⁾ come un iperboloide V_4 dello spazio euclideo S_5 , nel quale ogni spazio geodetico a tre dimensioni (del tipo $t = \text{cost}$) è finito e rappresentabile come mezza ipersfera a 3 dimensioni di S_4 .

Per comprendere esattamente il significato fisico della teoria di relatività finale, consideriamo un osservatore O di tale cronotopo curvo, e chiediamoci come appare a lui l'Universo. Evidentemente, in un dato istante, l'osservatore O vedrà di tale cronotopo solo una sezione spaziale, cioè mezza ipersfera a tre dimensioni, e tale sezione *la vedrà nella sua totalità*: difatti, mentre un osservatore posto sulla Terra ne vede solo una piccolissima parte, a causa della curvatura terrestre, nell'Universo accade esattamente il contrario, perché la luce di una generica stella, avendo (nel vuoto) per traiettoria una geodetica, riuscirà a superare la curvatura dell'Universo e giungerà fino ad O. Quindi O vedrà la luce di *tutte* le stelle ⁽⁴⁾. Ma *come* le vedrà? Una semplice riflessione ci suggerisce che una generica stella S, la cui luce giunge ad O, non gli appare nella sua effettiva posizione, ma (per un noto fenomeno ottico) *come se* si trovasse nella *direzione tangente* in O alla traiettoria del raggio luminoso. Una sezione spaziale dell'Universo appare dunque ad O *nella sua totalità e come se fosse euclidea* (cioè a curvatura nulla). Quello che *appare* ad O non è quindi altro che una « rappresentazione » della mezza ipersfera V_3 sullo spazio euclideo S_3 tangente in O, e tale rappresentazione è perfettamente determinata, perché essendo le geodetiche di V_3 rappresentate dalle rette di S_3 , sarà precisamente la « rappresentazione geodetica » di V_3 su S_3 , la quale per un classico teorema dovuto a Beltrami ⁽⁵⁾ è possibile solo se lo spazio V_3 è a curvatura costante (come è appunto il nostro caso).

In conseguenza anche il cronotopo U_4 che appare ad O sarà la rappresentazione geodetica di U_4 , sullo spazio euclideo S_4 tangente in O e precisamente la regione esterna alla quadrica assoluta:

$$(2.I) \quad f = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - R^2 = 0$$

in modo che le geodetiche di U_4 siano rappresentate dalle rette di S_4 ⁽⁶⁾.

L'Universo a curvatura costante lo chiameremo « cronotopo reale » mentre la sua rappresentazione geodetica sarà chiamata « cronotopo fenomenico »

(2) L. BIANCHI, *Geometria differenziale*, vol. 2º, p. 2ª, Zanichelli, Bologna 1930, cap. XXV, p. 437.

(3) L. FANTAPPIÈ, *Deduzione autonoma della equazione generalizzata di Schrödinger, nella teoria di relatività finale*, « Rend. Acc. Lincei », ser. 8ª, vol. XIX, fasc. 6 (1955).

(4) Effettivamente O vede le stelle la cui luce gli giunge con una intensità sufficiente ad impressionare il suo occhio o la lastra fotografica. Ma questo non interessa ai fini del nostro ragionamento.

(5) E. BELTRAMI, « Annali di Matematica » (1), 7, p. 135 (1865); (2), 2, p. 232 (1868).

(6) G. CASTELNUOVO, *L'Universo di De Sitter*, « Rend. Lincei », ser. 6ª, vol. XII, p. 263 (1930); L. SCHLÄFLI, « Annali di Mat. » (2), 5, p. 178 (1871).

relativo ad O, perché è quest'ultimo che appare ad O ed è oggetto delle sue misure⁽⁷⁾. Dal ragionamento fatto segue la interessante conclusione:

Se nel « cronotopo reale » le leggi fisiche risultano invarianti per le trasformazioni di un certo gruppo G^{10} (che opera sulle variabili cronotopiche ξ, η, ζ, τ), all'osservatore O appariranno invece invarianti per il gruppo \bar{G}^{10} (operante sulle variabili cronotopografiche x, y, z, t) indotto dal precedente sul cronotopo fenomenico relativo ad O, ed i due gruppi G e \bar{G} risultano evidentemente isomorfi.

Poiché alla fisica interessa ciò che a noi appare e che è oggetto delle nostre misure, è su quest'ultimo gruppo che converrà sviluppare la teoria di relatività finale (fenomenica). Tale gruppo non è altro (come ha fatto vedere il Fantappiè) che il gruppo finale Fn_{3+1}^{10} (operante sulle variabili cronotopografiche), le cui trasformazioni, con il cambiamento di coordinate

$$(2.2) \quad t = x_0 \frac{R}{c}, \quad x = x_1 R, \quad y = x_2 R, \quad z = x_3 R$$

e con la introduzione di coordinate omogenee

$$(2.3) \quad x_k = \frac{\bar{x}_k}{\bar{x}_4},$$

si ottengono tutte dalle sostituzioni lineari omogenee sulle cinque coordinate, di determinante +1, del gruppo pseudoortogonale speciale Os_{4+1}^{10} . *Le leggi fisiche debbono quindi risultare invarianti per le sostituzioni di questo gruppo.*

La più brillante conferma della esattezza della nostra conclusione e che ci autorizza ad affermare che il gruppo base della fisica non è quello di Lorentz, ma quello finale, la troviamo nell'ambito della fisica nucleare, e precisamente nella teoria dei campi mesonici. Møller⁽⁸⁾, Lubanski, Rosenfeld⁽⁹⁾ ed altri⁽¹⁰⁾ hanno osservato infatti che per spiegare mediante il campo mesonico le proprietà dei sistemi nucleari e la relazione tra le costanti di disintegrazione β e la vita media dei mesoni della radiazione cosmica, occorre adottare per questo campo una combinazione di un campo pseudo-scalare e di un campo vettoriale. Tale combinazione si presenta allora, in maniera del tutto naturale, come un unico campo mesonico *soddisfacente ad una equazione di Klein-Gordon nello spazio pseudoeuclideo a 5 dimensioni, e comportantesi in maniera covariante (come un vettore di S_5) per il gruppo Os_{4+1}^{10} delle rotazioni proprie (di determinante +1)!* Inoltre si ha il vantaggio di ridurre a metà il numero delle costanti arbitrarie, che figurano nella teoria mista. Lubanski e Rosenfeld osservano che la limitazione al gruppo delle rotazioni proprie non è arbitraria perché le riflessioni 5-dimensionali non corri-

(7) Per ulteriori considerazioni sulla realtà obbiettiva e fenomenica rimandiamo alla 3ª memoria del Fantappiè citata in (1).

(8) C. MØLLER, *On the theory of mesons*. « D. Kgl. Danske Vid. Sels. Mat. Fys. Medd. », 18, 6 (1941).

(9) J. K. LUBANSKI and L. ROSENFELD, *Sur la représentation des champs Mesiques dans l'espace à cinq dimensions*, « Physica », 9, 117 (1942 a).

(10) Vedi anche H. C. CORBEN, *Special relativistic Fields theories in five dimensions*, « Phys. Rev. », 70, 947 (1946 b).

spendono a proprietà di covarianza semplice nello spazio a 4 dimensioni. Però, come ha indicato il Fantappiè nella seconda delle Note ⁽¹¹⁾, tale limitazione non sussiste, perché trattandosi di sostituzioni lineari sulle coordinate proiettive omogenee, le trasformazioni di determinante -1 si possono ottenere da quelle di determinante $+1$ (e viceversa) alterando semplicemente il segno delle coordinate omogenee, e quindi *lasciando inalterate le coordinate non omogenee*, cosa che evidentemente è sempre possibile.

Tale interessantissimo risultato, ritenuto dai predetti autori come « puramente formale » ⁽¹¹⁾, appare adesso, in base alle nostre conclusioni, nel suo vero e profondo significato e cioè *come una giustificazione fisica della teoria di relatività finale*, la quale quindi non deve più considerarsi come una pura possibilità matematica, ma *come una vera e propria teoria fisica*. Ma su questo argomento torneremo più dettagliatamente in un successivo lavoro.

3. LE TRASFORMAZIONI DEL GRUPPO FINALE. — Come abbiamo mostrato nel paragrafo precedente, nella teoria di relatività finale si sostituisce al cronotopo euclideo di Minkowski, un cronotopo ancora euclideo (o meglio la regione esterna all'assoluto), il quale adesso ha un significato essenzialmente diverso dal precedente, in quanto non è altro che una immagine piana del cronotopo reale. Si capisce allora come questo « cronotopo fenomenico » risulti una immagine che per piccole distanze dall'osservatore O coincide praticamente col « cronotopo reale », ma ne differisce sensibilmente per grandi distanze (basti pensare alle carte geografiche). Le trasformazioni che qui stabiliremo ci diranno come si passa dalla descrizione del cronotopo fenomenico fatta da O a quella fatta da un altro osservatore O'. Le correzioni da apportare risulteranno però sensibili solo *per grandi distanze nello spazio o nel tempo*.

Determineremo le trasformazioni del gruppo finale in tre casi semplici, ma abbastanza significativi.

1° Caso. — Consideriamo due osservatori O, O' coincidenti in un istante iniziale ($t_0 = 0$; $t = 0$; $r = 0$) ed in moto rettilineo ed uniforme l'uno rispetto all'altro, con velocità parallela all'asse delle x ($v_1 \neq 0$; $v_2 = v_3 = 0$). Le trasformazioni del gruppo Os_{4+1}^{10} saranno allora date da ⁽¹²⁾:

$$\begin{cases} \bar{x}'_0 = \bar{x}_0 \cosh v_1 - \bar{x}_1 \sinh v_1 \\ \bar{x}'_1 = -\bar{x}_0 \sinh v_1 + \bar{x}_1 \cosh v_1 \\ \bar{x}'_2 = \bar{x}_2 ; \bar{x}'_3 = \bar{x}_3 ; \bar{x}'_4 = \bar{x}_4 \end{cases}$$

(11) Vedi pure E. M. CORSON, *Introduction to tensors, spinors and relativistic wave-equations*, Hafner, New York 1953 p. 185.

(12) G. ARCIDIACONO, *Sui gruppi aggiunti dei gruppi delle rotazioni negli spazi a 3, 4, 5 dimensioni*, « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », ser. V, vol. XV, fasc. 1-2 (1956).

Se poniamo $\tanh v_1 = V/c = \beta$ e passiamo a coordinate non omogenee:

$$(3.1) \quad \left[\begin{array}{l} t' = \frac{t - \frac{\beta}{c} x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \end{array} \right]$$

Queste trasformazioni coincidono formalmente con quelle di Lorentz, ma adesso hanno un significato essenzialmente diverso, perché x, y, z, t non sono più coordinate del cronotopo reale, ma del cronotopo fenomenico. V è la velocità relativa dei due osservatori O ed O' (ved. anche ⁽¹⁾). A risultati più interessanti si perviene negli altri due casi:

2° Caso. — Consideriamo due osservatori O, O' , fermi nello stesso posto ($\mathbf{t} = \mathbf{o}$; $\mathbf{v} = \mathbf{o}$; $\mathbf{r} = \mathbf{o}$) ma lontani nel tempo ($t_0 \neq 0$) (ovvero lo stesso osservatore in due momenti diversi). In tal caso le trasformazioni del gruppo Os_{4+1}^{10} , sono date da:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}'_0 = \bar{x}_0 \cosh t_0 - \bar{x}_4 \sinh t_0 \\ \bar{x}'_1 = \bar{x}_1 \quad ; \quad \bar{x}'_2 = \bar{x}_2 \quad ; \quad \bar{x}'_3 = \bar{x}_3 \\ \bar{x}'_4 = -\bar{x}_0 \sinh t_0 + \bar{x}_4 \cosh t_0 \end{array} \right.$$

Se allora poniamo $\tanh t_0 = cT_0/R = \gamma$ ed osserviamo che

$$\sinh t_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad ; \quad \cosh t_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

otteniamo le trasformazioni

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}'_1 = \bar{x}_1 \quad ; \quad \bar{x}'_2 = \bar{x}_2 \quad ; \quad \bar{x}'_3 = \bar{x}_3 \\ \bar{x}'_0 = \frac{\bar{x}_0 - \gamma \bar{x}_4}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \quad ; \quad \bar{x}'_4 = \frac{\bar{x}_4 - \gamma \bar{x}_0}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \end{array} \right.$$

che sono analoghe alle (3.1). Se passiamo a coordinate non omogenee:

$$\left\{ \begin{array}{l} t' = \frac{R}{c} \frac{\bar{x}'_0}{\bar{x}'_4} = \frac{R}{c} \cdot \frac{\bar{x}_0 \cosh t_0 - \bar{x}_4 \sinh t_0}{-\bar{x}_0 \sinh t_0 + \bar{x}_4 \cosh t_0} \\ x' = R \frac{\bar{x}'_1}{\bar{x}'_4} = \frac{R \bar{x}_1}{-\bar{x}_0 \sinh t_0 + \bar{x}_4 \cosh t_0}, \text{ ecc.} \end{array} \right.$$

in tal caso, le trasformazioni del gruppo finale sono le seguenti:

$$(3.3) \quad \left[\begin{array}{l} x' = \frac{x \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 - \frac{c}{R} \gamma t} \quad ; \quad y' = \frac{y \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 - \frac{c}{R} \gamma t} \\ z' = \frac{z \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 - \frac{c}{R} \gamma t} \quad ; \quad t' = \frac{t - T_0}{1 - \frac{c}{R} \gamma t} \end{array} \right]$$

Al limite relativistico, per $R \rightarrow \infty$ otteniamo le formole della traslazione nel tempo:

$$x' = x \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t - T_0$$

onde T_0 può interpretarsi come *traslazione nel tempo* (come appare misurata nel cronotopo fenomenico). Le (3.3) sono analoghe alle formole di addizione delle velocità stabilite nella teoria di relatività ristretta. L'ultima delle (3.3) ci fornisce una « formola di addizione delle durate » in quanto essa si può scrivere così:

$$(3.4) \quad \tau_3 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + \frac{c^2}{R^2} \tau_1 \tau_2}$$

dalla quale si vede che se $\tau_1 = R/c$ e τ_2 è arbitrario, $\tau_3 = R/c$. In altri termini, nella teoria di relatività finale appare una « durata limite » data da R/c .

3° Caso. - Consideriamo infine due osservatori O, O' contemporanei ed in quiete l'uno rispetto all'altro ($t_0 = 0; v = 0; r = 0$), ma lontani nello spazio lungo la direzione dell'asse x ($t_1 \neq 0; t_2 = t_3 = 0$). Con ragionamento analogo al precedente si stabiliscono le trasformazioni di Os_{4+1}^{10} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}'_0 = \bar{x}_0 \\ \bar{x}'_1 = \bar{x}_1 \cos t_1 - \bar{x}_4 \sin t_1 \\ \bar{x}'_2 = \bar{x}_2 \quad ; \quad \bar{x}'_3 = \bar{x}_3 \\ \bar{x}'_4 = \bar{x}_1 \sin t_1 + \bar{x}_4 \cos t_1 \end{array} \right.$$

le quali, con la posizione $\tan t_1 = T/R = \alpha$ ed esprimendo $\sin t_1$ e $\cos t_1$ in funzione di $\tan t_1$, si scrivono così:

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{x}'_1 = \frac{\bar{x}_1 - \alpha \bar{x}_4}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad ; \quad \bar{x}'_4 = \frac{\bar{x}_4 + \alpha \bar{x}_1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \\ \bar{x}'_2 = \bar{x}_2 \quad ; \quad \bar{x}'_3 = \bar{x}_3 \quad ; \quad \bar{x}'_0 = \bar{x}_0 \end{array} \right.$$

analoghe alle (3.1) ed alle (3.2). Se passiamo a coordinate non omogenee:

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - T}{1 + \frac{\alpha}{R} x} \quad ; \quad y' = \frac{y \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 + \frac{\alpha}{R} x} \\ z' = \frac{z \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 + \frac{\alpha}{R} x} \quad ; \quad t' = \frac{t \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 + \frac{\alpha}{R} x} \end{array} \right.$$

anche qui otteniamo al limite relativistico ($R \rightarrow \infty$) le traslazioni lungo l'asse x :

$$x' = x - T \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t$$

e quindi T può interpretarsi come *distanza spaziale* (lungo l'asse x) dei due osservatori O, O' , quale risulta nel cronotopo fenomenico. La prima delle (3.6) ci fornisce la « formola di addizione delle lunghezze »:

$$(3.7) \quad \lambda_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{R^2}}$$

dalla quale si vede che se $\lambda_1 \lambda_2 = R^2$, $\lambda_3 = \infty$.

In un successivo lavoro utilizzeremo le trasformazioni qui trovate per dedurre alcune interessanti conseguenze della teoria di relatività finale e per stabilire le leggi di trasformazione dei campi mesonici e del campo elettromagnetico generalizzato ⁽¹³⁾.

Fisica matematica. — *Sulle condizioni al contorno per le guide imperfettamente conduttrici.* Nota di MARIALUISA DE SOCIO, presentata ^(*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

§ 1. — È ben noto come, nella teoria delle guide d'onda limitate da un conduttore perfetto, le condizioni al contorno si pongono assai facilmente: basta infatti supporre, sulla parete, nulla la componente tangenziale del campo elettrico. Se, però, le pareti della guida sono imperfettamente conduttrici, le condizioni al contorno non sono così semplici, infatti il campo non è, nell'interno del conduttore che limita la guida, identicamente nullo come nel caso in cui tale conduttore sia perfetto; occorrerebbe perciò, a rigore, studiare la distribuzione del campo entro il conduttore stesso.

Poiché tale questione conduce spesso a problemi assai complicati, sono state proposte condizioni al contorno valide per una guida a pareti assorbenti in cui non appare la distribuzione del campo entro il conduttore o, meglio, tale distribuzione è opportunamente schematizzata. Una di tali ipotesi, dovuta allo Schelkunoff ⁽¹⁾, è la seguente:

$$(I) \quad \mathbf{E}_t = v (1 + j) \mathbf{H}_t \wedge \mathbf{m}$$

dove j è l'unità immaginaria, \mathbf{m} un versore normale alla parete della guida diretto esternamente ad essa, $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ le componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico alla superficie del conduttore, v una costante positiva uguale a $\sqrt{\frac{\mu' \omega}{2\gamma}}$ con ω pulsazione del campo, per ipotesi sinusoidale, γ e μ' conduttività e permeabilità della parete stessa.

(13) G. ARCIDIACONO, *Sul campo elettromagnetico generalizzato*, « Rend. Acc. Lincei », ser. 8^a, vol. XVIII, fasc. 6 (1955).

(*) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) S. A. SCHELKUNOFF, *Electromagnetic Waves*. New York. Van Nostrand, VI ed., Cap. VIII (1948).

Il Baudoux ⁽²⁾ ha proposto invece la relazione che scriveremo nella seguente forma:

$$(2) \quad \mathbf{H}_t = \gamma_s \mathbf{m} \wedge \mathbf{E}_t$$

dove \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t sono ancora le componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico, γ_s la conduttività superficiale definita nella citata Memoria del Baudoux ⁽³⁾.

Ora vi sono casi, sia pure schematici, in cui è possibile considerare il campo nel conduttore che limita la guida ed è possibile svolgere la teoria della propagazione in essa, senza particolari ipotesi sulle condizioni al contorno. Un caso già da me considerato in una Nota pubblicata due anni fa ⁽⁴⁾, è quello in cui la guida sia costituita dall'intercapedine fra due conduttori a forma di semispazi, limitati da piani paralleli fra loro e alla direzione di propagazione. Oppure si può considerare una guida a sezione circolare, limitata da un conduttore di spessore infinito, cioè che occupi tutto lo spazio salvo un cilindro indefinito occupato dal dielettrico.

In entrambi i casi è possibile determinare, con noti metodi e senza ulteriori ipotesi, i modi che si propagano nella guida e che risultano, per buone conduttività, molto prossimi a quelli che si ottengono in base all'ipotesi dello Schelkunoff.

Si possono, però, indicare anche esempi in cui sono valide le relazioni di Baudoux. Si supponga che le pareti dell'intercapedine e della guida a sezione circolare, ora indicate, siano rivestite da una sottile foglia metallica buona conduttrice, mentre le pareti stesse abbiano moderata conduttività e notevole permeabilità magnetica, come si potrebbe realizzare mediante agglomerati di limatura di ferro.

I risultati che si ottengono, senza supporre ulteriori condizioni al contorno, si ritrovano, come già accennato, in base alla relazione di Baudoux; ovviamente questi non sono, con tutta probabilità, i soli esempi in cui quella relazione è valida.

§ 2. - Consideriamo dapprima il caso, già accennato, dell'intercapedine fra due conduttori. Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale O, x, y, z , supponiamo che i piani che limitano la guida abbiano per equazioni $y = -d, y = d$. Siano ϵ e μ la costante dielettrica e la permeabilità magnetica nell'interno della guida, γ, μ' e ϵ' la conduttività, la permeabilità magnetica e la costante dielettrica nei conduttori. Nella guida si propaghi, nella

(2) P. BAUDOUX, *Courants superficiels et guides d'ondes à conductivité finie*, « Revue H. F. », vol. III, n. 1^o (1955).

(3) Moltiplicando vettorialmente la (2) per \mathbf{m} si trova:

$$\mathbf{E}_t = \frac{1}{\gamma_s} \mathbf{m} \wedge \mathbf{H}_t$$

che non può in nessun caso identificarsi con la (1) per la presenza del fattore $(1 + j)$.

(4) M. DE SOCIO, *Sulla rappresentazione del campo elettromagnetico in una guida d'onda a pareti assorbenti*, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XVI, pp. 63-68, (1954).

direzione dell'asse z con velocità v , un modo TM di pulsazione ω ⁽⁵⁾. (Agli stessi risultati si giungerebbe considerando un modo TE).

Posto:

$$k^2 = \epsilon \mu \omega^2 - \frac{\omega^2}{v^2}, \quad h^2 = k^2 - j \gamma \mu' \omega + \epsilon' \mu' \omega^2 - \epsilon \mu \omega^2$$

si ha ⁽⁶⁾, tenendo conto per maggiore completezza anche delle correnti di spostamento nel conduttore, trascurate nella Nota precedente, che h è radice dell'equazione ⁽⁷⁾:

$$(3) \quad \exp(2jkd) = \pm \frac{1 - j \frac{\epsilon \omega}{\gamma} \frac{h}{k}}{1 + j \frac{\epsilon \omega}{\gamma} \frac{h}{k}}.$$

Ora per apprezzare i valori dei diversi termini, assumiamo, come nella nota citata in ⁽⁴⁾ e usando unità Giorgi:

$$\epsilon = \frac{1}{36\pi} 10^{-9}, \quad \mu = 4\pi \cdot 10^{-7}, \quad \gamma = 1,7 \cdot 10^8, \quad 2d = 0,1, \quad \omega = 10^{10}.$$

Poiché abbiamo $\mu' \geq \mu$, $\epsilon' \simeq \epsilon$, si può intanto, nell'espressione di h^2 , trascurare $\epsilon' \mu' \omega^2 - \epsilon \mu \omega^2$ rispetto a $\gamma \mu' \omega$. Inoltre k^2 vale, a meno di termini trascurabili per le nostre convenzioni $n^2 \pi^2 / 4d^2$, con n non troppo elevato, altrimenti ω risulterebbe inferiore alla pulsazione critica. Si ha quindi che anche k^2 è trascurabile rispetto a $\gamma \mu' \omega$ e quindi è:

$$h = (1 - j) \sqrt{\frac{\gamma \mu' \omega}{2}} = (1 - j) v \gamma$$

sostituendo in (3) si ha:

$$(4) \quad \exp(2jkd) = \pm \frac{1 - \frac{\epsilon \omega v}{k} (1 + j)}{1 + \frac{\epsilon \omega v}{k} (1 + j)}.$$

§ 3. - Riprendiamo ora lo stesso problema, considerando l'intercapedine come una guida a pareti assorbenti, sulle cui superfici sia valida la condizione di Schelkunoff. Supposto il campo variabile con z come nel numero precedente, si ha, per il campo elettrico e magnetico nell'interno della guida, le espressioni ⁽⁸⁾:

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = \left(\frac{\omega}{vk} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) D_1 \exp(jky) + \left(-\frac{\omega}{vk} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) D_2 \exp(-jky) \\ \mathbf{H} = \frac{\epsilon \omega}{k} [-D_1 \exp(jky) + D_2 \exp(-jky)] \mathbf{i}. \end{cases}$$

(5) Più precisamente il campo, sia nel dielettrico, sia nel conduttore, dipenda da z secondo il fattore $\exp\left(-j \frac{\omega}{v} z\right)$.

(6) Loc. cit. nota (3). Si osservi che ora la permeabilità magnetica e la costante dielettrica del conduttore si indicano con μ' e ϵ' , perché possono essere anche diverse dalla permeabilità μ e costante dielettrica ϵ del dielettrico.

(7) La radice di h^2 si sceglie con parte immaginaria negativa.

(8) Loc. cit., nota (3). Il fattore $\exp[j\omega(t - z/v)]$ è stato conglobato in D_1 e D_2 .

Tali valori, sostituiti nella (I), valida rispettivamente sui piani $y = d$, $y = -d$, conducono al sistema (si tenga conto che m coincide rispettivamente con j e $-j$):

$$\begin{cases} D_1 \left[1 + \frac{\varepsilon \omega v}{k} (1 + j) \right] \exp(jkd) + D_2 \left[1 - \frac{\varepsilon \omega v}{k} (1 + j) \right] \exp(-jkd) = 0 \\ D_1 \left[1 - \frac{\varepsilon \omega v}{k} (1 + j) \right] \exp(-jkd) + D_2 \left[1 + \frac{\varepsilon \omega v}{k} (1 + j) \right] \exp(jkd) = 0. \end{cases}$$

Tale sistema è omogeneo nelle D_1 e D_2 non entrambe nulle. Dovrà essere allora nullo il determinante dei suoi coefficienti, si ottiene così l'equazione in k :

$$\exp(2jkd) = \pm \frac{1 - \frac{\varepsilon \omega v}{k} (1 + j)}{1 + \frac{\varepsilon \omega v}{k} (1 + j)}$$

che coincide con la (4).

§ 4. - Passiamo ora al caso, accennato nell'introduzione, in cui le pareti dell'intercapedine siano rivestite da una foglia metallica buona conduttrice di spessore δ , permeabilità μ , conduttività γ' . Precisando le nostre ipotesi, supporremo δ così piccolo da poter considerare, seguendo il Levi-Civita ⁽⁹⁾ e il Baudoux, infinitesimo lo spessore della foglia, ma tale da introdurre una discontinuità nel campo elettromagnetico, discontinuità determinata per la prima volta appunto dal Levi-Civita. In particolare δ dovrà essere piccolo rispetto alla profondità di pelle (skin-dept) relativa alla sostanza di cui è formata la laminetta e alla frequenza del campo.

In base ai risultati della Nota citata in ⁽³⁾, potremo scrivere, rispettivamente per $y > d$ e $y < -d$, cioè nei due semispazi che formano le pareti della guida ⁽¹⁰⁾:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = C_1 \left(-\frac{\omega}{v h} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \exp(-jhy) \\ \mathbf{H} = -j \frac{\gamma}{h} C_1 \exp(-jhy) \mathbf{i} \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbf{E} = C_2 \left(\frac{\omega}{v h} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \exp(jhy) \\ \mathbf{H} = j \frac{\gamma}{h} C_2 \exp(jhy) \mathbf{i}. \end{cases}$$

Invece per $-d < y < d$, cioè entro la guida, sono ancora valide le (5).

Sui piani $y = d$ e $y = -d$, dette \mathbf{E}_t e \mathbf{H}_t le componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico, per la presenza della lamina conduttrice (si

(9) T. LEVI-CIVITA, *La teoria elettromagnetica di Hertz di fronte a fenomeni di induzione*, questi « Rendiconti », ser. V, vol. II, pp. 75-81 (1902).

(10) Anche in questo caso il fattore $\exp[j\omega(t - z/v)]$ è stato conglobato in C_1 e C_2 h^2 ha lo stesso significato del numero precedente; si è poi trascurato $\varepsilon' j \omega$ rispetto a γ .

ricordi che il suo spessore si considera infinitesimo) valgono le relazioni dovute al Levi-Civita e di cui si è già accennato ⁽¹¹⁾:

$$(8) \quad \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t} \quad (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \wedge \mathbf{m} = -\gamma' \delta \mathbf{E}_t.$$

In queste equazioni le grandezze con l'indice 2 si suppongono calcolate sulla faccia della lamina verso cui è orientato \mathbf{m} (ovviamente vettore unitario normale alla lamina oltre che alla superficie della parete), quelle con l'indice 1 sull'altra.

Ora poiché supporremo \mathbf{m} orientato verso l'esterno della guida, i valori di \mathbf{E}_{2t} ed \mathbf{H}_2 ; \mathbf{E}_{1t} , \mathbf{H}_1 si otterranno nel piano $y = d$ ponendo rispettivamente nelle (6) e (5) $y = d$ e annullando le componenti lungo \mathbf{j} , che non sono normali alla lamina. Poiché analoghe considerazioni valgono per $y = -d$, si ha il sistema:

$$\begin{aligned} D_1 \exp(jkd) + D_2 \exp(-jkd) &= C_1 \exp(-jhd) \\ D_1 \exp(-jkd) + D_2 \exp(jkd) &= C_2 \exp(-jhd) \\ -j \frac{\gamma}{h} C_1 \exp(-jhd) + \frac{\varepsilon \omega}{k} [D_1 \exp(jkd) - D_2 \exp(-jkd)] &= -\gamma' \delta C_1 \exp(-jhd) \\ j \frac{\gamma}{h} C_2 \exp(-jhd) + \frac{\varepsilon \omega}{k} [D_1 \exp(-jkd) - D_2 \exp(jkd)] &= -\gamma' \delta C_2 \exp(-jhd). \end{aligned}$$

Per semplificare questo sistema eliminando C_1 e C_2 ; si ha:

$$\begin{cases} D_1 \left(\gamma' \delta - j \frac{\gamma}{h} + \frac{\varepsilon \omega}{k} \right) \exp(jkd) + D_2 \left(\gamma' \delta - j \frac{\gamma}{h} - \frac{\varepsilon \omega}{k} \right) \exp(-jkd) = 0 \\ D_1 \left(\gamma' \delta - j \frac{\gamma}{h} - \frac{\varepsilon \omega}{k} \right) \exp(-jkd) + D_2 \left(\gamma' \delta - j \frac{\gamma}{h} + \frac{\varepsilon \omega}{k} \right) \exp(jkd) = 0. \end{cases}$$

Questo è un sistema lineare nelle D_1 e D_2 non entrambe nulle. Deve essere allora nullo il determinante dei coefficienti; si ha così l'equazione in k :

$$\exp(2jkd) = \pm \frac{1 - \frac{\varepsilon \omega}{k \gamma' \delta \left(1 - j \frac{\gamma}{h \delta \gamma'} \right)}}{1 + \frac{\varepsilon \omega}{k \gamma' \delta \left(1 - j \frac{\gamma}{h \delta \gamma'} \right)}}.$$

Se fosse μ' infinita e $\gamma' \delta = 0$ si avrebbe subito $\exp(2jkd) = \pm 1$, $k^2 = n^2 \pi^2 / 4 d^2$ (n intero). Anche in questo caso, come in quello considerato nel § 2, poiché μ' è grande e $\gamma' \delta$ non troppo elevato, si può ritenere k^2 dell'ordine di grandezza del valore ora scritto. Si può perciò supporre (si ricordi che ora γ è piccola ma μ' è grande) trascurabile il primo e terzo termine nell'espressione di k^2 . Si ha perciò:

$$|h| = \sqrt{\gamma \mu' \omega}$$

(11) Naturalmente si suppone γ' abbastanza grande in modo che $\gamma' \delta$ non sia trascurabile.

d'altra parte, come si è detto, δ deve essere piccolo rispetto alla profondità di pelle in un conduttore di permeabilità μ , conduttività γ' , deve essere quindi piccolo il numero $\delta\sqrt{\gamma'\mu}\omega$ che indicheremo con α .

Si ha così:

$$\left| \frac{\gamma}{\hbar\delta\gamma'} \right| = \frac{\gamma}{\gamma'\delta\sqrt{\gamma'\mu}\omega} = \sqrt{\frac{\gamma\mu}{\gamma'\mu'}} \frac{1}{\alpha}.$$

Ora il rapporto $\sqrt{\frac{\gamma\mu}{\gamma'\mu'}}$ può essere tale che il suo prodotto per $1/\alpha$ si può ancora ritenere trascurabile rispetto all'unità. La (8) diviene allora:

$$\exp(2jkd) = \pm \frac{1 - \frac{\varepsilon\omega}{k\gamma'\delta}}{1 + \frac{\varepsilon\omega}{k\gamma'\delta}}$$

espressione che coincide con quella fornita dal Baudoux mediante la relazione (2).

§ 5. - Consideriamo ora una guida a sezione circolare ed a spessore infinito; le pareti che la limitano siano formate da buoni conduttori e, s'intende, senza rivestimento. Fissato un sistema di riferimento cilindrico ρ, ϑ, z , con l'asse z coincidente con l'asse della guida, esaminiamo la propagazione in tale direzione di un modo TM, che dovrà essere simmetrico.

È noto che la componente del campo elettrico ha l'espressione:

$$(10) \quad E_z = C J_0(k\rho)$$

dove $J_0(k\rho)$ è la funzione di Bessel di ordine zero e k ha lo stesso significato dei numeri precedenti.

Notiamo poi che, per le componenti trasversali (cioè normali all'asse z) del campo elettrico e del campo magnetico, si hanno le formule:

$$(11) \quad \mathbf{E}_\tau = -j \frac{\omega}{vk^2} \text{grad } E_z = -j \frac{\omega C}{vk} J'_0(k\rho) \text{grad } \rho$$

$$(12) \quad \mathbf{H}_\tau = \frac{\varepsilon j \omega}{k^2} \mathbf{k} \wedge \text{grad } E_z = \frac{\varepsilon j \omega C}{k} J'_0(k\rho) \mathbf{k} \wedge \text{grad } \rho.$$

Nel conduttore si ha invece, ricordando che il campo si deve annullare per $\rho \rightarrow \infty$:

$$(13) \quad E_z = D H_{0,2}(\hbar\rho).$$

dove \hbar ha sempre lo stesso significato, mentre $H_{0,2}(\hbar\rho)$ è la seconda funzione di Hankel di ordine zero, D un'altra costante. Le componenti trasversali sono date dalle formule, trascurando ancora $\varepsilon j \omega$ rispetto a γ :

$$(14) \quad \mathbf{E}_\tau = -j \frac{\omega}{v\hbar} D H'_{0,2}(\hbar\rho) \text{grad } \rho$$

$$(15) \quad \mathbf{H}_\tau = \frac{\gamma}{\hbar} D H_{0,2}(\hbar\rho) \mathbf{k} \wedge \text{grad } \rho.$$

Le condizioni di continuità, valevoli per $\rho = a$, si riducono alle eguaglianze delle E_z e delle \mathbf{H}_τ , perché \mathbf{E}_τ è normale alla parete. Si ha così:

$$\begin{cases} C J_0(ka) - D H_{0,2}(ha) = 0 \\ \frac{\varepsilon j \omega C}{k} J'_0(ka) - D \frac{\gamma}{h} H'_{0,2}(ha) = 0 \end{cases}$$

sistema omogeneo nelle incognite C e D non entrambe nulle. Deve essere nullo allora il determinante dei coefficienti, ossia:

$$(16) \quad \frac{\gamma}{h} J_0(ka) H'_{0,2}(ha) - \frac{\varepsilon j \omega}{k} J'_0(ka) H_{0,2}(ha) = 0.$$

Poiché il valore di $\gamma \mu'$, e quindi di h , è molto grande, è lecito sostituire in (16) ad $H_{0,2}(ha)$ e $H'_{0,2}(ha)$ i loro valori asintotici, senza commettere sensibile errore.

Si ha:

$$\begin{aligned} & -j \sqrt{\frac{2}{\pi ha}} \exp \left[-j \left(ha - \frac{1}{4} \pi \right) \right] \frac{\gamma}{h} J_0(ka) - \\ & - \frac{\varepsilon j \omega}{k} J'_0(ka) \sqrt{\frac{2}{\pi ha}} \exp \left[-j \left(ha - \frac{1}{4} \pi \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

da cui, semplificando e sostituendo ad h il valore approssimato $h = (1 - j) \nu \gamma$, si ottiene:

$$(17) \quad k \frac{J_0(ka)}{J'_0(ka)} = -\varepsilon \omega \nu (1 - j).$$

La (17) coincide con la relazione ottenuta applicando la (1) fra le componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico alla superficie dei conduttori. Si ha infatti, sostituendo in (2) al posto di \mathbf{E}_t ed \mathbf{H}_t rispettivamente (10) moltiplicata per h e (12):

$$J_0(ka) = \nu (1 + j) \frac{\varepsilon j \omega}{k} J'_0(ka)$$

da cui si ottiene, semplificando, la (17).

§ 6. — Consideriamo l'altro caso in cui sulle pareti della guida a sezione circolare si abbia la laminetta metallica di spessore δ molto piccolo e conduttività γ' . Anche in questo caso sono valide le (10), (11), (12), (13), (14), (15), però per $\rho = a$ devono valere, per la presenza della foglia conduttrice, le (8). Si ha così:

$$\begin{cases} C J_0(ka) - D H_{0,2}(ha) = 0 \\ C \left[\gamma' \delta J_0(ka) - \frac{\varepsilon j \omega}{k} J'_0(ka) \right] + \gamma \frac{D}{h} H'_{0,2}(ha) = 0. \end{cases}$$

Tale sistema è omogeneo in C e D non entrambe nulle. Ciò importa l'annullarsi del determinante, cioè l'equazione:

$$\frac{\gamma}{h} J_0(ka) H'_{0,2}(ha) + \gamma' \delta J_0(ka) H_{0,2}(ha) - \frac{\varepsilon j \omega}{k} J'_0(ka) H_{0,2}(ha) = 0$$

sostituendo ad $H_{0,2}(ha)$, $H'_{0,2}(ha)$ i loro valori asintotici, si ha:

$$\begin{aligned} & \left(\gamma' \delta - j \frac{\gamma}{h} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi h a}} \exp \left[-j \left(ha - \frac{1}{4} \pi \right) \right] J_0(ka) - \\ & - \frac{\varepsilon j \omega}{k} J'_0(ka) \sqrt{\frac{2}{\pi h a}} \exp \left[-j \left(ha - \frac{1}{4} \pi \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

ossia:

$$k \frac{J_0(ka)}{J'_0(ka)} = j \frac{\varepsilon \omega}{\gamma' \delta \left(1 - j \frac{\gamma}{h \gamma' \delta} \right)}.$$

Ora, poiché γ è piccolo e μ' grande, potremo come al § 4 trascurare $\gamma/h\gamma'\delta$ rispetto all'unità; avremo

$$k \frac{J_0(ka)}{J'_0(ka)} = j \frac{\varepsilon \omega}{\gamma' \delta},$$

espressione che coincide esattamente con quella ottenuta dal Baudoux.

Fisica matematica. — *Equazioni integrodifferenziali e principio di Babinet per gli schermi piani a conduttività unidirezionale.* Nota di GIULIANO TORALDO DI FRANCIA, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

§ 1. — Hanno acquistato una certa importanza sperimentale nella scienza delle onde elettromagnetiche gli schermi piani infinitamente sottili, perfettamente conduttori in una direzione e perfettamente isolanti nella direzione ad essa ortogonale. In pratica, questi schermi possono essere realizzati con ottima approssimazione mediante reticoli di fili conduttori paralleli, con interdistanza piccolissima rispetto alla lunghezza d'onda.

Gli schermi in questione si prestano ad assorbire il momento della quantità di moto trasportato dalle onde polarizzate circolarmente (1). Per conoscere la sezione efficace di assorbimento del momento della quantità di moto è necessario risolvere il problema della diffrazione di un'onda elettromagnetica da parte dello schermo a conduttività unidirezionale. Il problema è stato risolto dall'autore nel caso di un disco circolare di diametro piccolo rispetto alla lunghezza d'onda (2).

(*) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) N. CARRARA, *Coppia e momento angolare della radiazione*, «Nuovo Cimento», 6, 50 (1949).

(2) G. TORALDO DI FRANCIA, *Electromagnetic Cross Section of a Small Disc with Unidirectional Conductivity*, «Nuovo Cimento» (in corso di pubblicazione).

In questo lavoro vengono date le equazioni integrodifferenziali⁽³⁾ che reggono il fenomeno, analoghe a quelle che Copson ha stabilito per gli schermi perfettamente conduttori in tutte le direzioni⁽⁴⁾.

Le equazioni di Copson hanno permesso a quell'autore di dare una prova rigorosa del principio di Babinet nella forma valevole per le onde elettromagnetiche (che non è la forma classica). Nel caso della conduttività unidirezionale troveremo che si danno non due, ma quattro casi, a due a due complementari. Infatti, si consideri la fig. 1, dove le zone dello schermo a condutti-

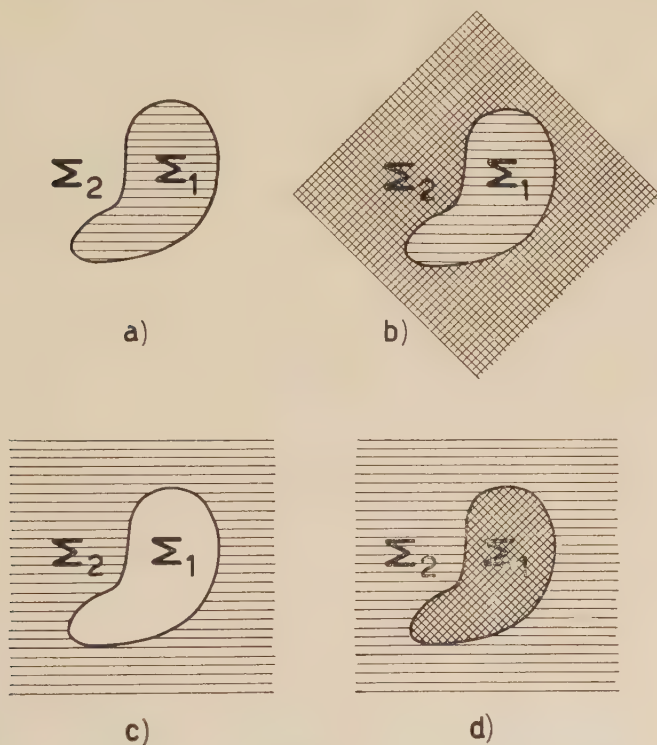


Fig. 1.

vità unidirezionale sono rappresentate con linee parallele, quelle a conduttività omnidirezionale con linee incrociate e quelle libere (isolanti) sono rappresentate in bianco. Il caso *a*) corrisponde a un reticolo a fili paralleli, della forma indicata, il caso *b*) allo stesso reticolo, circondato da lamina conduttrice, il caso *c*) a un foro in un reticolo infinitamente esteso e il caso *d*) a una lamina conduttrice circondata da un reticolo infinitamente esteso. A prima vista si potrebbe pensare che il caso *a*) avesse per complementare il caso *c*). Vedremo invece che sono complementari il caso *a*) e il caso *b*) da un lato e il

(3) È invalso l'uso di chiamare equazioni integrali le equazioni della diffrazione, mentre, in realtà, salvo casi particolari, si tratta di equazioni integrodifferenziali.

(4) E. T. COPSON, *An Integral-Equation Method of Solving Plane Diffraction Problems*, «Proc. Roy. Soc.», 186, 100 (1946).

caso c) e il caso d) dall'altro. Invece, nessuna relazione ovvia sembra sussistere fra a e c) oppure fra b) e d).

§ 2. - Giaccia lo schermo nel piano x, y e l'onda incidente provenga dal semispazio $z < 0$, propagandosi verso il semispazio $z > 0$. La conduttività unidirezionale sia nella direzione dell'asse x .

Si consideri il caso a). In questo caso il campo totale sarà dato dal campo $\mathbf{E}^{i\pm}, \mathbf{H}^{i\pm}$ dell'onda incidente, con l'aggiunta del campo $\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r$ generato dalle correnti e dalle cariche indotte in Σ_1 . Su Σ_1 dovrà aversi

$$(1) \quad E_x^r = -E_x^{i\pm}.$$

Inoltre si richiederà che le componenti del campo, anche se infinite al contorno di Σ_1 , siano a quadrato integrabile ⁽⁵⁾. È poi evidente che la forza magnetica tangenziale \mathbf{H}^r avrà su Σ_1 la sola componente H_y^r , mentre sarà nulla su Σ_2 . Ora il campo $\mathbf{E}^r, \mathbf{H}^r$ in un punto P del semispazio $z > 0$ è esprimibile mediante i valori del componente tangenziale di \mathbf{H}^r su $\Sigma_1 + \Sigma_2$. Precisamente si ha ⁽⁶⁾

$$(2) \quad \mathbf{H}^r(P) = 2 \operatorname{rot}_P \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2} G(P, P') \mathbf{k} \wedge \mathbf{H}^r(P') d\Sigma_{P'},$$

essendo

$$(3) \quad G(P, P') = \frac{\exp(-ik|P - P'|)}{4\pi|P - P'|}$$

e $k = 2\pi/\lambda$. Tenendo conto di quanto detto per il componente tangenziale di \mathbf{H}^r , la (2) può scriversi

$$(4) \quad \mathbf{H}^r(P) = \operatorname{rot}_P \iint_{\Sigma_1} [-2G H_y^r(P') \mathbf{i}] d\Sigma_{P'}.$$

Dato che $-2H_y^r(P')$ è la corrente superficiale, l'integrale è, in sostanza, il potenziale vettore e si ha, chiamando Z l'impedenza intrinseca del mezzo,

$$(5) \quad \mathbf{E}^r(P) = -\frac{2}{ik} (\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P + k^2) \iint_{\Sigma_1} G Z H_y^r(P') \mathbf{i} d\Sigma_{P'}.$$

Quando P è un punto di Σ_1 , deve valere la (1) e si ottiene ⁽⁷⁾

$$(6) \quad 2\mathbf{i} \cdot (\operatorname{grad}_P \operatorname{div}_P + k^2) \iint_{\Sigma_1} G Z H_y^r(P') \mathbf{i} d\Sigma_{P'} = ik E_x^{i\pm}(P).$$

(5) J. MEIXNER, *Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung u. s. w.*, «Ann. der Phys.», 6, 2 (1949).

(6) Ved. G. TORALDO DI FRANCA, *Onde elettromagnetiche* (Bologna 1953), p. 204.

(7) Per il metodo del potenziale vettore elettrico e magnetico applicato alla dimostrazione rigorosa del principio di Babinet si veda: C. J. BOUWKAMP, *Diffraction Theory*, «Rep. Progr. Phys.», 17, 35 (1954).

È questa un'equazione integrodifferenziale per la funzione incognita H_y^1 . La condizione di radiazione è automaticamente soddisfatta dalle (4), (5), che risolvono completamente il problema, una volta nota H_y .

§ 3. Passiamo ora al caso b). Il campo incidente dal semispazio $z < 0$ sia $\mathbf{E}^{2i}, \mathbf{H}^{2i}$. Dalla parte $z > 0$ il campo elettrico \mathbf{E}^2 avrà nullo il componente tangenziale su Σ_2 e avrà l'unica componente tangenziale E_y^2 su Σ_1 .

Esprimendo il campo nel semispazio $z > 0$ mediante i valori del componente tangenziale di \mathbf{E}^2 sullo schermo ⁽⁸⁾ e tenendo conto di quanto sopra, si trova

$$(7) \quad \mathbf{E}^2(P) = \text{rot}_P \iint_{\Sigma_1} [-2G E_y^2(P') \mathbf{i}] d\Sigma_{P'}.$$

Quindi, poiché l'integrale rappresenta il potenziale vettore magnetico, si ha

$$(8) \quad Z\mathbf{H}^2(P) = \frac{2}{ik} (\text{grad}_P \text{div}_P + k^2) \iint_{\Sigma_1} G E_y^2(P') \mathbf{i} d\Sigma_{P'}.$$

D'altra parte, su Σ_1 dovrà aversi

$$(9) \quad H_x^2 = H_x^{2i}$$

perché né le correnti indotte su Σ_1 , né quelle indotte su Σ_2 possono generare sul piano xy un campo magnetico nella direzione x . Pertanto, la (8) e la (9) forniscono

$$(10) \quad 2\mathbf{i} \cdot (\text{grad}_P \text{div}_P + k^2) \iint_{\Sigma_1} G E_y^2(P') \mathbf{i} d\Sigma_{P'} = ik Z H_y^{2i}(P)$$

essendo P un punto di Σ_1 .

La (10) è l'equazione integrodifferenziale alla quale deve soddisfare la funzione incognita E_y^2 . L'equazione deve essere soddisfatta con una E_y^2 che non dia luogo ad inammissibili singolarità sul contorno di Σ_1 . Una volta nota E_y^2 , il campo in $z > 0$ è completamente determinato dalle (7), (8).

§ 4. — Siamo ora in grado di enunciare il principio di Babinet nella forma valevole nel nostro caso. Basta per questo confrontare le (1), (4), (5), (6) con le (9), (7), (8), (10) rispettivamente. Si trova così che, se valgono le condizioni

$$(11) \quad \mathbf{E}^{1i} = Z\mathbf{H}^{2i}, \quad Z\mathbf{H}^{1i} = -\mathbf{E}^{2i},$$

le quali, come è noto, sono consentite dalle equazioni di Maxwell, si avrà anche

$$(12) \quad \mathbf{E}^2 = Z\mathbf{H}^1, \quad Z\mathbf{H}^2 = -\mathbf{E}^1.$$

(8) Vedi nota ⁽⁶⁾.

Abbiamo quindi dimostrato ⁽⁹⁾ che i casi *a* e *b*) sono complementari e che, una volta risolto il primo, si ottiene una soluzione per il secondo e viceversa. È evidente che, allo stesso modo, si trova che sono coniugati il caso *c*) e il caso *d*).

Ci siamo occupati del campo nel semispazio $z > 0$. Per completare, diremo del campo nel semispazio $z < 0$. Nel caso *a*) si ha il campo incidente $\mathbf{E}^{1i}, \mathbf{H}^{1i}$, più il campo $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$, che soddisfa le condizioni: $E_x^1(-z) = E_x^1(z)$, $E_y^1(-z) = E_y^1(z)$, $E_z^1(-z) = -E_z^1(z)$, $H_x^1(-z) = H_x^1(z) = 0$, $H_y^1(-z) = -H_y^1(z)$, $H_z^1(-z) = H_z^1(z)$. Nel caso *b*) avremo per $z > 0$ soltanto il campo $\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2$ e per $z < 0$ il campo incidente $\mathbf{E}^{2i}, \mathbf{H}^{2i}$, il campo riflesso dal piano xy , come se questo fosse perfettamente conduttore, e il campo $\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2$. Quest'ultimo soddisfa le condizioni: $E_x^2(-z) = E_x^2(z) = 0$, $E_y^2(-z) = E_y^2(z)$, $E_z^2(-z) = -E_z^2(z)$, $H_x^2(-z) = -H_x^2(z)$, $H_y^2(-z) = -H_y^2(z)$, $H_z^2(-z) = H_z^2(z)$ ⁽¹⁰⁾. Si verifica facilmente che in questo modo sono rispettate tutte le necessarie condizioni di continuità attraverso al piano xy . Le discontinuità della componente normale di \mathbf{E} e delle componenti tangenziali di \mathbf{H} sono compensate da opportune cariche e correnti superficiali.

§ 5. - Non sarà male mettere sotto una forma più esplicita le equazioni integrodifferenziali (6) e (10). Per esempio, la (6) si scrive

$$(13) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \iint_{\Sigma_1} G(P, P') H_y^1(P') d\Sigma_{P'} = \frac{ik}{2Z} E_x^{1i}(P).$$

Questa equazione è analoga a un'altra equazione che si incontra negli ordinari problemi di diffrazione ⁽¹¹⁾. Essa è molto complicata, specie a causa del nucleo singolare $G(P, P')$ definito dalla (3), che non permette la derivazione doppia sotto il segno di integrale.

Per la diffrazione ordinaria è stato accertato ⁽¹²⁾ che, all'orlo di Σ_1 , la componente normale della corrente e quella del campo elettrico parallela all'orlo sono nulle. È molto probabile che ciò si verifichi anche nel nostro caso, per cui, se l'orlo è parallelo a x solo in punti isolati, si avrebbe lungo l'orlo $H_y^1 = 0$, $E_y^2 = 0$, condizioni coniugate nel senso di Babinet. Allora la (13) diviene facilmente, con un'integrazione per parti,

$$k^2 \iint_{\Sigma_1} G H_y^1(P') d\Sigma_{P'} + \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Sigma_1} G \frac{\partial}{\partial x'} H_y^1(P') d\Sigma_{P'} = \frac{ik}{2Z} E_x^{1i}(P),$$

dove si è abbassato l'ordine delle differenziazioni.

(9) Veramente, per completare la dimostrazione, occorrerebbe un teorema di unicità. Come si fa spesso anche nel caso della diffrazione ordinaria, ci atterremo a ragioni di plausibilità fisica. Cfr. C. J. BOUWKAMP, *Diffraction Theory, a Critique of some Recent Developments*, New York University, Mathematics Research Group, Report No. EM-50, p. 41.

(10) In altre parole, $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$ è generato dalle reali correnti superficiali su Σ_1 , mentre $\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2$ è generato da fittizie correnti magnetiche, che hanno verso opposto sulle due facce opposte di Σ_1 .

(11) Cfr. B. B. BAKER e E. T. COPSON, *Mathematical Theory of Huygens' Principle*, (Oxford 1950), p. 184.

(12) Ved. op. cit. alla nota (9).

Botanica. — *Sulla localizzazione della resina nei canali resiniferi del corpo legnoso delle Conifere*^(*). Nota di ALBINA MESSERI, presentata^(**) dal Socio A. CHIARUGI.

I canali resiniferi del legno delle Conifere sono stati oggetto di molte osservazioni sia da parte dei Botanici sia da parte dei Forestali, in considerazione dell'interesse economico delle resine che essi elaborano. Si distinguono in canali radiali, che si differenziano in seno ai raggi parenchimatici, e canali longitudinali, che si differenziano nei lunghi cordoni di parenchima longitudinale, che solcano la porzione tardiva della cerchia legnosa. Questi ultimi sono di mole di gran lunga più ragguardevole dei primi ed hanno in particolare attratto l'attenzione dei tecnici della resinazione. Tanto i primi quanto i secondi sono chiamati canali perché in essi si distingue un lume, delimitato da cellule elaboratrici di resina; ma realmente tutto il cordone parenchimatico in cui essi si organizzano, sia esso costituito da un raggio, sia costituito da una massa cilindrica di parenchima longitudinale, è formato da cellule resinogene, pur essendo esaltata questa caratteristica nelle cellule epiteliali che circondano il lume dei canali.

La proprietà di elaborare resina da parte del tessuto parenchimatico in generale è già stata notata nelle Conifere da alcuni Autori (Hannig 1922; Azinheira 1954); ce ne è fornita una prova ogni qual volta si provoca la formazione di canali resiniferi longitudinali patologici con ferite, in quanto essi si differenziano in serie tangenziali, dentro bande di parenchima continuo, le cui cellule sono tutte ripiene del caratteristico secreto. Il medesimo fenomeno si osserva nelle cellule dei raggi parenchimatici uniseriati, privi di canale centrale.

Tutti gli Autori che si sono occupati di queste strutture hanno considerato i canali resiniferi, ed in special modo quelli longitudinali, come strutture nelle quali la resina viene elaborata nelle cellule epiteliali che tappezzano il canale e viene espulsa successivamente nel lume (Munch 1919; Hannig 1922; Brown, Panshin and Forseith 1949; Harm 1953; Azinheira 1954; ecc.)⁽¹⁾.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1956.

(1) HANNIG, *Untersuchungen über die Harzbildung in Koniferennadeln*, «Zeitschrift zur Botanik», 14 Jahrgang, Heft 6, p. 385 (1922); H. HARM, *Erkenntnisse und neue Weg zur Steigerung der Harz*, «Allgemeine Forstzeitung», Jahrg. 64, Folge 19/20, pp. 243-249 (1953); E. MUNCH, *Naturwissenschaftliche Grundlagen der Kiefern Harz-Nutzung*, «Arbeiten aus der Biologischen Reichsabstalt für Land und Forstwirtschaft», Band 10, Heft I (1919); BROWN, PANSHIN and FORSEITH, *Textbook of Wood Technology*, vol. I, Mac Grow Hill, Comp., New York (1949); A. AZINHEIRA, *Lacunas Noções sobre a anatomia e fisiologia do sistema resinifero do lenho do Pinheiro bravo*. Ministério de Economia, Direcção Geral dos serviços Florestal e aquícolas. Estudos e Informação. N. 32, C3 Lisboa (1954).

A questo proposito riporterò quanto dice Harm (1953) sul meccanismo di fuoriuscita della resina dal legno durante la resinazione: « Se si apre un dotto resinifero, le cellule epiteliali aspirano acqua dalle parti legnose che le circondano e si rigonfiano, finché il dotto resinifero non sia in gran parte riempito mediante questo rigonfiamento ed abbia spinto la riserva di resina presente fino alla superficie esterna dell'albero verso la ferita. Le cellule secrete trici poi formano nuovo balsamo e riempiono di nuovo i dotti resiniferi, riassumendo così il loro aspetto normale, cioè compresso e svuotato ».

Nonostante queste asserzioni, nessuno però di questi Autori documenta la rappresentazione di un canale resinifero longitudinale ripieno di resina, come normalmente dovremmo vederlo. Hannig (1922) si è preoccupato di immobilizzare il secreto nel canale, fissando il materiale in acetato di rame ed acido cromico, che indurisce la resina. Con questo trattamento l'A. riesce ad evidenziare la resina nelle foglie di *Abies pectinata* sotto forma di fili colorati in verde azzurro, e ad isolare gli apparati secretori interi delle foglie, cosicché sembrerebbe che « il filo verde resinoso » di cui egli parla rappresentasse tutto il cordone secretore e non il contenuto del suo lume.

Da diversi anni mi sto occupando degli apparati secretori delle Conifere (Messeri 1948, 1949; Crivellari 1942)⁽²⁾ ed ho avuto occasione di osservare quelli normali di *Pinus Pinea* L., *Pinus Pinaster* Sol., *Pinus Halepensis* Mill., *Pinus Laricio* Poir e quelli patologici di *Abies alba* Mill. In tutti questi materiali ho sempre trovato i lumi dei canali resiniferi longitudinali del legno vuoti, come del resto appaiono in tutte le riproduzioni microfotografiche dei Trattati e delle Memorie particolari. Ho creduto quindi interessante illustrare in questa breve Nota alcuni aspetti dei canali resiniferi longitudinali del corpo legnoso di *Pinus Pinea* L., che dimostrano come il lume di questo apparato sia sgombrato di resina in condizioni naturali.

Il materiale su cui riferisco è rappresentato da campioni di alborno di tronchi adulti di *Pinus Pinea*, il cui legno è stato prelevato e fissato immediatamente in formolo del commercio al 10% sul luogo del prelievo (Foresta Demaniale di Cecina). Così fissati i tessuti si induriscono, ed anche le resine vengono immobilizzate nelle sedi in cui si trovavano al momento del prelievo.

I lumi dei canali resiniferi longitudinali in sezione trasversale (Tav. I, figg. 1, 3) si presentano spesso stirati e deformati. Le cellule che li delimitano hanno un contenuto variabile di resina, in forma di piccole gocce, in generale piuttosto scarse; le membrane di queste cellule, dalla parte del lume del ca-

(2) A. MESSERI, *L'evoluzione della cerchia legnosa in Pinus halepensis* Mill. in Bari, « Nuovo Giorn. Bot. It. », n. s., vol. LV, pp. 111-132 (1948); *Risultati delle resinazioni a raschietto in senso invertito sui Pino di Aleppo nella foresta di Patemisco Gallio, nel periodo maggio-ottobre 1949*, « Nuovo Giorn. Bot. It. », n. s., vol. LVI, pp. 709-713 (1949); *Osservazioni anatomiche su pini sottoposti a resinazione*, « Nuovo Giorn. Bot. It. », n. s., vol. LVI, pp. 313-327 (1949); D. CRIVELLARI, *Risultati di alcune modifiche apportate alla resinazione del Pino d'Aleppo col sistema del raschietto*, « Nuovo Giorn. Bot. It. », n. s., vol. LVI, pp. 713-716 (1949).

nale, sono molto sottili, si colorano facilmente con Ematossilina Delafield, non essendo lignificate, e non presentano punteggiature. A queste cellule epiteliali fa seguito esternamente una seconda cerchia di cellule a membrana più spessa, caratteristicamente lamellata, che reagisce pure positivamente alla Ematossilina Delafield, le cui membrane mostrano numerose punteggiature irregolari, che sono piuttosto dei punti di assottigliamento della membrana. Anche le cellule di questa guaina esterna sono ripiene di resina, anzi la resina vi è di regola più abbondante che nelle cellule epiteliali interne ed è soprattutto più vischiosa. Essa si raccoglie in masse solide; particolarmente attorno al nucleo. Non ho mai osservato la resina raccolta fra citoplasma e membrana (« resinogener Schicht » del Tschirch). Il lume del canale è sempre vuoto, però esso evidentemente è sede di una pressione che lo distende, e che si oppone validamente all'espandersi delle cellule che lo circondano.

In sezione longitudinale radiale (Tav. I, figg. 2, 4) ho ottenuto la visione dei canali resiniferi del legno su un lungo percorso, eseguendo sezioni abbastanza spesse da contenere almeno metà dello spessore del canale e scoperciarne solo l'involucro su un lato. In questa maniera, previo indurimento ed immobilizzazione della resina colla fissazione, dovrebbe apparire la resina nel lume se realmente vi fosse contenuta, se cioè al processo di elaborazione seguisse quello della sua escrezione nel dotto. Le fotografie che presento riproducono l'aspetto di sezioni dello spessore di μ 30, mediante le quali un canale è colpito longitudinalmente e scoperciato (il diametro medio di un dotto è di circa μ 60). Esplorando il lume è facile verificare che esso è completamente vuoto (figg. 2, 4). Siccome la resina rimane in blocchetti solidi, ogni qual volta una cellula secretrice viene interessata dal taglio ed il coltello ne trascina fuori in parte il contenuto, si ha in ciò la conferma che la resina è stata realmente immobilizzata nella sua sede naturale dal fissativo e cioè nelle cellule: se questa sede fosse il lume del canale ve la dovremmo ritrovare, e questo non avviene. Nelle sezioni radiali il canale resinifero ci appare attraversato dai raggi parenchimatici, che si accollano strettamente alle sue pareti determinandovi delle strozzature (figg. 2, 4); negli intervalli fra i raggi il canale si divarica un poco e quindi, a questo livello, lo vediamo scoperciato dal taglio, che mette in luce il suo lume vuoto. Sovente però nell'intervallo fra due raggi, o al lato di uno di questi, si osserva nel canale resinifero una apertura circolare (Tav. II, figg. 1, 2), delimitata da cellule epiteliali caratteristicamente disposte. Tali aperture sono state evidenziate anche dal Munch (1919), e da lui considerate come vie di comunicazione fra canali longitudinali e canali radiali. Io non sono riuscita ad osservare la continuità fra queste aperture ed il lume del canale secretore dei raggi, comunque, mai, neanche in questi lumi laterali, sono riuscita a notare della resina, sebbene ne siano ripiene le cellule secernenti che li delimitano. È molto probabile che queste aperture rappresentino realmente delle vie di comunicazione fra canali radiali e canali longitudinali, in quanto i raggi parenchimatici interessano sempre in gran numero il parenchima di un canale resinifero longitudinale, attraversandolo in profondità, come si vede dalle figg. 3, 4 della Tav. II.

In conclusione, in tutti questi spazi che sembrerebbero organizzati allo scopo di far spostare la resina nel corpo legnoso, sia in senso longitudinale sia in senso trasversale, non si trova traccia di secreto resinoso, che rimane invece immobilizzato nelle cellule che lo elaborano, finché non intervengono traumi.

È strano che sui fatti descritti nella presente Nota non sia mai stata richiamata l'attenzione prima di ora, sebbene numerosi siano stati gli Autori che si sono interessati di queste strutture.

Io penso che la sicurezza con cui il lume del canale resinifero è stato sempre considerato dagli Autori come la sede nella quale si riverserebbe appena formato il secreto delle cellule elaboratrici di resina, derivi dalla analogia morfologica fra queste strutture e quelle delle ghiandole a secrezione esterna degli animali, dove l'elaborato delle cellule secernenti si riversa nel dotto escretore ed in esso progredisce verso l'esterno. Tale analogia strutturale però non ne comporta una funzionale, in quanto dobbiamo ricordare che nel caso dei canali resiniferi del legno si tratta di un sistema assolutamente chiuso, i cui prodotti non vengono mai naturalmente escreti.

Il meccanismo del movimento della resina nei canali resiniferi sembra quindi ancora molto oscuro, nonostante le spiegazioni che si è tentato di darne. Su questo argomento ho in corso alcune esperienze in collaborazione coll'Istituto di Silvicultura della Facoltà di Agraria della Università di Firenze, che spero di concludere in breve tempo. Il movimento della resina nell'interno del corpo legnoso presenta un notevole interesse teorico, ma anche un notevolissimo interesse pratico, in rapporto allo sfruttamento delle resine mediante la tecnica della resinazione.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

TAVOLA I.

Tav. I. - Canali resiniferi longitudinali nell'alburno di *Pinus Pinea* L., colorati con Ematosilina Delafield e Sudan III, previo fissaggio in Formolo. Figg. 1, 3: canali in sezione trasversale ($\times 500$) Figg. 2, 4: canali in sezione longitudinale radiale ($\times 73$).

TAVOLA II.

Tav. II. - Canali resiniferi longitudinali dell'alburno di *Pinus Pinea* L., colorati con Ematosilina Delafield e Sudan III, previo fissaggio in Formolo. Fig. 1: sezione longitudinale radiale con un'apertura laterale fra i due raggi ($\times 73$). Fig. 2: particolare dell'apertura laterale ($\times 500$). Fig. 3: canale resinifero in sezione tangenziale, attraversato dai raggi ($\times 73$). Fig. 4: particolare della fig. 3 ($\times 500$).



Fig. 1.



Fig. 2.

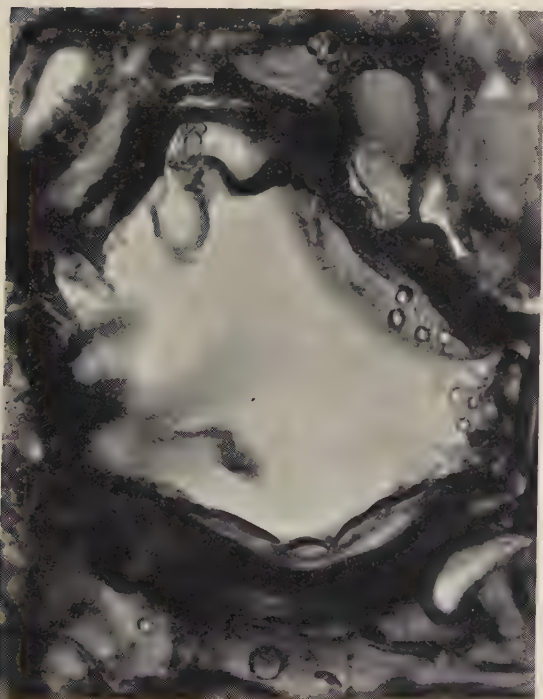


Fig. 3.



Fig. 4.

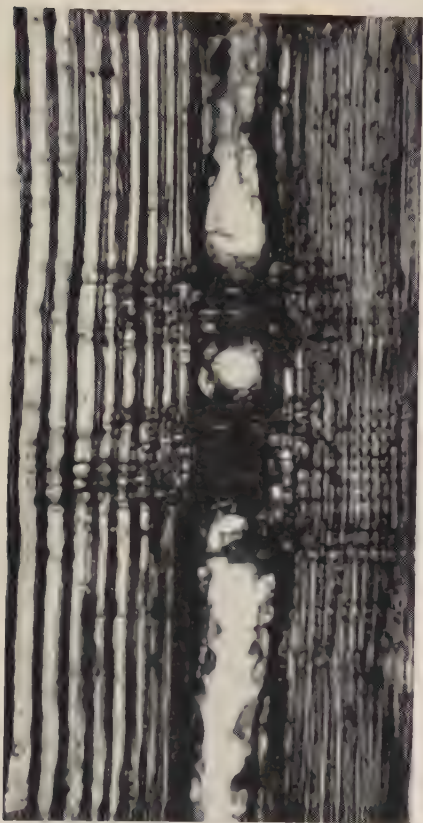


Fig. 1.

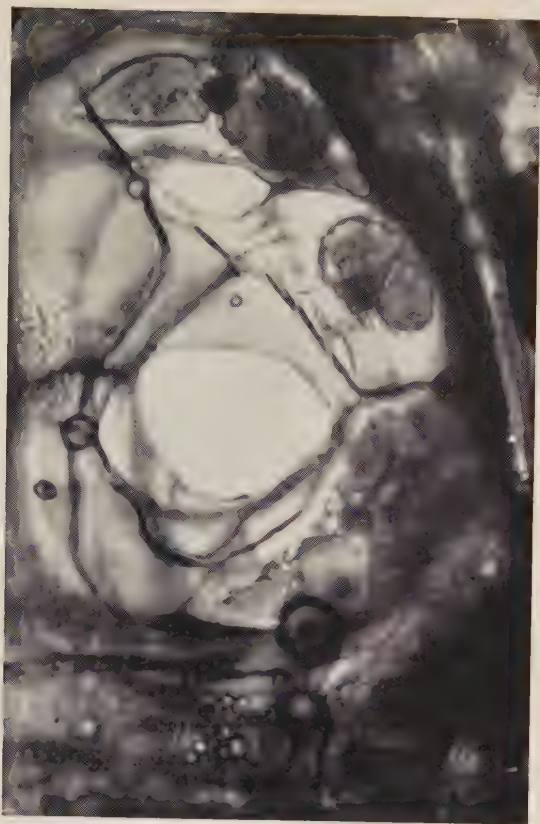


Fig. 2.

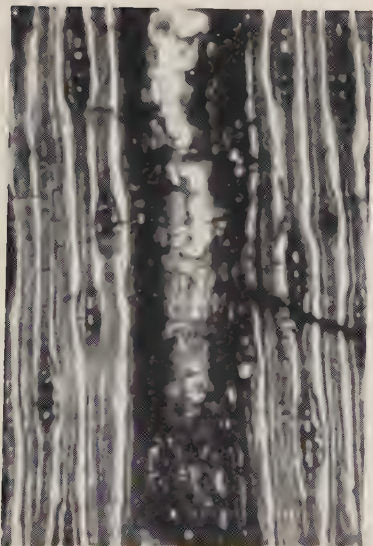


Fig. 3.



Fig. 4.

Embriologia. — *Osservazioni sull'accrescimento delle gemme e degli zooidi di « Botryllus schlosseri » (Pallas) [Ascidacea], in condizioni normali e sperimentali (*)*. Nota di ARMANDO SABBADIN, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

L'accrescimento delle gemme e degli zooidi, nelle colonie dei Botrilli, è stato studiato da Berrill⁽¹⁾. Alcune osservazioni sono state rese note anche da me in altro lavoro⁽²⁾. Berrill ha messo in evidenza un progressivo aumento delle dimensioni delle gemme e degli zooidi col succedersi delle generazioni.

Gli abbozzi delle gemme compaiono sul genitore, ai 2 lati, in forma di un ispessimento a disco di un tratto limitato della parete atriale, il quale successivamente si estroflette e si incurva a vescicola e quindi inizia l'organogenesi. In un certo numero di casi il disco, prima di completare la chiusura, può sdoppiarsi e si hanno così 2 gemme sullo stesso lato, anteriore e posteriore. Secondo le osservazioni di Berrill, nelle successive generazioni aumentano le dimensioni dell'abbozzo iniziale delle gemme, che perciò porta a vescicole progressivamente maggiori. I processi organogenetici iniziano così da unità di diversa grandezza, e le dimensioni delle gemme ai vari stadi di sviluppo e quelle dei blastozooidi che ne derivano aumentano di generazione in generazione. Il blastozoide funzionalmente maturo continua ad accrescersi e raggiunge le dimensioni massime poco prima di entrare in regressione.

L'accrescimento delle gemme (e dei blastozooidi da esse derivati) è naturalmente condizionato, oltre che dalle dimensioni iniziali, dalla quantità di nutrimento che ad esse affluisce dai genitori e dalla durata dei diversi stadi di sviluppo. Talora negli allevamenti eseguiti in laboratorio si manifestano fenomeni di sofferenza nei blastozooidi adulti delle colonie, i quali anticipano la loro regressione, che inizia così prima che essi abbiano terminato il loro accrescimento. Le gemme della prima delle 2 generazioni seguenti, coesistenti nella colonia accanto ai blastozooidi adulti, in questi casi anticipano il raggiungimento della maturità funzionale (Sabbadin, loc. cit.) e si hanno perciò blastozooidi adulti di dimensioni iniziali minori.

Spesso nelle colonie un certo numero di gemme, specialmente le posteriori, arrestano il loro sviluppo, e con esso l'accrescimento, ad un determinato stadio, e successivamente regrediscono. È da ritenere che tale fatto dipenda da una sorta di competizione nutritiva che si stabilisce fra le gemme

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata della Università di Padova, con un contributo del C.N.R. e della New York Zoological Society.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) N. J. BERRILL, *Size and morphogenesis in the bud of « Botryllus »*, « Biol. Bull. », 80, 185 (1941).

(2) A. SABBADIN, *Osservazioni sullo sviluppo, l'accrescimento e la riproduzione di « Botryllus schlosseri » (Pallas) in condizioni di laboratorio*, « Boll. Zool. » (in corso di stampa).

portate dallo stesso genitore. Questi rapporti di competizione sono stati da me dimostrati in altra Nota ⁽³⁾: asportando una delle gemme anteriori del blastozooide, a vari stadi di sviluppo e per più generazioni, si riesce ad impedire la regressione delle altre gemme presenti. Se l'asportazione viene eseguita prima che l'abbozzo delle gemme superstiti si sia richiuso a vescicola, esso genera un'altra gemma, e talora 2 altre gemme, in un numero molto maggiore di casi che non nei controlli.

Già ad una prima osservazione in questi esperimenti apparivano differenze notevoli nell'accrescimento delle gemme e dei blastozoidi fra la serie di controllo e le serie sperimentali. Esse vengono descritte in questa Nota.

Le osservazioni si riferiscono ad una serie di controllo di 14 colonie e a 3 lotti sperimentali rispettivamente di 12, 10 e 11 colonie, seguiti a partire dall'oozoide fino ai blastozoidi adulti della 7ª generazione. Nel 1º lotto sperimentale veniva eseguita, ad ogni successiva generazione blastogenetica, a partire dalla 2ª, l'asportazione di una delle gemme anteriori, alternativamente la destra e la sinistra, allo stadio 2 (gemma in forma di semisfera). Nel 2º esperimento l'asportazione veniva eseguita 24 h. dopo che era stato raggiunto lo stadio 2, e precisamente allo stadio 3 (vescicola chiusa) o in prossimità di esso. Nel 3º lotto sperimentale le gemme venivano estirpate 72 h. dopo il raggiungimento dello stadio 2, dopo che avevano superato lo stadio 4 (abbozzo delle camere branchiale e peribranchiali e del tubo digerente). In tutti e 3 gli esperimenti le gemme posteriori, se presenti, venivano asportate quando avevano raggiunto lo stadio 7 (comparsa sulla parete atriale degli abbozzi delle gemme della generazione seguente). Così ad ogni generazione nelle colonie in esperimento maturava l'unica gemma anteriore superstite ⁽⁴⁾.

Gli allevamenti sono stati eseguiti in stanza termostatica a 19°. Per questa temperatura la durata del ciclo vitale delle singole generazioni nella serie di controllo è dell'ordine di 17-18 giorni.

In tutti i lotti sono state prese le misure del diametro massimo delle gemme e dei blastozoidi delle varie generazioni, a partire dallo stadio 3, seriate di 24 in 24 h. Verranno qui considerate le sole misure riferentisi allo stadio 7 iniziale (prima dell'inizio dell'incurvamento dell'abbozzo delle gemme figlie), 8 iniziale (inizio delle pulsazioni del cuore) e terminale e 2 misure dello stadio 9 (blastozooide funzionalmente maturo), la prima presa quando le gemme figlie avevano raggiunto lo stadio 8 iniziale e la seconda alla fine dell'accrescimento o comunque 24 h. prima dell'inizio della regressione.

Nelle colonie la durata degli stadi 8 e 9, come ho già ricordato, non è costante, perché si può verificare un anticipo nella regressione dei blastozoidi allo stadio 9, cui corrisponde nelle gemme figlie un passaggio anticipato dallo stadio 8 allo stadio 9. Per contro, nelle serie sperimentali è stata spesso

(3) A. SABBADIN, *Studio sperimentale della gemmazione in « Botryllus schlosseri »* (Pallas), « Rend. Accad. Naz. Lincei », 20 (1956).

(4) Per maggiori indicazioni sugli esperimenti e sulla classificazione degli stadi di sviluppo, cfr. la Nota già citata, nei « Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei ».

notata una più lunga persistenza dei blastozoidi in condizioni di funzionalità, cui si accompagnava una maggiore durata dello stadio 8 nelle gemme della generazione immediatamente successiva. Questi 2 fenomeni opposti hanno avuto profonde ripercussioni sull'accrescimento massimo raggiunto dalle gemme e dai blastozoidi a tali stadi.

Tutte le misure sono state eseguite allo stereomicroscopio Zeiss con oculare micrometrico Reichert 6 \times combinato con i 2 obiettivi maggiori e l'obiettivo addizionale dello stereomicroscopio. Ai 2 differenti ingrandimenti

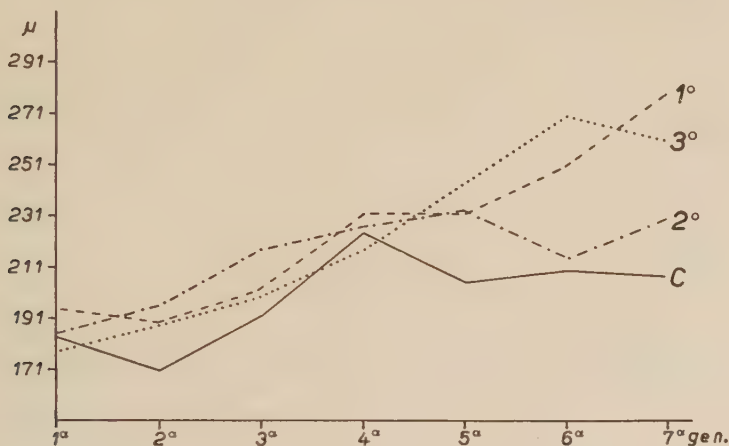


Fig. 1. — Accrescimento delle gemme della serie di controllo (C) e dei 3 lotti sperimentali (1°, 2° e 3°) allo stadio 7 iniziale, nelle diverse generazioni.

così realizzati, ciascuna divisione dell'oculare micrometrico corrispondeva rispettivamente a μ 17,5 e 27,5.

L'esame dell'accrescimento in tutte le serie mostra la tendenza generale all'aumento delle dimensioni sia delle gemme che dei blastozoidi ai vari stadi di sviluppo, con il passare delle generazioni, già segnalata da Berrill. Ciò è chiaramente visibile nelle figg. 1-5, specialmente per lo stadio 8 terminale (fig. 3) e lo stadio 9 (figg. 4-5). Il fenomeno mi è sembrato molto meno evidente per lo stadio 3. Solo un'ulteriore elaborazione statistica delle misure permetterà di apprezzare il grado di significatività delle differenze riscontrate a tale stadio.

Nelle prime generazioni in linea generale è stata notata una più breve durata degli stadi 8 e 9, e il minore accrescimento di questi stadi in tali generazioni è certamente in parte dovuto a questo fatto, poiché le gemme allo stadio 8 continuano ad accrescersi ininterrottamente fino al passaggio alla maturità funzionale e i blastozoidi allo stadio 9 nelle prime generazioni raramente giungevano ad un arresto dell'accrescimento e quindi al massimo accrescimento.

A stadi corrispondenti di sviluppo, nelle serie sperimentali le dimensioni delle gemme e dei blastozoidi sono maggiori che nella serie di controllo.

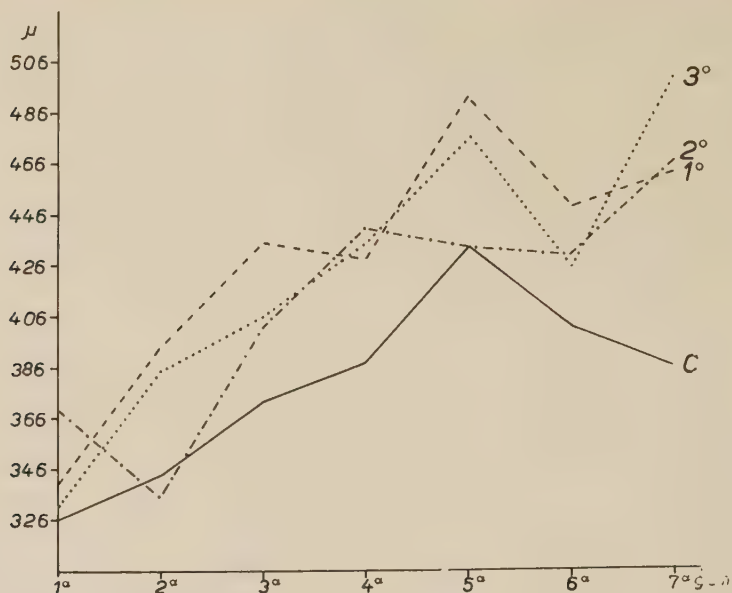


Fig. 2. - Accrescimento delle gemme della serie di controllo (C) e dei 3 lotti sperimentali (1°, 2° e 3°) allo stadio 8 iniziale, nelle diverse generazioni.

Nelle serie sperimentali, specialmente nelle ultime generazioni, nelle quali era costante la presenza di gemme posteriori, che nei controlli in genere non riuscivano a superare i primi stadi di sviluppo, l'unico blastozooide maturato presentava spesso un carico di gemme allo stadio 7 maggiore che nei controlli. A tale stadio le gemme posteriori giungevano frequentemente in

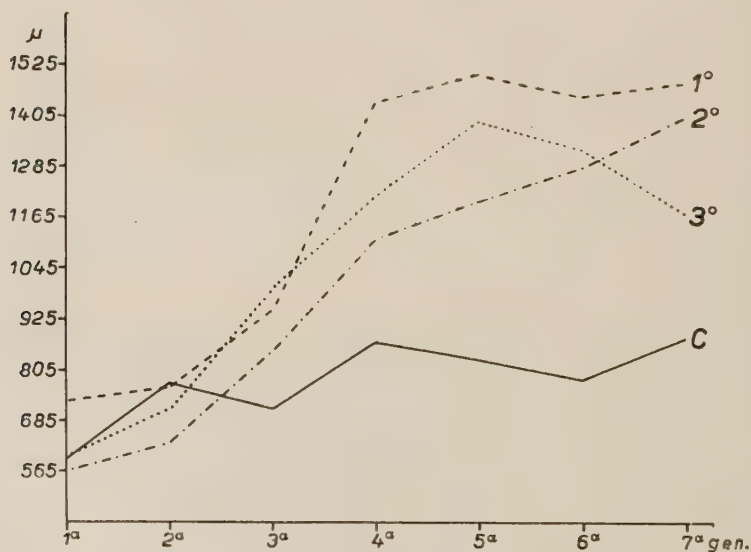


Fig. 3. - Massimo accrescimento delle gemme della serie di controllo (C) e dei 3 lotti sperimentali (1°, 2° e 3°) allo stadio 8, nelle diverse generazioni.

ritardo rispetto alla gemma anteriore superstite e spesso le gemme posteriori di sinistra vi arrivavano solo dopo che erano state asportate le posteriori di destra. Come si osserva nella fig. 1, nelle serie sperimentali vi è una graduale tendenza delle gemme allo stadio 7 a superare le dimensioni delle gemme di pari stadio della serie di controllo, che si rende evidente a partire dalla 2^a generazione, cioè dalla generazione sulla quale è stata iniziata l'asportazione delle gemme.

Evidenti differenze di accrescimento fra gemme delle serie sperimentali e quelle della serie di controllo si osservano pure allo stadio 8 (figg. 2-3),

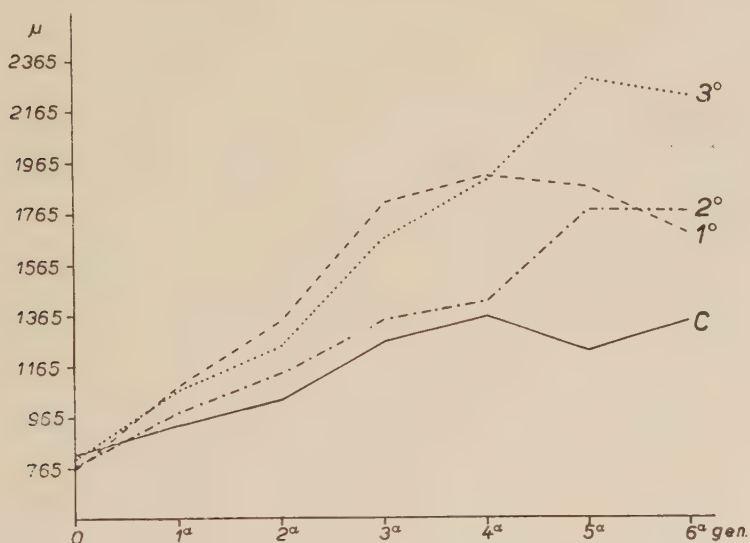


Fig. 4. — Accrescimento degli oozoidi (generazione 0) e dei blastozooidi delle diverse generazioni, al momento in cui le gemme della generazione successiva hanno raggiunto lo stadio 8 iniziale, nella serie di controllo (C) e nei 3 lotti sperimentali (1°, 2° e 3°).

quando, estirpate le gemme posteriori, il blastozooide adulto veniva a portare un'unica gemma a tale stadio.

Sia nei controlli che nelle serie sperimentali le gemme di sinistra crescevano quasi costantemente meno di quelle di destra e le gemme posteriori meno di quelle anteriori. Il fenomeno diveniva particolarmente evidente allo stadio 8, nel quale si verifica il massimo accrescimento della gemma, in seguito al differenziamento definitivo della branchia. Esso ha influenzato l'andamento delle curve delle figg. 2-3. Nella serie di controllo col passare delle generazioni un numero maggiore di gemme di sinistra raggiungevano lo stadio 8, e in rapporto a ciò si nota che l'incremento delle curve relative alla serie di controllo, costruite sulle misure delle gemme allo stadio 8, si arresta nelle ultime generazioni. Il fenomeno è pure evidente per le stesse gemme allo stadio 7, nella fig. 1. Analogamente nelle curve della fig. 2, relative alle serie sperimentali, si nota spesso una caduta in corrispondenza delle generazioni

2^a, 4^a, 6^a, nelle quali l'unica gemma superstite era appunto la sinistra. Per questa stessa ragione, verosimilmente, nella fig. 3 le curve relative alle serie sperimentali nella 2^a generazione si mantengono ancora al disotto di quella relativa alla serie di controllo.

Le differenze di accrescimento fra controlli e lotti sperimentali diventano veramente imponenti allo stadio 8 terminale (fig. 3) e allo stadio 9 (figg. 4-5). Per le gemme che stanno per giungere alla maturità funzionale (stadio 8 terminale), una sorgente cospicua di nutrimento è rappresentata dagli zooidi genitori che a questo stadio regrediscono e vengono appunto riassorbiti dalle gemme stesse. Poiché nelle serie sperimentali ad ogni generazione matu-

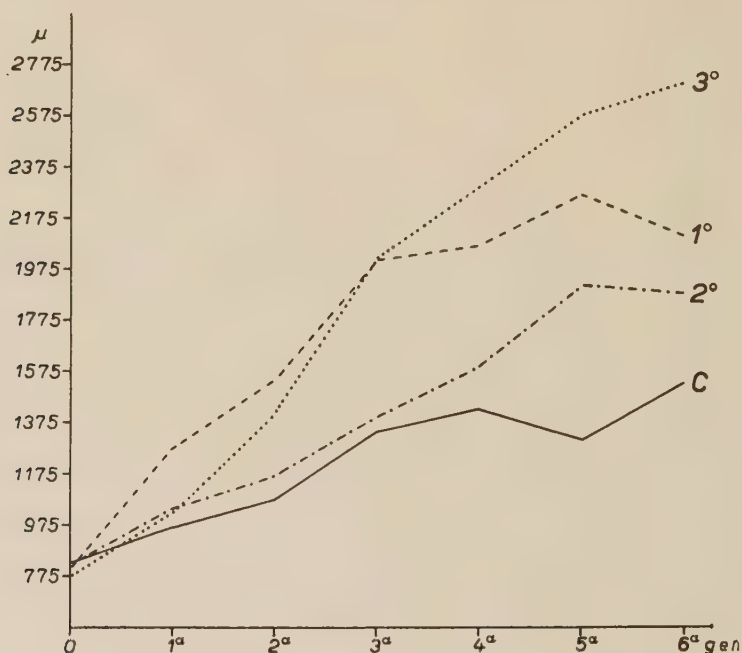


Fig. 5. - Massimo accrescimento degli oozoidi (generazione 0) e dei blastozooidi delle diverse generazioni nella serie di controllo (C) e nei 3 lotti sperimentali (1°, 2° e 3°).

rava un'unica gemma, essa veniva ad usufruire da sola di tutti i prodotti di degradazione del genitore, e si può ritenere che il suo maggiore accrescimento (fig. 3) ne sia dipeso in larga misura. Esso si mantiene e si accentua nei blastozooidi giunti da un paio di giorni alla maturità funzionale (fig. 4).

Tuttavia una notevole influenza sull'accrescimento delle gemme allo stadio 8 ha anche avuto la durata spesso maggiore di tale stadio nelle serie sperimentali. Mentre nella serie di controllo le misure che danno il massimo accrescimento delle gemme allo stadio 8 sono spesso quelle prese 48 h. dopo raggiunto lo stadio 8 iniziale, poiché alla successiva misurazione le gemme

erano già passate allo stadio 9, nelle serie sperimentali le stesse misure corrispondono spesso a quelle prese 72 h. e anche 4 ed eccezionalmente 5 e 6 giorni dopo lo stadio 8 iniziale. Per tutto questo periodo le gemme avevano infatti continuato ad accrescersi, permanendo allo stadio 8.

La più lunga durata dello stadio 8 delle gemme era condizionata da una più lunga persistenza dei genitori allo stato funzionale, prima dell'inizio della regressione. Nella serie di controllo le misure che danno il massimo accrescimento dei blastozoidi, prima dell'inizio della regressione o all'arresto dell'accrescimento stesso, sono quelle prese 48 h. dopo che le gemme della generazione immediatamente successiva avevano raggiunto lo stadio 8 iniziale, talora quelle prese dopo 24 h. e solo eccezionalmente dopo 72 h. Nelle serie sperimentali invece è stata spesso notata la persistenza dei blastozoidi allo stato funzionale per 3, 4 ed eccezionalmente 5 giorni dopo che le gemme figlie erano giunte allo stadio 8 iniziale. Spesso essi avevano continuato ad accrescersi per un periodo notevolmente maggiore che nei controlli, giungendo a dimensioni molto maggiori (fig. 5), che non sono giustificate solo dalle dimensioni maggiori raggiunte, al termine dello sviluppo, dalle gemme da cui essi avevano preso origine (fig. 3).

Questi fatti verrebbero a confermare l'ipotesi, già avanzata da altri Autori, che a determinare la regressione, e possiamo aggiungere anche l'arresto dell'accrescimento, nei blastozoidi adulti possa concorrere l'impossibilità del genitore di far fronte alle esigenze nutritive delle sue gemme nello stadio finale del loro sviluppo, che corrisponde anche al periodo del loro più rapido e maggiore accrescimento.

In tutti gli stadi considerati, non si notano sensibili differenze di accrescimento fra le 3 serie sperimentali. In tutte e 3 infatti si è sempre ripetuto lo stesso fatto della maturazione di un'unica gemma per generazione, il più importante ai fini dell'accrescimento.

Le osservazioni sull'accrescimento qui riferite e le osservazioni, già rese note, sull'intensità della gemmazione nelle stesse serie di colonie concordano nel dimostrare i rapporti di competizione che nelle colonie dei Botrilli si stabiliscono fra le gemme e fra le gemme e i blastozoidi adulti. In condizioni normali di allevamento i blastozoidi non riescono in genere a realizzare tutte le loro potenzialità blastogenetiche, per cui si formano abitualmente gemme posteriori in numero scarso e queste spesso non riescono a completare lo sviluppo, come succede talora anche alle gemme di sinistra. Nelle condizioni sperimentali indicate, l'intensità della blastogenesi è molto maggiore, e maggiore è la vitalità delle gemme formate. I blastozoidi riescono pienamente a sopperire alle richieste nutritive di tutte le loro gemme, e queste raggiungono dimensioni maggiori che nei controlli. Alleggerendo il blastozoe del carico di gemme, mediante l'asportazione di una parte di queste, esso può continuare il suo accrescimento per un tempo maggiore, e può persistere più a lungo in condizioni di funzionalità.

Zoologia. — *L'osmoregolazione nel « Tenebrio molitor » L. (Col. Tenebrionidae)* (*). Nota di GIORGIO MARCUZZI, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Desiderando vedere se negli adattamenti degli Insetti all'ambiente terrestre — e in special modo a quello desertico, che del primo è solo un aspetto estremo — rientra anche l'omeosmosi, alla stregua di quanto si verifica nei Vertebrati terrestri, ho preso in considerazione i Coleotteri Tenebrionidi, che tra gli Insetti — e in genere gli Invertebrati — sono tra i meglio adattati alla vita deserticola. Dopo aver determinato il valore della pressione osmotica e delle costanti chimiche e fisiche che sono connesse alla stessa (Marcuzzi, 1955) [1] ho creduto opportuno indagare se esiste o meno in questi animali un meccanismo osmoregolatore, anche perché mancavano finora ricerche di questo tipo negli Insetti e in genere negli Invertebrati terrestri. In questa ricerca che ha un carattere soltanto preliminare, ho scelto il *Tenebrio molitor* in quanto ch , pur non trattandosi di specie deserticola, offre delle caratteristiche fisico-chimiche dell'emolinfa particolarmente interessanti (cfr. Marcuzzi, loc. cit.), oltre al vantaggio della facilit  dell'allevamento. Conto per  di estendere in un secondo tempo queste ricerche a specie di Tenebrionidi provenienti da ambienti di varia umidit .

Ho voluto inoltre saggiare separatamente il comportamento della larva e dell'adulto, in considerazione della differente fisiologia dei due diversi stadi del ciclo biologico della specie.

MATERIALE E TECNICA.

Per ci  che si riferisce al metodo seguito nell'indagine, si rimanda il lettore al mio lavoro gi  citato su questo argomento (1). Gli esemplari studiati provenivano da ceppi di *T. molitor* allevati in laboratorio a umidit  e temperatura ambiente e alimentati con dieta standard a base di crusca, avena e lievito. Gli animali da esaminare erano mantenuti digiuni per un periodo di 5-8 giorni a umidit  costante e nota e a temperatura di laboratorio. Le umidit  erano ottenute con i metodi usati dagli Autori precedenti, e precisamente Bodenheimer (1931) e Wigglesworth (1941), secondo quanto segue:

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia Comparete della Universit  di Padova.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) Recentemente il metodo di determinazione dei cloruri, che in detto lavoro era indicato come inedito,   stato reso noto (cfr. RAMSAY, BROWN & CROGHAN).

Umidità relativa	Sostanza usata	Autore
0 %	Ca Cl anidro	Bodenheimer
10	H ₂ SO ₄ 66 %	»
40	» 48 %	»
60	» 39 %	»
76 soluzione	satura Na Cl	Wigglesworth
86 »	» K Cl	»
92 »	» tartrato neutro Na	»
95 »	» Ca (H ₂ PO ₄) ₂	»
100	acqua distillata	

RISULTATI.

Accanto alle variazioni della pressione osmotica del sangue (espressa come Δ), sono state determinate le seguenti caratteristiche fisico-chimiche: quantità d'acqua totale, contenuto in cloruri, aminoacidi (calcolati come N aminico) e zuccheri (o sostanze riducenti), oltre al peso specifico ⁽²⁾. Da un esame dei

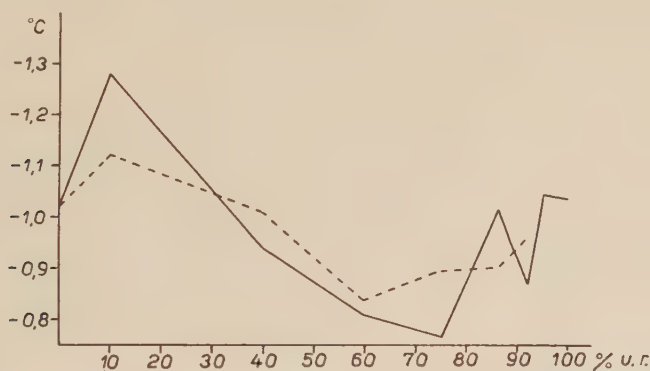


Fig. 1. - Variazioni del Δ in funzione dell'umidità ambiente (linea intera, larva; linea tratteggiata, adulto).

grafici ottenuti con i valori di dette caratteristiche in funzione dell'umidità ambiente, risulta in modo chiaro che nel *T. molitor* esiste solo un limitato potere osmoregolatore. Questo potere sembra si svolga particolarmente con valori di umidità intermedia (tra 40-60 e 92 %) mentre al disotto di 40-60 e al disopra di 92 % l'animale si comporta come un corpo fisico, in quanto al di sotto di 40 (o 60) perde gradatamente acqua, e oltre a 92 ne acquista dall'esterno. Ciò è particolarmente visibile dall'esame del Δ (fig. 1) e del conte-

(2) I valori qui esposti sono valori medi ottenuti da almeno 3 determinazioni (quantità d'acqua, Δ e cloruri), oppure rappresentano un valore medio in quanto risultato di una determinazione per cui si usò il sangue di almeno 3 esemplari (aminoacidi e zuccheri). Per il peso specifico del sangue si fecero soltanto due serie di prove, che non coprivano nemmeno tutta la scala dei valori d'igrometria, e pertanto i dati relativi sono meno attendibili degli altri.

nuto del corpo in acqua (fig. 2), per le quali costanti si hanno delle curve che sono pressapoco l'immagine speculare l'una dell'altra. (Ciò vale soprattutto per la larva). Il comportamento dei liquidi interni (e in genere dell'acqua)

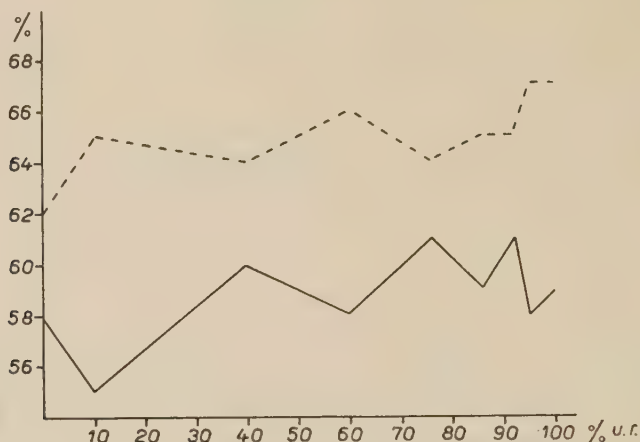


Fig. 2. - Variazioni del contenuto del corpo in acqua (in percentuale) in funzione della umidità ambiente (linea intera, larva; linea tratteggiata, adulto).

del *T. molitor* rispetto all'umidità ambiente sembra si rifletta anche sul peso specifico del sangue (fig. 3), che avrebbe un valore maggiore ad umidità ambiente minore, indicando una concentrazione maggiore dei soluti del sangue stesso.

Se osserviamo ora il comportamento dei principali gruppi di soluti responsabili del Δ del sangue, cloruri, aminoacidi e zuccheri (sostanze riducenti)

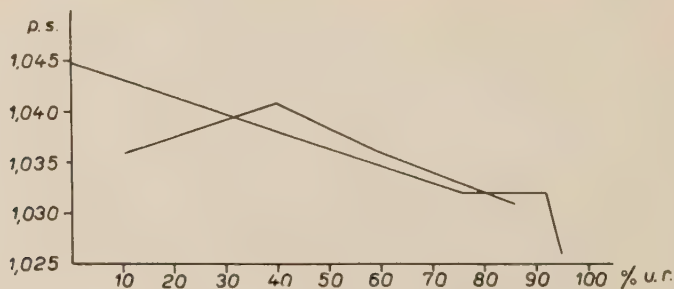


Fig. 3. - Peso specifico del sangue in funzione dell'umidità ambiente (due serie di prove per la sola larva).

(figg. 4, 5 e 6), risulta che, mentre gli zuccheri seguono molto da vicino l'andamento del Δ , si dà pensare che non ci sia alcun meccanismo che mantenga costante la quantità di queste sostanze, per i cloruri e ancor più per gli aminoacidi sembra ci sia un certo grado di regolazione per cui i cloruri seguono solo molto relativamente l'andamento del Δ (evidente è il parallelismo solo

tra 0 e 40 % di umidità relativa), mentre nell'insieme sembra siano indipendenti dall'umidità esterna. Gli aminoacidi poi sembra addirittura che abbiano un comportamento opposto a quello degli zuccheri, sia nella larva che nell'adulto, per cui si potrebbe pensare ad un meccanismo compensatore grazie al quale il Δ si potrebbe mantenere dentro certi limiti più o meno costanti.

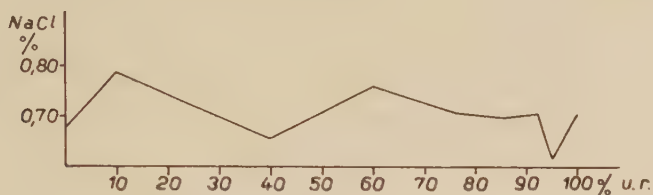


Fig. 4. - Variazione dei cloruri del sangue in funzione dell'umidità ambiente (larva).

Si concluderebbe da ciò che in *T. molitor* c'è un limitato potere di osmoregolazione soprattutto per i valori intermedi di umidità (da 40-60 a 92 %). Questa regolazione sarebbe data da un meccanismo finora sconosciuto che regola la quantità di aminoacidi e, secondariamente, di cloruri del sangue.

DISCUSSIONE.

Il problema dell'osmoregolazione negli Insetti terrestri è stato studiato, con metodo ormai superato, dalla Monti [3], la quale, nel suo fondamentale lavoro del 1914, riferisce anche sulle ricerche precedenti, come quelle di Back-

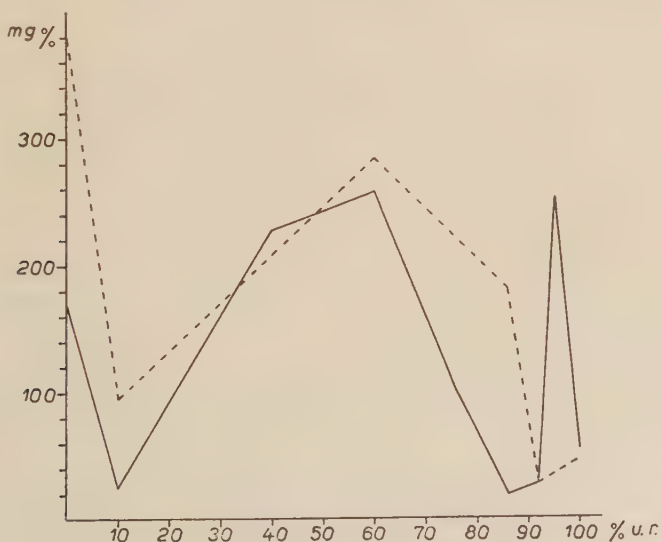


Fig. 5. - Variazione degli aminoacidi del sangue in funzione dell'umidità ambiente (linea intera, larva; linea tratteggiata, adulto).

man. Successivamente il problema non è stato più ripreso, se si eccettuano delle notizie frammentarie in alcuni AA., come Polimanti o Rouschal. Altre osservazioni riguardano invece l'effetto dell'umidità ambiente sul contenuto del corpo in acqua, costante che naturalmente sta in rapporto con la pressione osmotica del sangue, e quindi ha una certa importanza in connessione al problema da me trattato: vedi ad esempio Berger, Bodine, Buxton (1930) e, ultimamente, Govaerts & Leclercq.

Molto studiate sono state invece numerose specie di Invertebrati - tra cui anche vari Insetti - acquatici, sia d'acqua dolce che marina o salmastra,

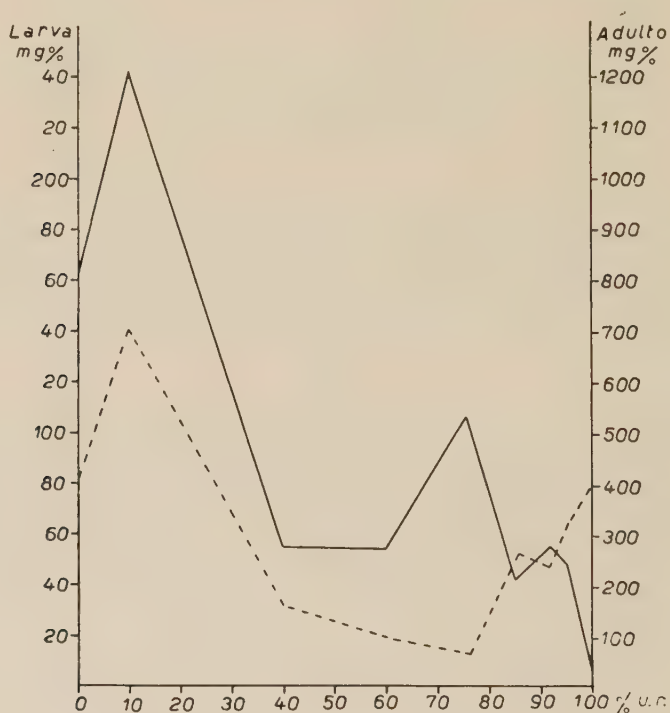


Fig. 6. - Variazione degli zuccheri del sangue in funzione dell'umidità ambiente (linea intera, larva; linea tratteggiata, adulto).

ma i risultati ottenuti per queste specie non sono in linea generale comparabili con quelli che si hanno nello studio di un Insetto terrestre. Recentemente Zwicky [4] ha studiato l'osmoregolazione nella larva della *Drosophila melanogaster*, ma i costumi di questo animale lo fanno rientrare nelle forme acquatiche e i risultati ottenuti da detto A. verranno discussi a proposito delle specie acquatiche.

Come si è detto, l'aspetto meglio conosciuto del fenomeno osmoregolatore è quello inerente la quantità d'acqua. Buxton (1930) dimostra che la larva di *T. molitor* può mantenere le proporzioni d'acqua del suo corpo quasi costanti durante un mese di digiuno a umidità da 0 a 60% u.c. « Sembra che essa possa far ciò - dice Buxton - consumando qualche sostanza accumulata e

trattenendo l'acqua prodotta nel metabolismo » (p. 576 sgg.). Ciò sarebbe in evidente contrasto con i risultati delle mie esperienze. Ammesso che la tecnica di Buxton fosse adeguata, si dovrebbe concludere trattarsi di un comportamento diverso da quello da me osservato: le differenze sono eventualmente da imputarsi alla durata diversa del periodo sperimentale, in quanto sembra che col digiuno si possa avere un'idrope dipendente dall'accumulo di acqua metabolica, come sarebbe stato dimostrato da Robinson per i Coleotteri Curculionidi *Sitophilus oryzae* e *S. granarius*, condizione che, se reale, rispecchierebbe un metabolismo anomalo proprio del digiuno di questi animali che vivono a spese di un alimento eccezionalmente secco⁽³⁾. Da osservare del resto che, secondo Buxton (1932), Sweetman in *Phyllophaga* e Speicher in *Ephestia* hanno riportato un comportamento simile a quello da lui rilevato in *Tenebrio*. Analogamente alla divergenza tra i dati di Buxton e i miei, AA. posteriori a Speicher (Auber & Raymont) hanno avuto risultati diversi rispetto a quelli di Speicher, in quanto essi riscontrarono a basse umidità una quantità d'acqua minore che a umidità elevate. Il reperto di Auber & Raymont è tanto più significativo ai nostri fini, in quanto essi osservarono in *Ephestia* un comportamento molto analogo a quello che si ha in *T. molitor*, notandosi anche in quella specie di Insetto una dipendenza del contenuto d'acqua del corpo dell'umidità ambiente maggiore nella larva che nell'adulto. Quest'ultimo quindi sembra possieda un maggiore potere di controllo del contenuto d'acqua e, come si potrebbe forse aggiungere alla luce delle mie presenti esperienze, del Δ del sangue.

Certamente il comportamento della quantità d'acqua è molto variabile. Buxton (1932) diceva che « né il deficit di saturazione, né alcuna altra misura dell'umidità atmosferica spiega la perdita d'acqua a diverse umidità e per ogni temperatura ». Dipende da ciò la difficoltà di sperimentare, come pure la difficoltà di tirare delle conclusioni sicure e definitive da un'esperienza sull'osmoregolazione in un insetto terrestre.

Bodine ha sperimentato con ninfe di Ortotteri, e sebbene i suoi risultati non siano utilizzabili in modo sintetico o grafico, perché le ricerche sono state condotte con metodo ormai superato, pare che a basse umidità le ninfe di Ortotteri perdono in peso (e in acqua), mentre ad alte umidità esse sono capaci di assumere acqua direttamente dall'ambiente, aumentando così pure di peso. Secondo questo A., Breitenbrecher (1918) avrebbe ottenuto risultati analoghi per la *Doriphora decemlineata*.

(3) ROBINSON ha notato che, quando un *Sitophilus* è alimentato con grano a contenuto scarssissimo d'acqua, si ha un aumento nel contenuto d'acqua del corpo dell'insetto. La ragione di ciò secondo ROBINSON (pp. 18-19) è che il grano che contiene meno di una certa quantità d'acqua è sfavorevole al *Sitophilus*, e di conseguenza i processi metabolici di questo sono disturbati. Ciò produce una insolita demolizione di certi tessuti, come i grassi, e determina un eccesso di CO₂ e di acqua come prodotti finali del metabolismo. Dal momento che questo insetto normalmente usa piccole quantità d'acqua, il suo potere d'eliminazione è probabilmente limitato, dimodoché l'acqua prodotta in eccesso non può essere eliminata tanto rapidamente come viene prodotta, e si accumula all'interno del corpo.

Ricerche invece i cui risultati non sembrano conciliabili con i miei, sono quelle di Govaerts & Leclercq [5]. Secondo questi due AA., in *Tenebrio molitor* adulto si ha perdita di peso, se esso digiuna in aria satura di vapor d'acqua, mentre nella larva si ha acquisto in peso. Io ho osservato invece un comportamento diverso, in quanto da 95 a 100 % di umidità relativa si ha nella larva un relativo aumento, nell'adulto una condizione stazionaria. Se confrontiamo però l'andamento da 76 a 100 %, abbiamo nelle larve perdita, nell'adulto acquisto, cosa che dimostra che l'equilibrio igrico dipende da molte condizioni del momento, interne ed esterne, e che in esperimenti diversi si possono ottenere risultati anche molto differenti.

Nel 1948, poi, Leclercq [6] sostiene che in larve digiunanti a scarsa umidità si ha produzione di acqua metabolica che «compensa in buona parte» le perdite eccessive di acqua dovute alla traspirazione: anche in questo caso può darsi che le condizioni sperimentali siano state diverse da quelle in cui ho lavorato io, ma la mancanza di un'indicazione in merito da parte di Leclercq ci impedisce qualsiasi congettura. (I risultati di questo A. per gli adulti sono simili, e quindi sono aperti alla stessa obiezione).

Venendo ora al problema dell'osmoregolazione vera e propria, ci troviamo nell'impossibilità di esaminare i nostri dati da un punto di vista comparativo, causa la mancanza pressoché totale di ricerche precedenti su Invertebrati terrestri, con eccezione forse per le ricerche di Rouschal. Le esperienze di Rouschal, sebbene condotte con una metodica molto diversa da quella da me usata, possono trovare forse un certo riscontro con le mie per quello che si riferisce alla specie di Tenebrionide da lui investigata, *Gnaptor spinimanus*, per la quale si ha un aumento del Δ del sangue che segue da vicino la perdita d'acqua del corpo. I suoi risultati in questo caso non permettono di concludere — come fa egli — che «le oscillazioni notevoli del contenuto di acqua degli Insetti indicano che la quantità d'emolinfa mostra forti oscillazioni, senza che lo stato di imbibizione del plasma o la pressione osmotica del sangue siano variate» (vedi anche citazione di Kühnelt). Da queste premesse fondamentalmente erranee, Rouschal giunge a dire — senza alcuna base sperimentale — che anche la massa di sangue diminuisce, lasciando però intatto il Δ , da cui si dedurrebbe che forse si ha «immagazzinamento di sali e sostanze osmoattive nei tessuti».

Se ci rivolgiamo invece agli Invertebrati — compresi numerosi Insetti — acquatici, troviamo allora un'abbondante letteratura in merito.

Precisamente, sembra che tra gli Insetti acquatici quelli che vivono in acque salmastre possiedono un potere osmoregolatore molto notevole, che può stare alla pari con quello di certi Vertebrati; le forme tipicamente d'acqua dolce, invece, sono quasi prive di potere osmoregolatore (cfr. Wigglesworth, 1953). Nella *Drosophila melanogaster* (larva), Zwicky trova un comportamento analogo a quello degli Insetti d'acque salmastre: precisamente, si ha regolazione in acqua ipotonica, mentre l'animale non regola in soluzioni ipertoniche (soluzioni 1-2 M di Na Cl).

Un altro gruppo di Invertebrati terrestri nei quali è stata studiata l'osmoregolazione o fenomeni a questa connessi è quello degli Isopodi terrestri. In *Ligia oceanica*, la Parry trova che ad una diminuzione dell'umidità relativa segue una rapida perdita d'acqua con conseguente aumento del Δ (da 2,12 a 3,48 °C); viceversa in ambiente saturo d'acqua si ha caduta del Δ da 2,12 a 1,44 °C. Più recentemente, Bursell trova che nell'Isopodo terrestre *Oniscus asellus*, animale fra i Crostacei meglio adattati alla vita nell'ambiente terrestre, si ha un aumento del Δ del sangue parallelo al disseccamento, che fa pensare all'andamento del fenomeno in un corpo inanimato e alla mancanza assoluta di osmoregolazione.

Per ciò che si riferisce infine agli Aracnidi, Palmgren nota in *Dolomedes fimbriatus* una cospicua perdita d'acqua in dipendenza della diminuzione dell'umidità ambiente: siccome però questo A. non indica i risultati dei suoi esperimenti in modo sintetico, riesce difficile precisare la perdita d'acqua (espressa come percentuale del peso corporeo) per le diverse umidità.

Per gli Acari, infine, il lavoro di McLeod dimostra che in *Ixodes ricinus* si ha perdita d'acqua a basse umidità, particolarmente notevole a 0% di u. r., forse per un'impossibilità di chiudere gli stigmi. Interessanti sono le differenze riscontrate nei diversi stadi di sviluppo (larva, ninfa e adulto).

In quanto al meccanismo osmoregolatore, per il momento mi sono limitato ad indagare le variazioni delle concentrazioni dei principali responsabili della pressione osmotica, cloruri, aminoacidi e zuccheri. Da un confronto con i dati di Zwicky, risulta che nella larva di *Drosophila melanogaster* ci sarebbe un compenso tra aumento di cloruri e diminuzione di aminoacidi e, secondariamente, di zuccheri. Si hanno secondo questo A. anche esempi di «super-compensazione». L'osmoregolazione in soluzioni ipotoniche sarebbe secondo Zwicky una regolazione attiva.

Altre ricerche sulle variazioni delle sostanze responsabili del Δ del sangue sono poi quelle antiche di Wigglesworth (1938) [7], dalle quali si deduce che gli aminoacidi hanno una grande importanza nell'osmoregolazione, quelle di Beadle & Shaw (1950) e infine quelle di Schoffeniels sull'andamento della cloremia nell'osmoregolazione.

CONCLUSIONI.

Dalle mie osservazioni, come si è visto, si deduce che c'è un comportamento diverso nella larva e nell'adulto. Nella prima c'è nell'insieme una certa concordanza tra quantità d'acqua del corpo, da una parte, e Δ , rispettivamente concentrazione degli zuccheri del sangue, dall'altra. Tale concordanza è visibile soprattutto per i valori bassi d'igrometria, per cui si deduce che in atmosfera secca manca una osmoregolazione e l'animale si comporta alla stregua di un corpo fisico. (Per indagare tale parallelismo intendo anzi usare in un secondo tempo il metodo dei modelli inanimati). A valori più elevati d'igrometria (sopra 60%) si ha un minor parallelismo tra le varie costanti

chimico-fisiche, per cui bisogna pensare a dei meccanismi fisiologici che funzionano diversamente a seconda che si tratti di concentrare, rispettivamente di diluire, i soluti del sangue o di assumere acqua dall'esterno.

La grande irregolarità della risposta - come si è già visto - della quantità d'acqua del *T. molitor* di fronte alle variazioni dell'umidità ambiente, ci consiglia di approfondire l'esame, anche perché intendo continuare queste ricerche e quindi mi riservo d'illustrare meglio in un secondo tempo questi aspetti del fenomeno osmoregolatore.

Nell'adulto, a parte il fatto che c'è un potere maggiore, c'è una minor concordanza tra i vari fenomeni rispetto alla larva, la qual cosa fa pensare ad un meccanismo osmoregolatore d'verso nei differenti stadi del ciclo biologico di questo Insetto. Degno di nota è purtuttavia l'andamento della quantità degli zuccheri parallelo a quello del Δ , e il comportamento dell'N aminico che segue da vicino quello della larva, e quindi fa pensare ad un fenomeno di compensazione rispetto agli zuccheri.

In realtà si può concludere come concludeva la Monti (p. 424), quando diceva che «negli Insetti l'ambiente esterno e le variazioni dell'alimentazione esercitano, sia pure entro limiti più o meno definiti, una influenza notevole sulla pressione osmotica dell'ambiente interno», dimostrando così che gli Insetti terrestri presentano solo una omeosmosi «molto incompleta» (p. 441). È molto degno di nota che nella stessa specie (*Tenebrio molitor*) si hanno notevoli differenze tra due stadi di sviluppo diversi (larva, rispettivamente adulto).

BIBLIOGRAFIA CITATA.

- [1] MARCUZZI G., *Osservazioni fisico-chimiche sul sangue dei Coleotteri Tenebrionidi.* - I. *La pressione osmotica nel «Tenebrio molitor» L.*, questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. XVIII, 654 (1955).
- [2] RAMSAY J. A., BROWN R.H.J. & CHROGAN P. C., *Electrometric titration of chloride in small volumes*, «J. exp. Biol.», 32, 822 (1955).
- [3] MONTI R., *La variabilità della pressione osmotica nelle diverse specie animali*, «Atti Soc. It. Sc. Nat.», 53, 391 (1914).
- [4] ZWICKY K. T., *Osmoregulatorische Reaktionen der Larve von «Drosophila melanogaster»*, «Z. vergl. Physiol.», 36, 367 (1954).
- [5] GOVAERTS J. & LECLERCQ J., *Water exchange between Insects and air moisture*, «Nature», 157, 483 (1946).
- [6] LECLERCQ J., *Métabolisme de l'eau chez un insect a régime alimentaire sec, «Tenebrio molitor»*, «Arch. Intern. Physiol.», 56, 110 (1948).
- [7] WIGGLESWORTH V. B., *The regulation of the osmotic pressure and chloride concentration in the haemolymph of the mosquito larva*, «J. exp. Biol.», 15, 235 (1938).

Fisiologia. — *Meccanismi estracerebellari nella regolazione reciproca delle risposte posturali alla stimolazione della corteccia vermiciana del « lobus anterior »* (*). Nota di OTTAVIO POMPEIANO, presentata (**) dal SOCIO G. C. PUPILLI.

La stimolazione della corteccia cerebellare vermiciana del *lobus anterior* di un lato produce inibizione della rigidità da decerebrazione, seguita da rimbalzo estensorio, negli arti ipsilaterali [Löwenthal e Horsley ⁽¹⁾, Sherrington ⁽²⁾, Bremer ⁽³⁾]. Le risposte degli arti contralaterali all'emiverme stimolato consistono, secondo alcuni AA., in una meno netta diminuzione della rigidità estensoria [Löwenthal e Horsley ⁽¹⁾, Sherrington ⁽²⁾, Bremer ⁽³⁾, Stella ⁽⁴⁾, Moruzzi ⁽⁵⁾], secondo altri in un aumento della rigidità medesima [Bremer ⁽³⁾, Stella ⁽⁴⁾, Hampson, Harrison e Woolsey ⁽⁶⁾, Sprague e Chambers ⁽⁷⁾]. Queste risposte contralaterali sono in ogni caso seguite, al cessare dello stimolo, da un rimbalzo di segno opposto. La ricerca delle vie efferenti per cui si effettuano le risposte crociate degli arti alla stimolazione dell'emiverme contralaterale, ha portato a risultati non sempre univoci. Mentre generalmente si conviene che l'inibizione della rigidità estensoria negli arti ipsilaterali, rispetto all'emiverme stimolato, non è abolita da una sezione mediana sagittale totale del *lobus anterior* [Bremer ⁽³⁾, Stella ⁽⁴⁾, Moruzzi ⁽⁸⁾], non v'è accordo circa agli effetti che tale intervento provoca nelle risposte degli arti del lato opposto; le quali risposte sarebbero abolite secondo alcuni AA. [Löwenthal e Horsley ⁽¹⁾, Bremer ⁽³⁾], al contrario conservate secondo altri [Stella ⁽⁴⁾, Moruzzi ⁽⁵⁾]. Si è inoltre visto [Ingersoll, Magoun e Ranson ⁽⁹⁾] che, dopo emisezione del primo segmento cervicale del midollo spinale, la stimolazione della porzione mediale di entrambe le metà del cervelletto non evoca risposte negli arti ipsilaterali rispetto alla sezione spinale, mentre è presente la risposta degli arti contralaterali.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Bologna e Pisa.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) V. LÖWENTHAL a. V. HORSLEY, « Proc. roy. Soc., London (B) », LXI, 20 (1897).

(2) C. S. SHERRINGTON, « J. Physiol. », XXII, 319 (1898).

(3) F. BREMER, « Arch. internat. Physiol. », XIX, 189 (1922).

(4) G. STELLA, « Atti Soc. med.-chir. Padova », XXIII, 5 (1944).

(5) G. MORUZZI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXIV, 755 (1948); « J. Physiologie », XLI, 371 (1949).

(6) J. L. HAMPSON, C. R. HARRISON a. C. N. WOOLSEY, « Feder. Proc. », IV, 31 (1945); « Res. Publ. Ass. nerv. ment. Dis. », XXX, 299 (1952).

(7) J. M. SPRAGUE a. W. W. CHAMBERS, « J. Neurophysiol. », XVI, 451 (1953); « Amer. J. Physiol. », CLXXVI, 52 (1954).

(8) G. MORUZZI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXIV, 756 (1948).

(9) E. H. INGERSOLL, H. W. MAGOUN a. S. W. RANSON, « Amer. J. Physiol. », CXVII, 267 (1936).

Con la presente ricerca sono stati studiati i meccanismi delle risposte posturali crociate degli arti a stimolazioni della corteccia vermiana del *lobus anterior* [lobuli IV e V di Larsell ⁽¹⁰⁾] nel Gatto decerebrato. Gli esperimenti sono stati eseguiti complessivamente su 92 Gatti, di cui 38 sottoposti a distruzione elettrolitica cronica, totale o parziale, del nucleo del tetto di un lato. Gli animali venivano decerebrati con una sezione inter- o retrocolliculare.

La stimolazione unilaterale della corteccia vermiana del *lobus anterior* con impulsi rettangolari a 300/sec, 1 msec, di 0,3-0,5 V (voltaggi liminari) produce effetti inibitori ipsilaterali, non accompagnati da alcuna risposta degli arti del lato opposto. L'inibizione degli arti ipsilaterali si accompagna non costantemente a effetti aumentatori contralaterali, quando il voltaggio viene elevato a 0,8 V. Un aumento del voltaggio oltre 0,8 V produce, in ogni caso, effetti inibitori non solo sulla rigidità ipsilaterale, ma anche sull'ipertono estensore contralaterale, sia pure in misura minore.

Gli effetti inibitori scompaiono dopo i seguenti interventi acuti, eseguiti contralateralmente all'emiverme stimolato: a) distruzione, mediante aspirazione, dell'emicorteccia vermiana del *lobus anterior*; b) distruzione elettrolitica rostrale o totale del nucleo del tetto; c) sezione dei tre peduncoli cerebellari; d) distruzione elettrolitica elettiva del peduncolo cerebellare inferiore; e) emidecerebellazione completa. Gli effetti inibitori crociati sono assenti, anche quando la distruzione rostrale o totale del nucleo del tetto contralaterale al lato stimolato è stata eseguita cronicamente. Nelle nostre osservazioni, i controlli istologici hanno dimostrato, in tutti i casi, la perfetta integrità dei nuclei del tronco dell'encefalo e in particolare dei nuclei vestibolari.

La stimolazione dell'emiverme contralaterale al lato della lesione produce, dopo questi interventi, effetti inibitori negli arti ipsilaterali all'emiverme stimolato e nettissimi effetti aumentatori negli arti contralaterali, per gli stessi voltaggi che applicati prima delle lesioni producevano effetti inibitori generalizzati ai quattro arti. La stimolazione effettuata nella medesima corteccia vermiana con 0,5-0,6 V, produce solo effetti ipsilaterali, esattamente come all'inizio dell'esperimento.

Le risposte facilitatrici crociate si osservano per tutta la durata dell'esperimento (fino a 4 h dalla lesione). Le condizioni di tono muscolare non modificano il segno della risposta: gli effetti facilitatori crociati si osservano, infatti, sia nei casi in cui il tono estensore degli arti in esame è aumentato, sia in quelli in cui il tono è diminuito.

Gli effetti aumentatori contralaterali, e ovviamente quelli inibitori ipsilaterali, si ottengono dall'emiverme del lato sano con gli stessi voltaggi anche dopo aspirazione completa del mesencefalo e sezione sagittale del ponte.

In animali decerebrati e con cervelletto integro, un'emisezione acuta o cronica (2 giorni) del midollo spinale tra C_{IV} e C_V abolisce la rigidità estensoria degli arti di questo lato [conferma di Sherrington ⁽²⁾], mentre l'emiverme corrispondente al lato della sezione midollare risulta ineccitabile [conferma di Inger-

(10) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », XCIX, 135 (1953).

soll, Magoun e Ranson ⁽⁹⁾], almeno con voltaggi liminari. Solo per voltaggi sopraliminari, la stimolazione di questo emiverme produce l'inibizione del tono estensore degli arti contralaterali, dovuta forse ad attivazione della corteccia vermiiana del lato opposto. In questo preparato, la stimolazione dell'emiverme corrispondente al lato sano produce soltanto l'inibizione del tono estensore degli arti ipsilaterali, ma non determina alcuna risposta degli arti contralaterali, anche con voltaggi di stimolazione assai elevati (fino a 6 V).

Dalle presenti ricerche risulta che la stimolazione leggermente sopraliminare della corteccia vermiiana del *lobus anterior* produce non soltanto effetti inibitori del tono estensore degli arti ipsilaterali, mediante attivazione del sistema cortico-fastigio-bulbare diretto, ma anche effetti aumentatori contralaterali. Questi ultimi vengono per altro nascosti dall'irradiazione dell'effetto inibitore agli arti contralaterali, che si osserva già per voltaggi di poco superiori. L'irradiazione degli effetti inibitori al lato opposto è verosimilmente dovuta all'attivazione, attraverso fibre di associazione intracerebellari, dell'emiverme contralaterale al lato stimolato e del corrispondente sistema inibitore cortico-fastigio-bulbare diretto. L'interruzione di questo sistema a un qualsiasi livello (corticale, fastigiale o ai peduncoli cerebellari) produce infatti la ricomparsa degli effetti facilitatori crociati, che erano dunque semplicemente occultati. Questi ultimi non possono essere spiegati invocando l'attivazione di vie fastigio-bulbari crociate (fascio uncinato di Russell): *a*) perché queste vie hanno origine principalmente dalla parte caudale del nucleo del tetto [J. e J. jr. Jansen ⁽¹¹⁾, Batini e Pompeiano ⁽¹²⁾], che riceve fibre cortico-nucleari dalla corteccia del verme posteriore [Jansen e Brodal ⁽¹³⁾] e non dalla corteccia del verme anteriore da noi stimolata; *b*) perché gli effetti facilitatori crociati si ottengono ancora dopo emidecerebellazione completa, che interrompe necessariamente entrambi i sistemi di Russell, da un lato all'origine, dall'altro dopo l'incrocciamento. L'effetto facilitatore contralaterale deve pertanto essere legato a impulsi che s'incrocciano a un livello estracerebellare, bulbare o spinale. Entrambe le ipotesi sembrano probabili. Infatti, dagli esperimenti di emisezione trasversa del midollo spinale tra C_{IV} e C_V, la quale abolisce non solo le risposte corticali dell'emiverme corrispondente, ma anche le risposte crociate ottenute stimolando l'emiverme contralaterale [conferma di Ingersoll, Magoun e Ranson ⁽⁹⁾], si potrebbe dedurre che l'incrocciamento degli effetti aumentatori paleocerebellari crociati avvenga a un livello bulbare, o in ogni caso rostralmente al livello della sezione spinale. D'altra parte non si può escludere che i motoneuroni spinali del lato corrispondente all'emisezione, non più sottoposti a un'azione tonica di rinforzo dei sistemi facilitatori vestibolo-spinali e reticolo-spinali dello stesso lato, possano non essere in grado di rispondere in modo positivo all'azione facilitatrice crociata esercitata attraverso un meccanismo intraspinale.

(11) J. JANSEN a. J. JANSEN jr., « J. comp. Neurol. », CII, 607 (1955).

(12) C. BATINI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXI, 805 (1955).

(13) J. JANSEN a. A. BRODAL, « J. comp. Neurol. », LXXIII, 267 (1940).

Fisiologia. — *Effetti di lesioni fastigiali croniche sul tono posturale del Gatto* (*). Nota di CESIRA BATINI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Ricerche eseguite sul preparato decerebrato hanno dimostrato che la distruzione unilaterale della parte caudale del nucleo del tetto, da cui origina il fascio fastigio-bulbare crociato di Russell, produce scomparsa o marcata diminuzione della rigidità estensoria nel lato opposto alla lesione [Moruzzi e Pompeiano ⁽¹⁾]. La sindrome atonica è invece ipsilaterale, quando tutto il nucleo del tetto [Sprague e Chambers ⁽²⁾, Moruzzi e Pompeiano ⁽¹⁾, Stella, Zatti e Sperti ⁽³⁾] o la sua parte rostrale [Moruzzi e Pompeiano ⁽¹⁾, Stella, Zatti e Sperti ⁽³⁾] vengono distrutti. Lesioni stereotassiche parziali o totali del nucleo del tetto di un lato, eseguite su Gatti a encefalo integro, producono una plasticità flessoria negli arti ipsilaterali ed estensoria in quelli contralaterali [Sprague e Chambers ⁽²⁾, Chambers e Sprague ⁽⁴⁾]. Per contro Sperti e Zatti ⁽⁵⁾, nel caso di lesione totale o rostrale del nucleo del tetto nel Cane, non osservano mai ipotonia della muscolatura degli arti, ma solo spasticità flessoria (meno frequentemente estensoria) dell'arto posteriore e in grado minore dell'arto anteriore ipsilaterali. È da rilevare che in queste ultime ricerche le distruzioni fastigiali venivano eseguite mediante aspirazione con una pipetta di vetro introdotta attraverso la corteccia cerebellare e si accompagnano a lesioni secondarie dei due nuclei dentati e del nucleo interposito dello stesso lato [Sperti e Zatti ⁽⁶⁾].

Con le presenti ricerche, eseguite complessivamente su 95 Gatti, sono stati studiati gli effetti di lesioni croniche, parziali o totali, del nucleo del tetto nell'animale a encefalo integro. Le distruzioni elettrolitiche venivano eseguite con metodo stereotassico in narcosi da Nembutal (30-35 mg/kg). Gli animali erano seguiti per un periodo di tempo variabile fino a 145 giorni dal primo intervento e successivamente decerebrati. La localizzazione anatomica delle lesioni era poi controllata su sezioni istologiche seriate, colorate alternativamente coi metodi di Nissl e di Weil.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Bologna e Pisa.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Rend. Acc. naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8^a, XVIII, 420 (1955); « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXI, 801 (1955).

(2) J. M. SPRAGUE e W. W. CHAMBERS, « J. Neurophysiol. », XVI, 451 (1953).

(3) G. STELLA, P. ZATTI e L. SPERTI, « Amer. J. Physiol. », CLXXXI, 230 (1955).

(4) W. W. CHAMBERS e J. M. SPRAGUE, « J. comp. Neurol. », CIII, 105 (1955).

(5) L. SPERTI e P. ZATTI, « Atti Soc. med.-chir. Padova », XXXI, 537 (1953).

(6) L. SPERTI e P. ZATTI, « Atti Soc. med.-chir. Padova », XXXI, 441 (1953).

La distruzione rostrale o totale del nucleo del tetto di un lato è stata eseguita su 26 Gatti. Tale lesione produce diminuzione o scomparsa del tono estensore degli arti ipsilaterali al nucleo del tetto leso, che appaiono flessi, mentre gli arti contralaterali risultano estesi e abdotti. Subito dopo l'intervento l'animale non è in grado di camminare né di tenere la postura eretta, bensì poggia sul fianco atonico. I tentativi di deambulazione iniziano in media al 3°-4° giorno, ma solo a partire dal 10° giorno l'animale riesce a camminare spontaneamente, descrivendo tragitti rettilinei o arcuati verso il lato della lesione. La presenza di una netta atonia estensoria è messa in evidenza in questo stadio: *a*) dalla marcata flessione degli arti sotto il peso del corpo; *b*) dalla tendenza dell'animale ad appoggiarsi al muro in corrispondenza del lato atonico; *c*) dalle frequenti cadute da questo stesso lato. Sono inoltre presenti, fino al 20° giorno, oscillazioni laterali della testa e del tronco, più evidenti durante i movimenti intenzionali. Successivamente l'animale va incontro a un'attenuazione dell'asimmetria posturale, che risulta quasi del tutto compensata intorno al 30°-35° giorno.

Nei nostri esperimenti è stata dimostrata l'integrità istologica delle strutture del tronco dell'encefalo, in particolare dei nuclei vestibolari, e quella dei nuclei interposito e dentato d'ambo i lati. Inoltre, in casi con distruzione totale del nucleo del tetto di un lato, cronica di 3 mesi, si è riscontrata un'assenza pressoché completa dei neuroni localizzati nella parte caudale del nucleo del tetto contralaterale. Si trattava verosimilmente di un'atrofia consecutiva a degenerazione retrograda prodotta dalla distruzione degli assoni del fascio di Russell avvenuta dopo l'incrociamiento.

La distruzione del polo caudale del nucleo del tetto di un lato è stata eseguita su 42 animali. Tale lesione produce una netta diminuzione del tono estensore negli arti del lato opposto alla lesione, mentre gli arti dello stesso lato presentano una postura estensoria. In complesso la sindrome è esattamente speculare, ma meno intensa e duratura, a quella che si ottiene dopo distruzione unilaterale, rostrale o totale, del nucleo del tetto. Infatti, già a partire dal 14° al 22° giorno dopo l'intervento la postura ritorna simmetrica e la deambulazione normale.

Le atonie fastigiali croniche sopra descritte sono dovute almeno in parte a inibizione propriocettiva riflessa proveniente dal lato opposto, analogamente a quanto è stato osservato nell'animale decerebrato [Moruzzi e Pompeiano (7)]. Infatti la deafferenziazione dell'arto anteriore ipertonico mediante radicotomia dorsale (da C_V a T_{II}) o infiltrazione novocainica (1 ml di una soluzione all'1%) del *M. triceps brachii* ne produce una completa flaccidità, mentre un notevole tono estensore compare nell'arto omologo contralaterale.

Distruzioni fastigiali bilaterali e simmetriche sono state eseguite complessivamente su 27 Gatti. Tali lesioni producono un ipertono estensore simmetrico dei quattro arti e un netto opistotono. Intorno al 4° giorno si possono

(7) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Rend. Acc. naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8^a, XIX, 326 (1955); « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXI, 803 (1955).

osservare i primi tentativi di deambulazione, che avvengono su arti iperestesi; in questo stadio sono presenti spesso movimenti di retropulsione. A partire in media dall'8° giorno l'animale è in grado di camminare speditamente, ma presenta sempre un discreto ipertono estensore degli arti. Al 30° giorno infine il comportamento dell'animale risulta pressoché normale. I controlli istologici eseguiti sugli animali dei nostri esperimenti hanno dimostrato che la lesione era estesa bilateralmente e simmetricamente ai nuclei del tetto, che risultavano distrutti totalmente, ovvero era limitata alla loro metà rostrale o caudale. Appariva per altro rispettata l'integrità anatomica dei nuclei interposito e vestibolari d'ambo i lati.

Effetti simili a quelli sopra descritti si osservano ancora dopo distruzione elettrolitica localizzata elettivamente alla sostanza bianca interfastigiale. Negli animali in cui avevamo effettuato tale lesione, sacrificati 2-3 mesi dopo l'intervento, l'esame istologico del cervelletto ha dimostrato un'assenza pressoché completa dei neuroni localizzati nella parte caudale del nucleo del tetto di entrambi i lati, probabilmente per degenerazione retrograda: gli effetti della distruzione sopra indicata sono quindi omologabili a quelli ottenuti dopo distruzione bilaterale del polo caudale dei nuclei del tetto, le cui fibre si incrociano, almeno in parte, nello spazio interfastigiale [Rasmussen⁽⁸⁾, J. e J. jr. Jansen⁽⁹⁾].

Dopo 30-35 giorni, nei casi di distruzione fastigiale unilaterale, rostrale o totale, e 14-22 giorni nei casi di distruzione caudo-fastigiale, gli animali presentano una postura simmetrica e una deambulazione normale; sono presenti bilateralmente le *placing reactions*. In questi animali l'ablazione bilaterale simmetrica della corteccia dei giri sigmoidei produce la ricomparsa di una netta asimmetria posturale, in tutto simile a quella che si osserva subito dopo la lesione fastigiale: risultano naturalmente assenti le *placing reactions*. Dopo circa 16-17 giorni dalla lesione corticale sia nei casi di distruzione rostro-fastigiale sia in quelli di lesione caudo-fastigiale, la postura ritorna simmetrica e la deambulazione è normale.

La decerebrazione eseguita su animali portatori di distruzione unilaterale cronica compensata del nucleo del tetto, sottoposti o meno a decorticazione bilaterale cronica, anch'essa compensata, dei giri sigmoidei produce la ricomparsa della primitiva asimmetria posturale, il cui segno è simile a quello ottenuto con esperimenti acuti nell'animale decerebrato [Moruzzi e Pompeiano⁽¹⁾]. L'asimmetrica distribuzione della rigidità da decerebrazione abbiamo osservata anche in un caso, in cui la decerebrazione era stata eseguita 145 giorni dopo la primitiva lesione fastigiale.

Dalle nostre ricerche risulta che le distruzioni della parte rostrale e di quella caudale del nucleo del tetto di un lato esercitano effetti opposti sul tono posturale, analogamente a quanto è stato osservato nell'animale decerebrato [Moruzzi e Pompeiano⁽¹⁾]. L'atonìa crociata, che si osserva dopo

(8) A. T. RASMUSSEN, « J. comp. Neurol. », LVII, 165 (1933).

(9) J. JANSEN a. J. JANSEN jr., « J. comp. Neurol. », CII, 607 (1955).

distruzione caudo-fastigiale, sembra essere la conseguenza della distruzione di un sistema fastigio-bulbare crociato ad azione facilitante. Si tratta probabilmente del fascio di Russell, i cui neuroni risultano appunto localizzati nella parte caudale del nucleo del tetto [J. e J. jr. Jansen⁽⁹⁾]. L'atonìa diretta che si osserva invece dopo distruzione rostrale o totale del nucleo del tetto di un lato è assai più complessa e risulta dalla distruzione di neuroni fastigio-bulbari diretti e di gran parte delle fibre di Russell originate nella porzione caudale del nucleo del tetto del lato opposto, entrambi ad azione facilitante.

I sintomi successivi a lesioni fastigiali croniche unilaterali sono paragonabili ai fenomeni di deficienza descritti da Luciani⁽¹⁰⁾ nell'animale emidecerebellato, ma non erano mai preceduti, nei nostri animali, da fenomeni dinamici. Inoltre il segno delle asimmetrie posturali risulta condizionato strettamente dalla localizzazione anatomica della lesione fastigiale.

Analogamente a quanto era stato osservato da Luciani⁽¹⁰⁾ nell'animale emidecerebellato e da Di Giorgio⁽¹¹⁾ a proposito delle asimmetrie neocerebellari del Rossi⁽¹²⁾, anche le asimmetrie fastigiali vanno incontro col tempo a una fase di compensazione. Essa è strettamente legata alla presenza della corteccia dei giri sigmoidei, poiché la loro ablazione produce la ricomparsa della primitiva asimmetria fastigiale. Effetti simili erano stati ottenuti con lo stesso tipo d'intervento nell'animale emidecerebellato in fase di compenso [Luciani⁽¹⁰⁾].

Nei nostri esperimenti, 16-17 giorni dopo l'ablazione bilaterale della corteccia motrice la postura ritornava simmetrica e la deambulazione normale. Una successiva decerebrazione, pre- o postcolliculare, determinava la ricomparsa della primitiva asimmetria fastigiale, contrariamente alle asimmetrie neocerebellari del Rossi⁽¹²⁾ che vengono sommerse dalla rigidità da decerebrazione [Rossi⁽¹²⁾, Di Giorgio⁽¹¹⁾].

Anche nell'animale a encefalo integro, così come nel preparato decerebrato [Moruzzi e Pompeiano⁽⁷⁾] le atonie fastigiali sono legate, almeno in parte, a una inibizione propriocettiva riflessa originata negli arti contralaterali ipertonici. L'esistenza di questi meccanismi spiega la presenza di una postura estensoria, che si manifesta dopo distruzione bilaterale simmetrica dei nuclei del tetto.

(10) L. LUCIANI, *Il cervelletto*. Firenze, Le Monnier, 1891.

(11) A. M. DI GIORGIO, « Arch. Fisiol. », XLII, 25 (1942).

(12) G. ROSSI, « Arch. Fisiol. », XIX, 391 (1921).

Fisiologia. — *Effetti di lesioni unilaterali della corteccia cerebellare vermiana e del nucleo del tetto sul tono posturale del Gatto neonato decerebrato* ^(*). Nota di CARLA DE RENZI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata ^(**) dal Socio G. C. PUPILLI.

I risultati di ricerche precedenti [Chiarugi e Pompeiano ⁽¹⁾] eseguite su Gatti decerebrati di età variabile da 1 a 74 giorni dalla nascita inducevano a concludere che la stimolazione elettrica della corteccia cerebellare vermiana del *lobus anterior* non produce alcun effetto sul tono posturale fino al 17° giorno di vita. Solo al 18° giorno di vita la corteccia vermiana del *lobus anterior* diventa eccitabile, ma con voltaggi piuttosto elevati; la soglia si abbassa progressivamente con l'età, fino a raggiungere al 74° giorno i valori efficaci nell'animale adulto. La comparsa e il progressivo aumento dell'eccitabilità della corteccia cerebellare si accompagnano a graduali modificazioni istologiche dei vari strati che la compongono. In particolare si manifesta una riduzione e scomparsa dello strato embrionale dei granuli esterni, che si accompagna a un aumento di spessore degli strati molecolare e dei granuli interni e allo sviluppo dei dendriti delle cellule di Purkinje, così come dei plessi rampicanti e dei canestri che circondano i corpi delle cellule di Purkinje.

Queste ricerche, se per un lato ci informano degli stretti rapporti esistenti tra istogenesi ed eccitabilità della corteccia vermiana del *lobus anterior*, per l'altro lasciano insoluti alcuni problemi concernenti principalmente il tempo di sviluppo dell'attività funzionale del nucleo del tetto, inserito nelle vie cerebellifughe che nascono nel verme.

Col presente lavoro abbiamo studiato la comparsa delle asimmetrie posturali prodotte da lesioni unilaterali, superficiali e profonde, del cervelletto in Gatti neonati e giovani decerebrati.

Ricerche eseguite da Sprague e Chambers ⁽²⁾ nel Gatto adulto decerebrato o a sistema nervoso integro dimostrano che l'ablazione unilaterale della corteccia vermiana del *lobus anterior* provoca un ipertono estensore negli arti ipsilaterali e una marcata flessione negli arti contralaterali, e che una successiva distruzione totale del nucleo del tetto dello stesso lato inverte il quadro posturale. Dalla comparsa di opposti effetti esercitati da queste strutture cortico- e nucleo-cerebellari sul tono posturale, quali risultano da esperimenti di ablazione, potevamo attenderci informazioni circa al tempo di com-

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Bologna e Pisa.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) E. CHIARUGI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXX, 147 (1954); « Arch. Sci. biol. », XXXVIII, 493 (1954).

(2) J. M. SPRAGUE e W. W. CHAMBERS, « J. Neurophysiol. », XVI, 451 (1953).

parsa dell'azione tonica esercitata dalla corteccia vermiana e dal nucleo del tetto sottostante.

Gli esperimenti sono stati condotti complessivamente su 70 Gatti neonati, di età variabile da 1 a 40 giorni e di lunghezza (testa-tronco) variabile da 116 a 238 mm, sottoposti a decerebrazione inter- o retrocolliculare, con una tecnica già descritta altrove [Chiarugi e Pompeiano ⁽³⁾]. Su questi animali, che fin dalla nascita presentavano la tipica rigidità da decerebrazione [Laughton ⁽³⁾, Windle ⁽⁴⁾, Griffin e Windle ⁽⁵⁾, Chiarugi e Pompeiano ⁽³⁾], venivano eseguite distruzioni cerebellari, superficiali e profonde, mediante aspirazione con una pipetta capillare di vetro.

Al termine di ogni esperimento venivano esaminate istologicamente (metodi di Nissl e Weil) sia la localizzazione e l'estensione della lesione cerebellare, sia le particolarità strutturali esistenti nelle varie fasi di sviluppo del cervelletto.

La distruzione superficiale della corteccia vermiana del *lobus anterior* di un lato non ha prodotto alcuna asimmetria tonica degli arti in Gatti di età variabile da 1 a 17-18 giorni e di lunghezza da 116 a 190 mm. Una simile lesione ha provocato invece un'asimmetria posturale in Gatti di età variabile da 17-18 a 40 giorni e di lunghezza da 170 a 238 mm: tale asimmetria era contraddistinta da un aumento del tono estensore negli arti ipsilaterali alla lesione, che presentavano una notevole resistenza alla flessione passiva, e da una marcata ipotonia estensoria negli arti del lato opposto; in ogni caso le asimmetrie si osservavano per tutto il tempo in cui l'animale era mantenuto in vita. In questi esperimenti la lesione anatomica risultava limitata, nell'emiverme di un lato, alla parte caudale del *lobulus centralis* e al *culmen*, corrispondenti ai lobuli III, IV e V della nomenclatura di Larsell ⁽⁶⁾.

La distruzione profonda della corteccia vermiana del *lobus anterior* di un lato, associata a lesione rostrale o totale del nucleo del tetto sottostante, e anche una emidecerebellazione completa non hanno prodotto alcuna modificazione della rigidità da decerebrazione in Gatti di età variabile da 1 a 12-13 giorni e di lunghezza da 116 a 172 mm. Simili lesioni hanno invece provocato costantemente un'asimmetria posturale, caratterizzata da ipotono estensore degli arti ipsilaterali e da ipertono contralaterale, in Gatti di età variabile da 13 a 40 giorni e di lunghezza da 150 a 222 mm; questi effetti rimanevano inalterati per tutta la durata dell'esperimento (fino a 3 h e 40 min). In ogni caso i controlli istologici dimostravano l'integrità del nucleo del tetto contralaterale e dei nuclei vestibolari ipsilaterali alla lesione.

Lo studio istologico da noi condotto sull'evoluzione strutturale del nucleo del tetto ha dimostrato che dalla nascita in poi le cellule fastigiali aumentano di volume, sia per un arricchimento della sostanza cromofila del citoplasma,

(3) N. B. LAUGHTON, « Amer. J. Physiol. », LXXV, 339 (1926).

(4) W. F. WINDLE, « J. comp. Neurol. », XLVIII, 227 (1929); « Anat. Rec. », XLII, 67 (1929).

(5) A. M. GRIFFIN e W. F. WINDLE, « Amer. J. Physiol. », XCVII, 397 (1931).

(6) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », XCIX, 135 (1953).

sia per un aumento volumetrico del nucleo, e appaiono sempre più distanziate tra di loro. Inoltre dalla nascita fino al 12° giorno di vita il cervelletto risulta sprovvisto di fibre mieliniche, che si manifestano nei nostri preparati per la prima volta intorno al 13° giorno e appaiono situate principalmente nella sostanza bianca centrale come nello spessore del nucleo del tetto e lungo il decorso del peduncolo cerebellare inferiore.

Risulta dalle presenti ricerche che né la corteccia vermiana del *lobus anterior* né il nucleo del tetto esercitano un'influenza tonica sui muscoli anti-gravitari nel Gatto decerebrato, dalla nascita fino al 12° giorno di vita. Risulta altresì che la funzione tonica facilitante dei nuclei cerebellari, e in particolare quella del nucleo del tetto, si manifesta per la prima volta intorno al 13° giorno e precede la comparsa dell'azione tonica inibitrice esercitata dalla corteccia vermiana del *lobus anterior*, che appare solo verso il 17°-18° giorno, quando si rivela la eccitabilità di tale area corticale [Chiarugi e Pompeiano] ⁽¹⁾.

Lo sviluppo dell'attività tonica del cervelletto di Gatto appare strettamente connesso con la sua morfogenesi. Proprio nelle prime settimane di vita postnatale il nucleo del tetto va incontro a uno sviluppo progressivo, dovuto in parte all'aumento volumetrico delle cellule fastigiali e soprattutto alla mielinizzazione delle fibre che a esso arrivano e di quelle che da esso si dipartono. È significativo il fatto che queste fibre appaiono per la prima volta dotate di guaina mielinica soltanto al 13° giorno di vita, vale a dire proprio quando si manifesta per la prima volta l'azione tonica del nucleo del tetto. Risulta poi accertato che lo sviluppo morfologico del nucleo del tetto precede quello della corteccia vermiana corrispondente.

La comparsa dell'azione tonica del nucleo del tetto al 13° giorno, quando ancora la corrispondente corteccia cerebellare vermiana è incapace di esercitare un'azione sul tono, fa pensare che in questo stadio dello sviluppo entrino in giuoco sistemi di fibre afferenti extracorticali, forse vestibolari e olivari [Sprague e Chambers ⁽²⁾], dirette al nucleo del tetto. Essa dimostra in ogni caso che in questo stadio della vita postnatale sono già funzionanti i sistemi efferenti che connettono i neuroni fastigiali ai centri tonogeni del tronco dell'encefalo. Questi sistemi efferenti entrano dunque in azione prima ancora che il nucleo del tetto venga sottoposto alla scarica di impulsi provenienti dalla corteccia cerebellare vermiana. Tali impulsi corticifughi cominciano a giungere verso il 18° giorno di vita e solo allora essi sono in grado di esercitare un'azione regolatrice sull'attività fastigiale.

Un confronto tra i nostri risultati e quelli conseguiti da Di Giorgio ⁽⁷⁾ nella stessa specie da noi esaminata, appare difficile: nelle ricerche di tale A. gli animali erano infatti sottoposti il più delle volte a lesioni del *neocerebellum* e solo in Gatti di 12 giorni venivano eseguite lesioni del *paleocerebellum*; queste ultime poi erano prodotte in animali a cervello integro e interessavano le lamelle più caudali dell'emiverme di entrambi i lati.

(7) A. M. DI GIORGIO; « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XVII, 536, 537 (1942); « Arch. Fisiol. », XLIV, 1 (1944).

Fisiologia. — *La riserva alcalina in condizioni di ipotermia.* Nota di GIANNI GIUSTINA e GIACOMO MESCHIA, presentata (*) dal Socio R. MARGARIA.

Gli autori che hanno studiato l'equilibrio acido-base in mammiferi omeotermi in ipotermia hanno riscontrato in genere una diminuzione del valore di pH del sangue arterioso rispetto al valore riscontrato a 38°C.

La diminuzione del valore di pH era dovuta ad un aumento della concentrazione del CO₂ fisicamente disciolto non compensato da un aumento della concentrazione dei bicarbonati (Dill e coll. 1941; Cranston e coll. 1955).

L'aumento della concentrazione del CO₂ fisicamente disciolto può essere spiegato dall'aumento della solubilità del CO₂ col diminuire della temperatura non compensato o compensato solo in parte da una diminuzione della P_{CO₂} alveolare.

Non è invece facilmente spiegabile che la concentrazione dei bicarbonati rimanga costante. Infatti se il sangue *in vitro* viene equilibrato con una miscela gassosa a P_{CO₂} costante a temperatura inferiore a 38°C si rileva un aumento della riserva alcalina conseguente ad una diminuzione di acidità delle proteine del sangue (Stadie e coll. 1925).

TABELLA I.

Narcosi con pentobarbital sodico (nembutal Abbott).

Esperimento	Temperatura °C	pH	HCO ₃ ⁻ mM/l	CO ₂ disc. mM/l	P _{CO₂} mm Hg
1 ^a	39,5	7,36	27,33	1,47	50
	22,0	7,26	29,2	2,30	50
2 ^o	39,0	7,45	22,42	1,00	33
	21,0	7,33	22,58	1,62	35
3 ^o	38,0	7,40	20,00	1,00	33
	20,0	7,35	18,36	1,27	27
4 ^o	38,0	7,40	21,02	1,05	21
	21,0	7,32	22,80	1,72	23

N. B. — I valori tabulati si riferiscono al plasma arterioso.

(*) Nella seduta del 14 aprile 1956.

Il fatto che la concentrazione dei bicarbonati rimanga costante *in vivo* può essere spiegato ammettendo:

1° che si abbia produzione di metaboliti acidi come conseguenza delle violente contrazioni muscolari e dei tremori generalizzati che insorgono nella fase di induzione dell'ipotermia nell'animale anche profondamente narcotizzato;

2° che la riserva alcalina dell'organismo *in toto* non aumenti col diminuire della temperatura in egual misura di quella del sangue. Infatti nell'organismo *in toto* la riserva alcalina del sangue non dipende solo dalle caratteristiche fisico-chimiche delle proteine del sangue, ma anche dalla dissociazione dei sistemi tampone extravasali coi quali il sangue è in equilibrio dinamico.

Se l'acidosi riscontrata in ipotermia fosse dovuta solo alla produzione di acidi fissi conseguente alle contrazioni muscolari, il trattamento dell'animale con un farmaco ad azione curarica dovrebbe permettere di indurre uno stato di ipotermia mantenendo il valore del pH del sangue arterioso attorno a 7,4.

TABELLA II.

Narcosi con pentobarbital sodico e succinilcolina.

Esperimento	Temperatura °C	pH	HCO ₃ ⁻ mM/l	CO ₂ disc. mM/l	P _{CO₂} mm Hg
1°	38,0	7,38	22,2	1,17	39
	21,0	7,36	29,7	1,97	42
2°	38,0	7,36	19,3	1,06	35
	20,5	7,33	29,2	2,10	45
3°	38,0	7,37	22,8	1,22	40
	21,5	7,36	27,1	1,79	39
4°	38,0	7,48	22,8	0,94	31
	21,0	7,32	28,9	2,15	46
5°	38,0	7,36	19,2	1,05	35
	21,5	7,42	24,1	1,29	30
6°	38,0	7,37	22,4	1,20	40
	21,5	7,47	25,6	1,32	29
7°	38,0	7,52	23,5	0,89	30
	20,5	7,46	32,4	1,72	37

N. B. - I valori tabulati si riferiscono a plasma arterioso.

A questo scopo abbiamo eseguito una serie di esperimenti su due lotti di conigli di cui uno era narcotizzato con nembutal (da 25 a 50 mg pro Kg), l'altro era trattato con nembutal (25 mg pro Kg) e con succinilcolina (0,15 mg pro Kg e per minuto) che veniva iniettata nella fase di induzione dell'ipotermia.

I risultati sono riassunti nelle tabelle I e II.

Da esse appare che, abbassando di circa 17° C la temperatura corporea, nel primo gruppo di conigli il valore di pH del sangue arterioso diminuisce di circa 0,1 unità pH e che non si ha variazione apprezzabile della concentrazione dei bicarbonati nel plasma arterioso, analogamente all'esperienza degli autori precedenti.

Nel secondo gruppo il valore di pH del sangue arterioso passa in media da 7,41 a 7,39 e la concentrazione dei bicarbonati aumenta di 1,29 volte.

La P_{CO_2} alveolare passando da 38 a 21° C non subisce variazioni apprezzabili: i valori medi sono 35.6 mmHg a 38° C e 37.6 mmHg a 21° C. Pertanto la concentrazione media dei bicarbonati osservata a 21° C (28 mM per litro di plasma) può essere considerata il valore di riserva alcalina a quella temperatura nel coniglio.

Lo stesso valore di riserva alcalina si ottiene equilibrando *in vitro* a 21° C il sangue di coniglio normale con una miscela gassosa avente P_{CO_2} eguale a quella dell'aria alveolare: se ne deduce che la riserva alcalina dell'organismo *in toto* aumenta col diminuire della temperatura in egual misura di quella del sangue.

BIBLIOGRAFIA

- CRANSTON W. I., MARGOT C. P., ROSS D. N., «J. Physiol.», 127 (380) 1955.
DILL D. B. and FORBES W. H., «Am. J. Physiol.», 132 (685) 1941.
STADIE W. C., AUSTIN J. H. and ROBINSON H. W., «J. Biol. Chem.», 66 (901) 1925.

Biologia. — *Azione inibente dell'acido deidroascorbico sull'attività ossidativa di preparati mitocondriali di fegato di ratto* (*). Nota di GERARDO PECE (**), GIANNINO LAUDI (***) e ERASMO MARRÈ (***), presentata (****) dal Socio S. TONZIG.

La funzione dell'acido ascorbico negli animali è da tempo oggetto di insistenti ricerche che si sono polarizzate in genere sulla probabilità che al sistema ascorbico-deidroascorbico spetti un compito di rilievo nel gioco dei fenomeni di ossidoriduzione. Per contro, pochi sono gli studi che hanno preso in considerazione la possibilità di una azione « specifica » delle due forme,

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Istituto di Clinica Ostetrica e Ginecologica dell'Università di Genova.

(***) Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(****) Nella seduta del 14 aprile 1956.

ossidata e ridotta, su determinati meccanismi cellulari: in particolare quella di una interazione diretta tra gli acidi ascorbico (AA) e deidroascorbico (DHA) e proteine enzimatiche, con le conseguenze fisiologiche che ovviamente ne potrebbero derivare.

Le possibilità di tali interazioni sembrano tutt'altro che improbabili in base ai pur scarsi dati della letteratura. La capacità dell'acido ascorbico e della sua forma ossidata di formare complessi con le proteine plasmatiche sembra ormai estesamente dimostrata sia per gli organismi animali (Summerwell et al., 1, Meyer et al. 2) che per quelli vegetali (Arrigoni, 3). Inoltre, soprattutto per l'acido deidroascorbico, un'azione fisiologica nettamente distinta da un ruolo ossidoriduttivo sembra ben documentata dalle ricerche di Patterson [4] e Patterson e Lazarow [5] sulla capacità di questo composto di indurre una forma particolare di diabete simile a quello conseguente al trattamento da allossana.

Particolarmente interessanti al riguardo appaiono i dati di Drake e collaboratori [6] circa la rapida reazione *in vitro* tra DHA e gruppi sulfidrilici di composti quali il glutatione, la cisteina e l'acido tioglicolico, dati che suggeriscono la probabilità che l'azione del DHA nell'induzione del diabete possa derivare dal blocco di gruppi sulfidrilici di determinati enzimi o coenzimi. Pure interessanti, in tal senso, i reperti di Lindan e Work circa l'aumento di DHA concomitante alla caduta del tenore in gruppi sulfidrilici liberi nel fegato di ratti in determinate condizioni patologiche [7, 8].

Perlomeno altrettanto interessanti appaiono i risultati ottenuti nello studio dell'azione degli acidi ascorbico e deidroascorbico negli organismi vegetali. Tra le varie ipotesi circa l'azione fisiologica del DHA nelle piante, la più semplice e la meglio documentata sperimentalmente sembra sia quella che attribuisce l'effetto inibente su crescita e respirazione alla capacità di inibire determinati enzimi respiratori. È stato infatti osservato (Tonzig, Trezzi, Laudi e Marrè [9]; Marrè, Laudi e Arrigoni [10]) che dosi anche relativamente ridotte in DHA inibiscono nettamente l'attività deidrogenasica di preparati enzimatici vegetali a carico di diversi substrati (glucoso-6-fosfato, fruttosio 1-6 difosfato, malato, succinato).

Le esperienze qui riferite hanno avuto come base l'ipotesi che l'azione del DHA sui meccanismi enzimatici respiratori potesse essere d'importanza generale e cioè potesse ritrovarsi, sia pure con caratteristiche proprie, anche a carico di sistemi deidrogenasici animali. I risultati sin qui ottenuti in questa fase delle ricerche sembrano del tutto favorevoli a tale ipotesi.

MATERIALE E METODI.

Nelle nostre esperienze abbiamo studiato gli effetti del DHA su tre sistemi deidrogenasici scelti in quanto implicati in tre sistemi respiratori del tutto distinti:

a) la glucoso-6-fosfo deidrogenasi, implicata nel ciclo degli zuccheri fosforilati;

b) la succino-deidrogenasi implicata nel ciclo degli acidi tricarbossilici;

c) la lattico deidrogenasi, enzima tipico della respirazione anaerobica.

L'effetto del DHA su questi tre sistemi è stato studiato su preparati mitocondriali ottenuti per centrifugazione frazionata e lavaggio in saccarosio isotonico, secondo Kielley e Kielley [11] dal fegato di ratti albin, allevati in laboratorio.

La tecnica seguita consisteva nella omogenizzazione del tessuto epatico appena prelevato per 30 minuti secondi in « blender » in soluzione di saccarosio seguita da allontanamento dei nuclei e delle cellule integre mediante centrifugazione a $2000 \times g$. per cinque minuti primi e quindi della prima sedimentazione dei mitocondri a $20.000 \times g$. per quindici minuti primi. Il sedimento veniva ripreso in saccarosio e tampone, riprecipitato alla stessa velocità, quindi nuovamente ripreso in saccarosio e tampone e distribuito in provette da centrifuga contenenti le aggiunte desiderate in substrati, cofattori ed eventualmente acido deidroascorbico preventivamente portati al pH ed alla concentrazione in saccarosio volute. Tutte queste operazioni venivano condotte a temperatura non superiore ai 3 gradi centigradi.

La determinazione dell'attività deidrogenasica è stata eseguita mediante il metodo al cloruro di trifeniltetrazolio secondo Marrè e Servettaz [12], tecnica che correttamente applicata (assenza di ossigeno) sostituisce vantaggiosamente quella classica al blu di metilene, di Thumberg. Come reagenti abbiamo impiegato acido deidroascorbico della ditta NBC di New York, oppure da noi preparato per ossidazione con bromo secondo Meyer e collaboratori, neutralizzato a pH 5, TPN, DPN, Tris della ditta Sigma di St. Louis, glucoso-6-fosfato e gli acidi lattico e succinico della ditta Merck. L'acido 3-4 dichetogulonico è stato da noi preparato secondo Penney e Zilva [13].

RISULTATI.

I risultati riportati nelle tabelle I, II, III dimostrano come la riduzione del TTC da parte dei sistemi deidrogenasici coinvolti nella ossidazione dei tre substrati impiegati sia nettamente inibita dal DHA. Una interferenza su questa inibizione da parte di variazioni del pH o della presenza di impurità inorganiche (metalli pesanti) nel DHA sembra da escludersi, in quanto da un lato il pH finale degli incubati, con o senza inibitore, è risultato identico, dall'altro l'effetto inibente del DHA scompare quando la soluzione di questo venga trasformata in acido dichetogulonico (DKG) mediante innalzamento del pH a 7,5 con NaOH per un periodo di alcuni minuti, seguito da aggiunta di HCl sino al ristabilimento del pH iniziale, prima di venir aggiunto agli altri componenti dell'incubato.

TABELLA I.

Azione dell'acido deidroascorbico sull'attività succinico deidrogenasica di mitocondri di fegato di ratto.

Per ogni prova: sospensione di mitocondri cc. 0,5, corrispondenti a g. 0,2 di fegato, peso fresco, tris, 0,2 M pH 7,2, saccarosio 0,5 M, cloruro di trifetil-tetrazolio 0,1 %. Volume finale 1 cc. Temperatura 20 gradi centigradi. Dati come media di determinazioni in doppio.

AGGIUNTE	γ TTC Ridot- to/ora	Inibizione %
Nessuna	2	—
Succinato 0,02 M	21	—
» DKG $1,2 \times 10^{-3}$ M	22	0
» DHA $1,2 \times 10^{-3}$ M	10	54
» DHA 6×10^{-4} M	15	32
» DHA 3×10^{-4} M *	18	18
» DHA $1,2 \times 10^{-4}$ M	20	10

TABELLA II.

Azione dell'acido deidroascorbico e dell'acido dichetogulonico sull'attività lattico deidrogenasica di mitocondri di fegato di ratto.

Condizioni sperimentali come alla tabella I.

AGGIUNTE	γ TTC ridot- to/ora	Inibizione %
Nessuna	1	—
Lattato 0,05 M	28	—
» DKG 10^{-3} M	27	3
» DHA 10^{-3} M	9	68
» DHA 6×10^{-4} M	19	32
» DHA 3×10^{-4} M	22	21
» DHA 10^{-4} M	25	10

TABELLA III.

Azione dell'acido deidroascorbico e dell'acido dichetogulonico sull'attività glucosio-6-fosfato deidrogenasica di mitocondri di fegato di ratto.

Condizioni sperimentali come alla tabella I.

AGGIUNTE	γ TTC ridotto/ora	Inibizione %
Nessuna	2	—
Gl-6-P 10^{-2} M	16	—
» DKG 10^{-3} M	16	0
» DHA 10^{-3} M	12	25
» DHA 6×10^{-4} M	13	18
» DHA 3×10^{-4} M	14	12
» DHA 10^{-4} M	16	0.

Punti salienti dell'azione inibente osservata appaiono i seguenti:

a) il fatto che questa azione compaia già per concentrazioni relativamente modeste, d'ordine vicino a quello fisiologico (10^{-4} M);

b) l'apparente non specificità dell'effetto inibente che investe, per concentrazioni poco diverse, in modo sensibilmente analogo i tre sistemi enzimatici studiati (anche se l'effetto appare per concentrazioni alquanto inferiori nel caso dei sistemi ossidanti il lattato e il succinato che per quelli ossidanti il glucosio-6-fosfato); non specificità che suggerisce come l'azione del DHA interessi gruppi chimici di importanza e diffusione molto generale, quali potrebbero essere quelli sulfidrilici.

CONCLUSIONI. — I risultati delle esperienze sopra descritte dimostrano che concentrazioni anche relativamente modeste (inferiori a 10^{-3} M) di acido deidroascorbico inibiscono sensibilmente, in preparati mitocondriali di fegato di ratto, l'attività di sistemi enzimatici capaci di trasportare l'idrogeno dai substrati respiratori usati (glucosio-6-fosfato, lattato e succinato) al cloruro di trifeniltetrazolio.

La stretta analogia fra questa azione del DHA su preparati animali con quella già constatata su preparati enzimatici e mitocondriali di origine vegetale, e la normale presenza del composto nei più diversi tessuti ed organismi viventi, a concentrazioni spesso dell'ordine di quelle che nelle nostre esperienze risultano chiaramente attive, sottolineano la probabile importanza generale del fenomeno in questione e ne accentuano l'interesse.

D'altra parte i dati finora raccolti sono al tutto insufficienti per una caratterizzazione biochimica precisa dell'azione inibente del DHA e quindi

per la eventuale interpretazione del significato fisiologico. In particolare è opportuno rilevare come il metodo al TTC, analogamente a quello del blu di metilene, dosi in realtà non tanto l'attività delle deidrogenasi implicate nella ossidazione dei substrati qui impiegati, quanto quelle di sistemi in cui dette deidrogenasi sono accompagnate ad enzimi del tipo delle flavoproteine, i quali ultimi sono di fatto quelli direttamente implicati nella riduzione dello indicatore (Smith, 14, Nakamura, 15).

L'identificazione del sistema enzimatico specificamente sensibile all'azione dell'acido deidroascorbico, insieme ad altri aspetti del problema, quali il meccanismo biochimico della inibizione e la sua possibile portata fisiologica *in vivo* sono argomenti su cui ci riserviamo di ritornare in successive ricerche.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] SUMERWELL W. N. e SEALOCK R.R., « J. Biol. Chem. », vol. 196, p. 753 (1952).
- [2] MEYER K. H., HASELBACH C. H., BOISENNAS R. A., « Helv. Chim. Acta », vol. 35, p. 1781 (1952).
- [3] ARRIGONI O., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 19, p. 156 (1955).
- [4] PATTERSON J. W. « J. Biol. Chem. », vol. 183, p. 81 (1950).
- [5] PATTERSON J. W. e LAZAROW A., « J. Biol. Chem. », vol. 186, p. 141 (1950).
- [6] DRAKE B. B., SMYTHE C. V. e KING C. G., « J. Biol. Chem. », vol. 143, p. 89 (1942).
- [7] LINDAN O. e WORK E., « Bioch. J. », vol. 55, p. 554 (1953).
- [8] LINDAN O. e WORK E., « Bioch. J. », vol. 55, p. 562 (1953).
- [9] TONZIG S., TREZZI F., LAUDI G. e MARRÈ E., « Mem. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 4, p. 109 (1955).
- [10] MARRÈ E., LAUDI G. e ARRIGONI O., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., ser. VIII, vol. 19, p. 460 (1953).
- [11] KIELLEY W. W. e KIELLEY R. K., « J. Biol. Chem. », vol. 191, p. 485 (1951).
- [12] MARRÈ E. e SERVETTAZ O., « Giornale di Biochimica », vol. 4, p. 10, (1955).
- [13] PENNEY J. R. e ZILVA S. S., « Bioch. Jour. », 39, 1 (1945).
- [14] SMITH G. F., « Plant Physiol. », vol. 27, p. 445 (1952).
- [15] NAKAMURA M. « J. Biochem. », vol. 40, p. 571 (1953).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che in data 24 marzo c. a. è deceduto il Socio Straniero Edmund T. Whittaker, della Categoria I, e invia alla memoria dell'illustre Collega scomparso un reverente pensiero d'omaggio, a nome della Classe e suo personale.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato, consegnato alla Cancelleria dell'Accademia dall'arch. Gaetano Vinaccia il 17 marzo c. a., contenente, come risulta da una lettera del predetto Architetto, studi ed esperienze di opere in cemento armato.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia trasmesso all'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Sansone presenta il volume degli « Scritti Matematici » offerti a Mauro Picone nel suo settantesimo compleanno, con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia il volume degli *Scritti Matematici* offerti al Socio Mauro Picone nel suo settantesimo compleanno.

« Un Comitato composto da Francesco Severi, presidente del Comitato d'onore, da Renato Caccioppoli, presidente del Comitato esecutivo e dai chiarissimi professori L. Amerio, G. Cimmino, S. Faedo, G. Fichera, A. Ghizzetti, C. Miranda, G. Scorza-Dragoni, T. Viola, tutti antichi scolari del Maestro, rivolse un appello ad alcuni amici ed estimatori di lui perché contribuissero con dei loro scritti scientifici ad onorarlo.

« Gli *Annali di Matematica pura ed applicata* furono lieti di porre la loro secolare organizzazione a servizio di questa iniziativa e nei volumi 39 e 40 del 1955 stamparono le 55 memorie offerte da 58 collaboratori italiani e stranieri. Questi volumi sono stati già diffusi tra le più importanti scuole matematiche di tutto il mondo e sono stati successivamente fusi nel magnifico volume di circa 800 pagine che qui presento, e che testimonierà in ogni tempo gli universali sentimenti di ammirazione per l'opera di Mauro Picone, ricercatore di altissimo rango, appassionato e fortunato Maestro, organizzatore tenace e lungimirante.

« Io dovrei ricordare singolarmente tutti gli eminenti collaboratori, tra i quali matematici di grande fama e giovani cultori di nuovi indirizzi in cui riponiamo le nostre speranze, ma mi limiterò soltanto a dire che nel volume sono contenute importanti ricerche sulla teoria dei numeri, sul calcolo delle matrici, sulla geometria algebrica e su quella differenziale, sulle funzioni di una o più variabili complesse e sulle equazioni integrali nel campo analitico, sulla teoria delle funzioni di variabile reale, l'analisi funzionale, la topologia, il calcolo delle probabilità, sulle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali, sul calcolo delle variazioni, sulla meccanica e la fisica matematica, campi questi quasi tutti coltivati, e con successo, da Mauro Picone e dai suoi scolari.

« Io desidero ripetere qui l'augurio che come Presidente dell'Unione Matematica Italiana e soprattutto come vecchio suo compagno di studi gli rivolsi il 15 gennaio di quest'anno alla Città degli Studi di Roma quando gli fu presentato questo volume insieme ad una medaglia d'oro e ad un album di fotografie dei suoi ex discepoli: che egli conservi la vivezza e la genialità del suo intelletto, e che egli continui a lavorare a servizio della Nazione e della Scienza! ».

Le parole del Socio Sansone sono accolte dagli unanimi applausi dei Colleghi che indirizzano al Socio Picone una vibrante e affettuosa dimostrazione di simpatia.

Il Presidente Giordani ringrazia vivamente il prof. Sansone, ed esprime il suo compiacimento di poter partecipare, questa volta, al tributo d'omaggio reso al Collega Picone, dato che non ha avuto la possibilità d'intervenire alla precedente cerimonia del gennaio.

Il prof. Giordani, pur non essendo stato discepolo del Socio Picone può però testimoniare del fervore con il quale l'illustre Collega, quando insegnava a Napoli, creò quella scuola dalla quale sono usciti tanti valorosi giovani matematici e si associa con tutto il cuore all'augurio formulato dal Socio Sansone.

Le parole del Presidente sono salutate da vivi applausi.

Il Segretario Accademico presenta le pubblicazioni inviate in omaggio.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Segre, Tonzig, Margaria, Pupilli, Picone, Natta, Armellini, Graffi.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

FADIGA E., PUPILLI G. C. e VON BERGER G. P. - Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto trattato con cloralasio (pres. dal Socio G. C. PUPILLI).

NATTA G., PORRI L., CORRADINI P. e MORERO D. - Polimero cristallino del butadiene a concatenamento 1-2 isotattico (pres. dal Socio G. NATTA).

SEGRE B. - Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota III.

TONOLO A. - Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo. Nota II.

GIANNUZZI M. A. - Sul sistema binario 20 Draconis (A.D.S. 10279). (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

NARDINI R. - Su qualche effetto del secondo ordine nella magnetoidrodinamica. Nota II (pres. dal Corrisp. D. GRAFFI).

Il Socio Chiarugi presenta una Memoria del prof. Enrico Messeri dal titolo: «Considerazioni sui compiti e limiti dell'ecologia umana».

Per l'esame della predetta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Chiarugi e dai Colleghi Ghigi e Sergi.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Tonzig, anche a nome del Collega Chiarugi, legge la relazione della Commissione incaricata di esaminare la Memoria di E. Marrè e O. Servettaz dal titolo: «Vie di trasporto di elettroni dai coenzimi piridinici all'ossigeno in preparati enzimatici di foglie di *Pisum*».

Detta relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

CONGRESSI

Il Presidente, certo di interpretare il desiderio di tutti i Colleghi, invita il Socio Bompiani a riferire sul viaggio da lui compiuto in India per prender parte a importanti manifestazioni scientifiche.

Il Socio Bompiani ringrazia il Presidente e i Colleghi, ma desidera far presente che, essendo rientrato a Roma da pochissime ore, le parole che egli dirà avranno necessariamente il carattere di una improvvisazione.

Gli eventi matematici, svoltisi in India dalla seconda settimana di febbraio alla prima di marzo, sono stati due, entrambi sotto gli auspici della Unione Matematica Internazionale e con l'aiuto diretto dell'UNESCO. Le due manifestazioni erano distinte, ma organizzate l'una in continuità dell'altra, in modo che fosse possibile agli studiosi di prender parte ad entrambe. La prima è consistita in un colloquio internazionale, tenuto a Bombay, sulla teoria delle funzioni «*Z*», cui ha dato particolare importanza la presenza di Siegel; tale colloquio si è dimostrato utilissimo perché durante lo svolgimento dei lavori sono stati acquisiti risultati nuovi e veramente importanti.

La seconda manifestazione, pure a Bombay, è stata una Conferenza, anch'essa internazionale, a favore dell'istruzione matematica del Sud-Asia ed ha avuto un carattere estremamente interessante, sia per la conoscenza della diffusione delle discipline matematiche nei Paesi Asiatici, sia perché, con i contatti e lo scambio di idee tra gli scienziati dei vari Paesi partecipanti alla Conferenza stessa, è stato possibile ottenere utilissime notizie circa i metodi e l'estensione dei programmi in uso nelle varie Nazioni, come ad esempio nell'U.R.S.S. e in Polonia. È indubitabile che da simile confronto possano nascere idee feconde di applicazioni e di risultati anche per il nostro Paese.

Il Socio Bompiani conclude ricordando la signorile ospitalità delle Autorità indostane, il fascino di quelle terre, e, soprattutto, il fermento veramente notevole di idee e di opere che animano il Paese, il quale grazie anche alla politica di non allineamento con alcun blocco, è giustamente considerato in Asia come guida ed esempio di tutti i popoli di quel continente.

Le parole del Socio Bompiani sono salutate da cordiali applausi e il Presidente porge al predetto Socio i suoi più vivi ringraziamenti.

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE
PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCO DEI CONCORRENTI

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA
ISTRUZIONE PER LE *SCIENZE MATEMATICHE*

(Scadenza 1 marzo 1956 - Premio lire 250.000).

1. ARRIGHI GINO. — 1. «Sulle funzioni polidrome di matrici». — 2. «La "Specula Academica Pisana" nella seconda metà del Settecento».
2. BACCHI GIOVANNI. — «Covarianza e controvarianza in un riferimento cartesiano» (ms.).
3. BERNASCONI CARLO. — 1. «Moto di un vortice sulla terra e sua influenza sulla Polodia». — 2. «Un procedimento per l'aggiustamento delle grandi triangolazioni». — 3. «Azimut di una geodetica ellissoidica passante per due punti molto lontani fra loro». — 4. «Rappresentazioni parziali e totali dell'ellissoide sulla sfera». — 5. «Trasformazioni con mezzi ottico-meccanici fra le proiezioni cartografiche della sfera».
4. BUSULINI BRUNO. — 1. «La reciprocità alle sorgenti della analisi infinitesimale». — 2. «La relazione mediata nella matematica».
5. CASELLI VINCENZO. — 1. «Aritmetica razionale per gli Istituti Magistrali». — 2. «Esistenza di una funzione $a = F(a) = f_1(a) \pm f_2(a)$, che dà tutti e soli i numeri primi dispari a , quando f_1 ed f_2 sono primi tra loro».
6. CATTIN ANTONIO. — 1. «Piastra circolare di spessore variabile con continuità, con carico e vincolo simmetrici». — 2. «Resistenza della piastra circolare di spessore variabile scaloidalmente con carico e vincolo simmetrici».
7. CHELAZZI MIRKO. — «Il principio dell'equivalenza di Ampère dedotto direttamente dalla legge di Laplace».
8. CHIAPPALONE VINCENZO. — «La quaterna pitagorica dello spazio e i triangoli Eroniani per via elementare. Metodologia, didattica, ricerche».
9. CHILOSI GIUSEPPE. — «Dimostrazione di un caso particolare dell'ultimo teorema di Fermat» (ms.).
10. FERLA AMBROGIO. — 1. «Sul raggio di curvatura nei vertici di una curva». — 2. «Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi omogenei in moto».
11. FERRARI GAETANO. — «Meccanica dell'equazione algebrica» (ms.).
12. FERRAUTO ROBERTO. — «Applicazione della geometria analitica alla risoluzione e alla discussione dei problemi geometrici».
13. GRIECO DOMENICO. — «Su di una interpretazione geometrica del discriminante di un'equazione».
14. INTRIERI TABELLINI PAOLA. — «Su una guida d'onda con uno schermo conduttore».
15. MAGGIO ANDREA. — «Delle terne pitagoriche».
16. MOTTAREALE GAGLIARDO MARIA. — «Gli invarianti integrali nello sviluppo della meccanica analitica».
17. NUNZIANTE-CESARO CARLO. — «La misura del cerchio, del cilindro, del cono, della sfera e di loro parti».

18. PARESCHI VINCENZO. — 1. « Su alcune proprietà dei poligoni funicolari e su alcune loro applicazioni ».
19. PICASSO ETTORE. — 1. « Alcune osservazioni sull'uso delle connessioni proiettive nello studio delle superficie di S_4 ». — 2. « Sopra una generalizzazione della conica di Kummer cui dà luogo un sistema planare di curve su una superficie di S_4 ».
20. RESTIGLIAN MARCO. — « Studio del moto di un teleproietto nel campo gravitazionale terrestre ».
21. RIZZI MICHELE. — « Il concetto di massa e i pregi del sistema Giorgi ».
22. ROLLA PRIMO. — « La verità dell'intuizione euclidea ».
23. ROUX DELFINA. — 1. « Sul comportamento delle serie di potenze sugli archi di regolarità ». — 2. « Lacune unilaterali, emisimmetria di tratti e teorema di Fabry » (2 fasc.). — 3. « Media, Funzione maggiorante e somme di coefficienti per le serie di potenze di ordine finito » (2 fasc.). — 4. « Sui numeri primi nelle progressioni aritmetiche » (2 fasc.). — 5. « Sulla distribuzione degli interi rappresentabili come somma di due quadrati » (2 fasc.).
24. SILVESTRI AMARI ROSALIA. — « Studio delle frazioni nel piano concreto » (metodo ottico).
25. TORTORICI MARIA. — 1. « Sulle trasformazioni asintotiche delle curve ». — 2. « Una questione di minimo in relazione con una proprietà delle coniche e delle quadriche a centro ».
26. TOSCANO LETTERIO. — 1. « Equation différentielle de la fonction hypergéométrique ecc. ». — 2. « Carattere ipergeometrico dei polinomi associati a quelli di Hermite ». — 3. « I numeri di Bernoulli ecc. ». — 4. « Nuove formule sugli operatori permutabili di secondo ordine ». — 5. « Sui polinomi di Jacobi e ultrasferici ». — 6. « Su una formula limite tra funzioni ipergeometriche di Kummer e funzioni del cilindro parabolico ». — 7. « Sul complemento della funzione gamma incompleta nel calcolo simbolico ». — 8. « Nuove regole di Calcolo simbolico ». — 9. « Formule di riduzione tra funzioni e polinomi classici ». — 10. « Osservazioni, confronti e complementi su particolari polinomi ipergeometrici ». — 11. « Differenze finite e derivate dei polinomi di Jacobi ». — 12. « Teorema di moltiplicazione sulle funzioni ipergeometriche generalizzate ».
27. VALENTE GIOACCHINO. — 1. « Il problema della prospettiva della visione operata con i due occhi ». — 2. « La prospettiva tridimensionale ».
28. VENTRIGLIA MARIO. — « I residui semplificati di Trudi per la dimostrazione delle formule di Sylvester relative alle funzioni di Sturm » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE PER LE SCIENZE FISICHE

(Scadenza 1 marzo 1956 - Premio lire 250.000).

1. ANDRANI BENIAMINO. — 1. « Perfezionamento del rifrattometro di Fuess ». — 2. « Ricerche su l'azione magnetica delle cariche elettrostatiche ».
2. BACCHI GIOVANNI. — « Su un metodo sperimentale nei problemi di conducibilità esterna » (ms.).
3. BATTAGLIA ARRIGUCCIO. — 1. « Birifrangenza magnetica di sostanze paramagnetiche nelle condizioni di risonanza ». — 2. « Un appareil pour l'étude de la dispersion des gaz, ecc. ». — 3. « Strumento per la misura della dispersione e dell'assorbimento di un gas nella regione delle microonde, a pressione relativamente elevata ».
4. BERNASCONI CARLO. — 1. « Moto di un vortice sulla terra e sua influenza sulla piodia ». — 2. « Un procedimento per l'aggiustamento delle grandi triangolazioni ».
5. BRUNI GIORDANO. — 1. « Coesili e molecole ». — 2. « Ammassamento e suddivisione della materia ». — 3. « La determinazione della coesione nei liquidi ». — 4. « La velocità della luce superata ». — 5. « Elasticità e plasticità ». — 6. « La quantizzazione nel cicloesano ». — 7. « Relazioni semplici fra le temperature caratteristiche dell'acetilene ». — 8. « Il modulo di riempimento dello spazio dedotto dallo spessore pellicolare dei liquidi ». — 9. « Coesione e

spessore pellicolare dell'acqua in equilibrio col ghiaccio I e vapore». — 10. «Lo spessore pellicolare del benzolo al punto triplo». — 11. «Il coesile critico dell'acqua». — 12. «Il coesile e la reazione fisica di congelamento dell'acqua al punto triplo ordinario». — 13. «La coesione del cicloesano solido al punto di fusione». — 14. «Lo stato precritico dell'acetilene». — 15. «Le pellicole dell'acqua di massima densità».

6. BUSULINI BRUNO. — «La relazione fisica in Aristotele, Galilei, Newton, Einstein».

7. CATTIN ANTONIO. — 1. «Piastra circolare di spessore variabile con continuità, con carico e vincolo simmetrici». — 2. «Resistenza della piastra circolare di spessore variabile scaloidalmente con carico e vincolo simmetrici».

8. CEROFOLINI FERRUCCIO. — «Sulla taratura del materiale fotosensibile per uso di spettrografia di stelle».

9. CHELAZZI MIRKO. — «Il principio dell'equivalenza di Ampère dedotto direttamente dalla legge di Laplace».

10. CIPRIANI ALFREDO. — «La via della luce - Il campo e la legge di Newton».

11. DE FRANCISCO GIOVANNI. — «Problemi generali nell'impianto elettrico dei velivoli».

12. DI FILIPPO DOMENICO. — 1. «Uno studio del terremoto del Gran Sasso d'Italia del 5 settembre 1950». — 2. «Le sèsse del lago di Bolsena». — 3. «Tempi di tragitto delle onde P+ e spessore dello strato del granito nell'Italia centrale». — 4. «Ulteriore studio sulle oscillazioni libere del lago di Scanno». — 5. «Dromocrone per terremoti vicini e velocità delle onde nell'Italia Centrale». — 6. «Struttura della crosta terrestre in corrispondenza dell'Italia Centrale (Gran Sasso)». — 7. «Ulteriore studio sulle sèsse del lago di Bolsena». — 8. «Uno studio sul terremoto di Cefalonia (del 12 agosto 1953) con particolare riguardo alla natura fisica della scossa all'ipocentro». — 9. «Onde sismiche guidate dagli strati sedimentari». — 10. «Terremoti della Val Padana del 15-16 maggio 1951».

13. FERLA AMBROGIO. — «Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche nei corpi omogenei in moto».

14. FERRAUTO ROBERTO. — «Potere delle punte e ionizzazione dell'aria».

15. FOLLETTI LUIGI. — «Recenti acquisizioni circa nuove possibilità di impiego degli ultrasuoni».

16. FREILINO EFISIO. — 1. «Nota sulle macchine semplici». — 2. «Nuovo metodo per tracciare i reticoli di diffrazione e senza l'impiego della macchina da dividere». — 3. «Descrizione di un piccolo alternatore di facile costruzione per frequenze elevatissime». — 4. «Nota sull'effetto Volta».

17. INTRIERI TABELLINI PAOLA. — «Su una guida d'onda con uno schermo conduttore».

18. MAYR GIOVANNA. — 1. «Boron detection in tissues». — 2. «Activation Analysis with nuclear Emulsions». — 3. «Nuove possibilità dell'analisi per attivazione mediante le emulsioni nucleari». — 4. «The Use of Nuclear Emulsions to determine small amounts of P 33». — 5. «Advantages offered by P 33». — 6. «Il fosforo 33 presente nel radiososforo». — 7. «État électronique de quelques substances cancérogènes». — 8. «Comportamento magnetochimico di alcune sostanze usate nella terapia dei tumori». — 9. «Considerazioni su alcuni casi di isomeria elettronica». — 10. «Circa la possibilità di influire sulla sezione d'urto di neutroni termici». — 11. «Circa le applicazioni degli isotopi radioattivi». — 12. «Effetto delle condizioni ambientali sulle costanti fisiche». — 13. «Generatori Elettrostatici». — 14. «Einfluss des Magnetischen Feldes auf die Kristallisation u. auf die Zusammensetzung von Mischkristallen». — 15. «Considerazioni sulla conducibilità ionica dei metalli». — 16. «Le Emulsioni fotografiche come strumenti di ricerca biologica». — 17. «Determinazioni quantitative di massima sensibilità mediante le emulsioni fotografiche nucleari». — 18. «Fisica per gli studenti della Facoltà di medicina e Chirurgia, di medicina Veterinaria e di Scienze Biologiche e Naturali». — 19. «Cenno agli Isotopi Radioattivi». — 20. «Il VII Congresso Internazionale di Radiologia». — 21. «La Betaterapia attuata nella Frauenklinik di Gottinga».

19. MAURI BRUNO. — «Assetto auto-compensatore per sommergibili».

20. MICHELI GIOVANNI ARMANDO. — «Studio sull'analogia luce-sonoro-colore-suono».

21. PALMA VITTORELLI MARIA BEATRICE. — 1. «Correlazione tra assorbimento paramagnetico di polveri e monocristalli di $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ ». — 2. «Una ipotesi di legame covalente

confermata dalla spettroscopia a raggi X». — 3. «Determination and Properties of Anisotropy, ecc.». — 4. «Evidence for a Double Covalent Bond, ecc.». — 5. «Le proprietà magnetiche dello stato solido, ecc.».

22. PARESCHI VINCENZO. — «Su alcune proprietà dei poligoni funicolari e su alcune loro applicazioni».

23. PARODI ROBERTO. — 1. «Le basi sperimentali della teoria della relatività devono essere rivedute». — 2. «Un semplice dispositivo elettromagnetico per generare una forte separazione delle componenti della radiazione cosmica».

24. PASCALE LUIGI. — «Dispositive per compensazione bussole magnetiche».

25. PATERNA MARIA CARLOTTA. — «Corrente di ionizzazione e potere frenante di alcuni gas».

26. RIZZI MICHELE. — «Il concetto di Massa e i pregi del sistema Giorgi».

27. ZANETTI RENZO. — 1. «Sui metodi di misura della resistenza termica del vestigio». — 2. «Strumento per particolari misure nell'infrarosso».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE PER LE SCIENZE CHIMICHE

(Scadenza 1 marzo 1956 — Premio lire 250.000).

1. AIROLDI ALBERTO. — 1. «Tinctoria». — 2. «Dyestuff reporter». — 3. «I progressi nella chimica tessile» (3 voll.).

2. BAIOCCHI NINO. — «Identificazione dei composti chimici dalle miscele».

3. BELLINO FRANCESCO. — «Analisi chimica qualitativa».

4. BERTINOTTI FLORIANA. — 1. «Metodi di affinamento nella determinazione della struttura molecolare dei composti organici mediante diffrazione dei raggi X». — 2. «Acta crystallographica» (2 fasc.). — 3. «Ricerche chimico-fisiche su composti risultanti dalla condensazione fra aldeide formica e veratolo». — 4. «Structure of Heterocyclic Compounds Containing Nitrogen». — 5. «Struttura di molecole eterocicliche azotate».

5. BRUNI GIORDANO. — 1. «Il metano monofluorurato nella sua fase critica». — 2. «Il coesile critico dell'ossigeno è isostero a quello del metano». — 3. «L'etilene nelle condizioni critiche». — 4. «La deidrogenazione del Metano». — 5. «Il moto dei costituenti il coesile critico dell'acetilene». — 6. «La pressione critica delle paraffine normali calcolata dal contenuto in atomi di carbonio». — 7. «Il metano gasoso al punto triplo». — 8. «La lega limite ghisa-acciaio». — 9. «Le velocità coesiliche molecolari e atomiche nel cicloesano». — 10. «La fase critica del metano monoclorurato». — 11. «L'eutectolo ledeburitico». — 12. «Il pseudo-elemento ossiazoto». — 13. «Similcrescita e proprietà del coesile costituente la fase gasosa del benzolo al punto triplo». — 14. «Le condizioni critiche del metano-tiolo». — 15. «Pirogenazione dell'Etilene e velocità dei costituenti suoi coesili». — 16. «Il Coesile del Cicloesano gasoso al punto triplo». — 17. «L'acetilene gasoso del punto triplo». — 18. «Il metanolo critico». — 19. «Il coesile acetilenico gasoso al punto di flesso delle curve densità-temperatura delle fasi coesistenti liquido gas». — 20. «Semilcrescita e Stereostruttura molecolare e coesilica del Metanolo gasoso al punto triplo».

6. CAPPELLO ALFIO. — «I Cuprofilm nella lotta contro il malsecco degli Agrumi».

7. CARINI LUIGI. — «Studio di una vetrina opaca allo zirconio per il cono OIO a».

8. COSTANTINI BRUNO. — «Impiego del cadmio elettrolitico nella determinazione ossidimetrica del vanadio».

9. DEL GIUDICE ERNESTO. — 1. «Indagine sul riconoscimento e dosaggio di alcuni componenti dell'uovo nei "Marsala all'uovo"». — 2. «Sulle vitamine del vino». — 3. «Presente e avvenire della viticoltura della Sicilia Occidentale in relazione alle nuove esigenze dell'Industria Enologica». — 4. «La bentonite quale chiarificante e stabilizzante in Enologia». — 5. «Gli agenti della fermentazione vinaria della Sicilia Occidentale». — 6. «Lo studio dell'aspetto microbiologico del vino». — 7. «Sulla demetallizzazione dei vini». — 8. «Saggio

sull'analisi dei vini. Contributo alla conoscenza del vino moscato di Pantelleria ». — 9. « Gli antifermentativi in Enologia ». — 10. « Intorno all'azione dell'aneurina sul processo di fermentazione vinaria ». — 11. « A conclusione del I triennio di attività ».

10. EUSTACCHI ELEDI. — « Isocianato di Fenile e Trifenilcarbinolo ».

11. IMBRICI DONATO. — 1. « Terreni superficiali e acque sotterranee della piana - Sele ». — 2. « Ricerche sulle terre rosse della Campania - Salerno 1° contributo ». — 3. « 2° contributo sulle terre della Daunia (Foggia). - Il Potassio ». — 4. « Una varietà di oliva a frutto edule da diffondersi nel Salernitano ». — 5. « 3° contributo sulle terre della Daunia (Foggia). - Il Manganese ». — 6. « Contributo allo studio del fabbisogno fosforico nei terreni della Daunia ». — 7. « Il rapporto fra sostanza organica e azoto nei terreni del Foggiano ». — 8. « Il medicaio asciutto dell'Istituto Tecnico Agrario di Cerignola ». — 9. « L'Azienda agricola Zootecnica dell'Istituto suddetto e l'allevamento dei bovini Carnation ». — 10. « Vita di un pollaio in clima caldo arido ». — 11. « Fabbisogno fosforico dei terreni baresi ». — 12. « La determinazione dell'acidità volatile per distillazione diretta ». — 13. « Il rapporto fra sostanza organica e azoto dei terreni del barese ».

12. MARI ANSELMO. — « Insetticidi chimici gassosi » (ad uso nell'agricoltura per la difesa dei prodotti).

13. PROCOPIO MARIO. — 1. *Serie vini*: « Condizionamenti previnificatori delle uve ». — 2. « Carboni deferizzanti ». — 3. « Termo condizionamento previnificatorio delle uve ». — 4. « Sul potere fissatore solforoso dei vini ». — 5. « Aminoacidi liberi dei vini ». — 6. *Serie Acqueviti*: « Studi sulle acqueviti di vino ». — 7. *Serie succhi di frutta*: « Presse a pacchetto ». — 8. *Serie alimenti*: « Invecchiamento delle uova e sua valutazione ». — 9. *Serie testi scolastici*: « Elementi di chimica generale ». — 10. « Elementi di Chimica organica pura ed applicata ».

14. RENKO PAOLO. — 1. « I microbi dello yogurt ». — 2. « Sulla fermentazione butirrica nei formaggi ». — 3. « Microbiologia del formaggio ».

15. SALATI WAINER. — « La ricerca delle materie coloranti artificiali nei vini rossi ».

16. STOCCHI EUGENIO. — « Dalle reazioni di chetoni ottenuti per idrolisi ossidante della lignina, ad un metodo pratico atto a trasformare aldeidi e chetoni in ammine ».

17. VETERE FRANCESCO. — 1. « Dal triangolo alla matrice della Valenza » (3 fasc.). — 2. « Un sistema nuovo per l'uso delle valenze nelle formulazioni chimiche ».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE PER LE SCIENZE NATURALI

(Scadenza 1 marzo 1956 - Premio lire 250.000).

1. BARBOLINI BELLANCA ANNA. — 1. « Analisi delle azioni mascolinizanti dell'estradiolo sulle gonadi di girini di *Rana dalmatina* ». — 2. « Sul meccanismo delle azioni mascolinizanti di alte dosi di estradiolo nelle gonadi di girini di *Rana dalmatina* ».

2. BERTINOTTI FLORIANA. — 1. « Ricerche chimico-fisiche sull'emoglobina del morbo di Cooley ». — 2. « Considerazioni sulle proprietà chimico-fisiche di emoglobine diverse presenti nel morbo di Cooley e nell'anemia a cellule falciformi ».

3. BINCI PICCINI VERA. — « Il colore animale ed il mimetismo nei vertebrati ».

4. BORRELLI FILIPPO. — « Proposte di un nuovo calendario ».

5. BRUNI GIORDANO. — 1. « La ripartizione delle quantità di moto nella materia viva e in quella morta ». — 2. « Nel centenario della scoperta dell'acido acetilsalicilico ». — 3. « Il tempo di espansione dell'universo e l'età della materia sono dello stesso ordine di grandezza ». — 4. « Il macrocosmo ». — 5. « Gli individui ghiandolari del macrocosmo ». — 6. « Catalisi e similitudine in piante e animali ». — 7. « Virus e vita ».

6. DE FRANCISCIS TETTY. — « Istofisiologia della neuro-secrezione nei coleotteri ».

7. DEL GIUDICE ERNESTO. — 1. « Indagine sul riconoscimento e dosaggio di alcuni componenti nell'uovo nei "Marsala all'uovo" ». — 2. « Sulle vitamine del vino ». — 3. « Pre-

sente e avvenire della viticoltura della Sicilia Occidentale in relazione alle nuove esigenze della Industria Enologica ». — 4. « La bentonite quale chiarificante e stabilizzante in Enologia ». — 5. « Gli agenti della fermentazione vinaria della Sicilia Occidentale ». — 6. « Lo studio dell'aspetto microbiologico del vino ». — 7. « Sulla demetallizzazione dei vini ». — 8. « Saggio sull'analisi dei vini. Contributo alla conoscenza del vino moscato di Pantelleria ». — 9. « Gli antifermentativi in Enologia ». — 10. « Intorno all'azione dell'aneurina sul processo di fermentazione vinaria ». — 11. « A conclusione del 1° triennio di attività ».

8. DIAMARE MARIA. — « Protoplasmi plurinucleati plasmodi e sincizii, cellule granulose migranti e circolanti ».

9. EUSTACCHI ELEDA. — 1. « Le basi geografiche dell'industria della carta a Pioraco. — 2. « Osservazioni su un affioramento di terreni titonici nei dintorni di Agolla ».

10. FAZIO GRILLI BICE. — « L'energia atomica. La verità ai confini del fantastico ».

11. FERRARI ERMINIO. — 1. « Il parassitismo di *Osyris Alba* L. ». — 2. « Ricerche sulla flora infestante delle colture in Italia ».

12. FOLLETTI LUIGI. — « Recenti acquisizioni circa nuove possibilità di impiego degli ultrasuoni ».

13. FUMAGALLI SAVINA. — 1. Fasc. 1: N. 5 Note di antropologia fisica. — 2. Fasc. 2: N. 6 Note di Paletnologia. — 3. Fasc. 3: N. 4 Note di Etnologia.

14. GHIDINI GIAN MARIA. — « Uomini, caverne e abissi ».

15. LUZZATTO GINA. — 1. « Evangelista Quattrami semplicista degli Estensi ». — 2. « Orti botanici privati, orto botanico pubblico e semplicisti all'epoca dei Duchi d'Este a Ferrara ». — 3. « Lezioni di botanica farmaceutica ». — 4. « Esercizi di farmacognosia ». — 5. « Risultati di una escursione al Passo del Furlo ». — 6. « Un botanico ferrarese del 1500 ». — 7. « Giacomo Antonio Bono (Boni o Buoni) medico, botanico e scrittore del secolo XVI ». — 8. « Secondo contributo di osservazioni sulla Flora vascolare dei dintorni di Urbino ».

16. MAURI BRUNO. — « Punto nave ottenuto dando appuntamento alle stelle, ecc. ».

17. MAZZEI ALFREDO MARIA. — « Il romanzo delle piante ».

18. NOVEMBRE DOMENICO. — « Vita e non vita ».

19. POMINI LUIGI. — « Quattro lustri di coltivazione sperimentale, ecc. ».

20. PRATI LELIA. — 1. « Effetti del Ca^{++} e del K^{+} sull'attività dei fusi neuro-muscolari della rana » (2 fasc.). — 2. « Influenza dell'asfissia e dell'anossia acuta sull'attività riflessa della rana ».

21. RENKO PAOLO. — 1. « I microbi dello yogurt ». — 2. « Sulla fermentazione butirrica nei formaggi ». — 3. « Microbiologia del formaggio ».

22. TADINI VITAGLIANO GIOVANNA. — 1. « Osservazioni sulla spermatogenesi degli Pteropodi ». — 2. « Gli acidi nucleinici nella gametogenesi di *Lysmata seticaudata* ». — 3. « Azione del freddo sulla spermatogenesi di *Asellus* ». — 4. « Il differenziamento sessuale dei goni in rapporto alle cellule follicolari ». — 5. « Monogenia ed ermafroditismo in *Asellus aquaticus* ». — 6. « Cellule follicolari in relazione con la spermatogenesi in *Armadillidium depressum* ».

23. TARAMELLI ESTER. — « La posizione sistematica dei Termosbenacei quale risulta dallo studio anatomico di *Monodella argentarii* Stella ».

24. TOFINI PAOLO. — « La scapola dei Fuegini ».

ELENCO DEI CONCORRENTI AI PREMI NAZIONALI 1956

FISICA

(Scadenza 31 marzo 1956 - Premio lire 1.000.000).

1. CIRINEI EGISTO. — « Fotografie di apparecchio per dimostrazioni sperimentali » e relazioni varie.

2. QUARTA DANTE. — « La Creazione dell'Universo e la nostra nuova teoria ».

3. SANTILLI RUGGERO. — 1. « Teoria unitaria sulla struttura dell'elettrone e della luce » — 2. « Perché lo spazio è rigido ».

4. SEVERINI ANTONINO. — 1. « Memoria per gli intellettuali dotati di sensibilità, di tutte le categorie ». — 2. « Appendice della detta memoria ».
5. TORALDO DI FRANCIA GIULIANO. — 1. « La trasmissione totale ». — 2. « Alcuni fenomeni di diffrazione trattati mediante il principio dell'interferenza inversa ». — 3. « Le onde evanescenti nella diffrazione ». — 4. « Il fenomeno di Gibbs nell'ottica ». — 5. « A proposito di una strana esperienza di ottica ». — 6. « L'equazione generale della caratteristica di annerimento delle emulsioni fotografiche ». — 7. « Una conferma quantitativa della teoria fotochimica della visione ». — 8. « Preuve expérimentale de l'existence des ondes superficielles dans la diffraction ». — 9. « Sull'interferenza di molte vibrazioni con fasi distribuite a caso ». — 10. « Il teorema di Malus-Dupin generalizzato e la trasformazione dell'interferenza inversa ». — 11. « Il principio di Huygens-Fresnel come conseguenza di quello dell'interferenza inversa ». — 12. « Sull'effetto delle piccole irregolarità di lavorazione negli specchi per riflettori astronomici ». — 13. « Sulla termodinamica della diffrazione ». — 14. « Sulla luce diffratta da innumerevoli aperture distribuite a caso su un diaframma opaco ». — 15. « Sulla forma intrinseca della trasformazione dell'interferenza inversa ». — 16. « Sur les causes théoriques des analogies dans le comportement de la rétine et de la plaque photographique ». 17. « Per una teoria dell'effetto Stiles-Crawford ». — 18. « Ricettori retinici e microonde ». — 19. « Aberrazioni del terzo ordine del reticolo di diffrazione ». — 20. « Il fenomeno di Gibbs nella microscopia in contrasto di fase ». 21. « Microonde evanescenti generate per diffrazione ». — 22. « The Radiation Pattern of Retinal Receptors ». — 23. « Retina Cones as Dielectric Antennas ». — 24. « Sur les lois générales de la diffraction. Rapport critique ». — 25. « Sezioni d'urto di schermi metallici ». — 26. « A Variational Principle for the Computation of Reflection Coefficients ». — 27. « Principi variazionali per i coefficienti di riflessione delle barriere di potenziale ». — 28. « A proposito delle microantenne retiniche ». — 29. « Realtà fisica di una varietà di Fermat pseudosferica ». — 30. « Parageometrical Optics ». — 31. « Sur les lois générales de la diffraction ». — 32. « Moti uniformi di un liquido viscoso fra due sfere concentriche rotanti ». — 33. « Sulla caratterizzazione delle proprietà elettromagnetiche dei corpi isotropi ». — 34. « Super-Gain Antennas and Optical Resolving Power ». — 35. « Les récepteurs rétiniens et les microondes ». — 36. « Directional Scattering of Light by the Human Retina ». — 37. « Application du calcul des variations à la détermination des coefficients de réflexion ». — 38. « A Fundamental Theorem of Parageometrical Optics ». — 39. « On the Image Sharpness in the Central Field of a System Presenting Third - and Fifth-Order Spherical Aberration ». — 40. « Onde Elettromagnetiche » (1 vol.). — 41. « Sobre la inexistencia de un limite teorico del poder separador ». — 42. « Capacity of an optical channel in the presence of noise ». — 43. « Sul momento di rotazione del campo elettromagnetico ». — 44. « Calcolo del momento di rotazione del campo elettromagnetico in una guida d'onda ». — 45. « Resolving Power and Information ». — 46. « Confection Doublets ». — 47. « A family of perfect configuration lenses of revolution ».
6. ZUCCONI FRANCO. — « Nuovi principî fisici riconosciuti nelle rivoluzioni ellittiche dei corpi celesti ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 14 aprile 1956

- An nibale de Gasparis celebre astronomo e matematico abruzzese (1819-1892)*. Solenne commemorazione tenuta in Tocco Casauria il 27 marzo 1955. Roma, 1956. Pp. 143, in-4°, con tavv.
- CIRESOLA Teodoro (Théo Larices). — *Nuovi Teoremi di Geometria*. Estr. da « Studi di Geometria », a. I, 1953, fasc. 1, 2, 3.
- GORJAEV M. I. — *Efirnye masla flory SSSR*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1952. Pp. 380, in-8°.
- *Harakteristika himičeskih soedinenij, vho-djaščih v sostav efirnyh masel*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1953. Pp. 371, in-8°, con figg.
- IVŠIN N. K. — *Srednekembrijskie trilobity Kazahstana*. Č. 1. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Geologičeskih Nauk, 1953. Pp. 226, in-8°, con tavv.
- KOZLOVA K. I. — *Spektrofotometrija rastenii raznyh klimatičeskih zon v otažennyh lučah*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1955. Pp. 206, in-8°, con figg.
- LARICES Théo. — Vedi: CIREOLA Teodoro.
- LJUBER A. A. — *Atlas spor i pyl'cy paleozojskih otloženij Kazahstana*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1955. Pp. 126, in-8°, con tavv.
- METALLO Antonio. — *Il sistema meteo-oceanografico del Mediterraneo*. Estr. da « Rivista Marittima », 1955, dicembre.
- SANTILLI Ruggero. — *Perché lo spazio è rigido*. Soluzione del mistero della luce e dell'elettrone. Campobasso, Ed. « Il pungolo verde », 1956. Pp. 9, in-8°.
- Scritti matematici offerti a Mauro Picone nel suo LXX compleanno*. Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1955. Pp. 791, in-4° (Estratti dai voll. XXXIX e XL della serie 4^a degli « Annali di Matematica Pura e Applicata »).
- TIHOV G. A. — *Osnovnye trudy*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1955. Pp. 382, in-8°, con figg.
- Zveri Kazahstana*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, Institut Zoologii, 1933. Pp. 536, in-8°, con figg.

D. DE BLASI e A. SIGNORINI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 maggio 1956

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Matematica. — *Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.* Nota (*) III (**) del Socio BENIAMINO SEGRE.

14. Nella presente Nota, le lettere u, v, w (eventualmente munite di indici) denoteranno funzioni note di $d \geq 2$ variabili reali x_1, x_2, \dots, x_d , definite in una regione — opportunamente ristretta — dello spazio S_d di queste variabili, ed ivi derivabili finché occorra. Del pari, le y, z designeranno funzioni incognite di tali variabili, mentre $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \nu, \rho$ saranno polinomi differenziali del tipo indicato nel secondo capoverso del n. 8.

Con tali significati per i simboli, le (2) del n. 2 (Nota I) vengono attualmente a costituire il più generale sistema di equazioni a derivate parziali lineari a coefficienti costanti, consistente di n equazioni in m funzioni incognite; ed anche ora tale sistema può essere scritto nella forma compatta (3), e quindi venir sostituito con l'equazione del tutto equivalente (6), dove le A, U, Y denotino matrici di significati analoghi a quelli per esse specificati nel n. 2, le Z, B, V si esprimano mediante quelle con le (5), (7), (8), ed N, M siano matrici quadrate (risp. degli ordini n ed m) ad elementi polinomi differenziali, i cui determinanti si riducano a costanti non nulle. Fra il presente caso ($d \geq 2$) e quello ($d = 1$) di cui abbiamo trattato nelle Nota I vi sono tuttavia delle differenze essenziali, che mette conto di rilevare, le quali fanno sì che quella trattazione non possa venire completamente estesa.

(*) Continuazione delle Note I e II, apparse alle pp. 271 e 395 di questo volume dei « Rendiconti ».

(**) Presentata nella seduta del 14 aprile 1956.

Attualmente, in generale, non sarà più possibile scegliere le suddette matrici quadrate N, M in modo che la matrice B fornita dalla (7) si riduca a forma diagonale, in quanto l'algoritmo euclideo delle divisioni successive non si lascia estendere ai polinomi in più variabili. Inoltre non è detto che, scelte le N, M , sia ancora possibile passare dal sistema (3) al corrispondente sistema (6) con una successione finita di operazioni elementari dei tipi $a), b)$ di cui al n. 3 e dei tipi $a'), b')$ di cui al n. 4. Quest'ultima osservazione suggerisce l'interessante problema algebrico, sul quale però qui non ci soffermiamo, di caratterizzare le matrici N, M ottenibili dalle matrici unità degli ordini n, m con le operazioni su righe o colonne indotte da quelle operazioni elementari.

Tuttavia, in pratica, si potrà talora notevolmente semplificare il dato sistema mediante opportune operazioni dei tipi indicati. Così, ad esempio, utilizzando anche il criterio algebrico di cui già ci siamo serviti nel primo capoverso del n. 10, otterremo che:

Un sistema di n equazioni a derivate parziali lineari a coefficienti costanti in m funzioni incognite di d variabili, può generalmente venir semplificato se n ed m superano $d + 1$. Più precisamente, se i coefficienti costanti hanno valori generici, il sistema può essere ricondotto ad uno di $n - k$ equazioni in $m - k$ funzioni incognite, ove si ponga $k = \max(n - d - 1, m - d - 1)$.

Per dimostrare questo teorema incominciamo con l'osservare che, se un elemento della matrice A è ridotto all'unità, si mandano subito a zero tutti gli elementi di A distinti da quello ed appartenenti alla riga ed alla colonna che si incrociano in esso, aggiungendo tale riga e tale colonna - moltiplicate per opportuni polinomi differenziali - alle righe ed alle colonne ad esse parallele. D'altro canto, essendo per ipotesi $m - 1 > d$, in virtù dell'ammessa generalità dei coefficienti si ha che le ipersuperficie di S_d associate (nel senso specificato nel n. 8) agli operatori $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1m}$ non hanno alcun punto in comune; esistono quindi - in virtù del suaccennato criterio - dei polinomi differenziali $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_m$ tali che risulti identicamente

$$\lambda_2 \alpha_{12} + \lambda_3 \alpha_{13} + \dots + \lambda_m \alpha_{1m} = 1.$$

Ne discende che il primo elemento sulla diagonale principale di A vien ridotto all'unità, ove si sommino alla 1^a colonna le 2^a, 3^a, \dots , m^{ma} rispettivamente moltiplicate per $\lambda_2(1 - \alpha_{12}), \lambda_3(1 - \alpha_{13}), \dots, \lambda_m(1 - \alpha_{1m})$; dopo di che si potrà procedere nel modo indicato poc'anzi.

Applicando ad A convenientemente k volte questo procedimento, se ne ricava una matrice

$$B = \begin{vmatrix} I_k & O \\ O & C \end{vmatrix},$$

dove I_k è la matrice (quadrata) unità d'ordine k , le O sono matrici nulle e C denota una matrice del tipo $(n - k, m - k)$ ad elementi polinomi differen-

ziali. Corrispondentemente, le prime k equazioni del sistema (6) si riducono alle

$$z_i = v_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

e così forniscono esplicitamente ed univocamente le z_1, z_2, \dots, z_k con sole operazioni di derivazione; mentre le altre equazioni costituiscono di fatto un sistema di $n - k$ equazioni differenziali nelle rimanenti $m - k$ incognite z_{k+1}, \dots, z_m .

Con argomentazioni perfettamente analoghe alle precedenti, si prova del pari che:

L'integrale generale di un sistema di n equazioni a derivate parziali lineari a coefficienti costanti, in m funzioni incognite di d variabili, può generalmente venire ottenuto con sole operazioni di derivazione qualora si abbia $m > d + 1 \geq n$ oppure $n > d + 1 \geq m$. Detto integrale viene nel primo caso a dipendere da $m - n$ funzioni arbitrarie delle d variabili; esso risulta invece univocamente determinato nell'altro caso, per la compatibilità del sistema occorrendo allora però che i secondi membri soddisfino ad opportune condizioni (differenziali) d'integrabilità, in numero di $n - m$.

15. Riferiamoci ora (sempre con le notazioni del n. 14) ad un sistema (2) omogeneo per il quale sia $n = m - 1$, e cioè della forma:

$$(35) \quad \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m - 1).$$

Consideriamo i minori d'ordine massimo estratti dalla relativa matrice A presi con segni alterni, ossia i polinomi differenziali

$$(36) \quad \beta_l = (-1)^{m-l} \det \parallel \alpha_{ij} \parallel_{i=1, \dots, m-1; j=1, \dots, l-1, l+1, \dots, m} \\ (l = 1, 2, \dots, m);$$

essi manifestamente soddisfano identicamente alle

$$(37) \quad \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \beta_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m - 1).$$

Diremo brevemente che gli operatori β sono primi fra loro, per significare che tali sono i polinomi ad essi associati; è chiaro che, in questo caso, gli operatori β non possono risultare nulli simultaneamente. Possiamo allora enunciare il seguente teorema.

Nell'ipotesi (generalmente soddisfatta) che gli operatori β dati dalle (36) siano primi fra loro, si soddisfa nel modo più generale al sistema differenziale omogeneo (35) col porre

$$(38) \quad y_j = \beta_j z \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

dove z denoti una funzione arbitraria delle x_1, x_2, \dots, x_d .

Che le (38) soddisfino identicamente alle (35) è immediato, ove si tenga conto delle (37). Si tratta quindi soltanto di invertire questo risultato, e cioè di mostrare che - qualora le γ soddisfino alle (35) - si può sempre determinare una funzione z per cui valgano le (38). Ciò risulterà senz'altro dal lemma seguente.

Nell'ipotesi che gli operatori β definiti dalle (36) siano primi fra loro, le condizioni di integrabilità delle (38) - pensate come equazioni a derivate parziali nell' (unica) incognita z - sono precisamente date dalle (35) e dalle loro conseguenze differenziali.

A norma del n. 11, la più generale conseguenza differenziale del sistema (38) può venire scritta nella forma

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \beta_j z = \sum_{j=1}^m \lambda_j \gamma_j,$$

dove le λ denotino arbitrari polinomi differenziali; e le condizioni di integrabilità di quel sistema sono precisamente date dalle

$$(39) \quad \sum_{j=1}^m \lambda_j \gamma_j = 0,$$

in corrispondenza a quelle λ non tutte nulle che soddisfino identicamente alla

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j \beta_j = 0,$$

ossia - tenuto conto della (36) - per le quali si annulli identicamente il determinante del seguente sistema lineare nelle μ :

$$(40) \quad \lambda_j \mu_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ij} \mu_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Per ogni siffatta scelta delle λ , le (40) sono pertanto identicamente soddisfatte da opportuni polinomi differenziali μ non tutti nulli, che non è restrittivo supporre primi fra loro; in particolare risulta di certo $\mu_0 \neq 0$, poiché altrimenti le (40) implicherebbero l'annullarsi identico delle (36), in contrasto con ciò ch'è stato ammesso nel lemma. Mostreremo che:

Nelle ipotesi attuali, μ_0 deve ridursi ad una costante (non nulla).

Invero, ove così non fosse, sarebbe lecito considerare l'ipersuperficie caratteristica (n. 8) dell'operatore μ_0 . In forza delle (40), il generico punto di una fissata componente di tale ipersuperficie dovrebbe appartenere alle ipersuperficie caratteristiche degli operatori $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}$, oppure a quelle degli operatori (36), sicché o gli uni o gli altri non sarebbero primi fra loro, contro al supposto.

Possiamo dunque definire i polinomi differenziali

$$v_i = -\mu_i/\mu_0 \quad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

mediante i quali le (40) diventano

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_{ij} v_i \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

sicch  risulta identicamente

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j y_j = \sum_{i=1}^{m-1} v_i \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} y_j.$$

Questa relazione mostra che la (39)   una conseguenza differenziale delle (35), com'  appunto asserito dal lemma.

OSSERVAZIONE. — A norma del n. 9, fra le condizioni di integrabilit  delle (38) — pensate come equazioni a derivate parziali nell' (unica) incognita z — vi sono le

$$\beta_i y_j = \beta_j y_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

Queste sono conseguenze delle (35): ma   chiaro che, in generale, non equivalgono ad esse e quindi non bastano da sole ad assicurare l'esistenza di qualche funzione z soddisfacente alle (38). Ci  non contraddice il teorema del n. 11, in quanto il sistema (38) non soddisfa generalmente alla condizione (iii) di tale teorema.

16. Mediante considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel dimostrare il teorema del n. 15, si stabilisce la seguente generalizzazione di quello.

Riferiamoci ad un qualunque sistema di n equazioni a derivate parziali lineari omogenee a coefficienti costanti, in m funzioni incognite y_1, y_2, \dots, y_m delle variabili x_1, x_2, \dots, x_d :

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

nell'ipotesi che sia $n < m$ e che i minori d'ordine n estratti dalla matrice delle α risultino primi fra loro. Allora, supposto per fissare le idee

$$\beta = \det \|\alpha_{ij}\|_{i,j=1,2,\dots,n} \neq 0,$$

si soddisfa a quel sistema nel modo pi  generale assumendo

$$y_l = \sum_{h=n+1}^m \beta_{lh} z_h \quad (l = 1, 2, \dots, n),$$

$$y_h = \beta z_h \quad (h = n+1, \dots, m),$$

dove β_{lh} denoti il polinomio differenziale dato — per $l = 1, 2, \dots, n$; $h = n+1, \dots, m$ — da

$$\beta_{lh} = (-1)^{n-l+1} \det \|\alpha_{ij}\|_{i=1,2,\dots,n; j=1,\dots,l-1,l+1,\dots,n,h}$$

e le z_{n+1}, \dots, z_m siano $m-n$ funzioni arbitrarie delle x_1, x_2, \dots, x_d .

17. Come corollario immediato del teorema stabilito nel n. 15, otteniamo che:

Ferme restando le ipotesi del suddetto teorema, l'integrale generale di un sistema di m equazioni a derivate parziali in m funzioni incognite y_1, y_2, \dots, y_m del tipo:

$$(41) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} y_j = 0 & (i = 1, 2, \dots, m-1), \\ \sum_{j=1}^m \alpha_{mj} y_j = w \end{cases}$$

viene espresso dalle (38), dove le β si calcolino con le (36) e, δ designando il determinante della matrice A delle α , z denoti una qualunque soluzione dell'equazione differenziale

$$\delta z = w.$$

È chiaro che, nel caso omogeneo $w = 0$, $m-1$ qualsivogliano delle equazioni (41) possono venire scelte in luogo delle prime $m-1$, purché – beninteso – esse siano tali che *i minori d'ordine $m-1$ estratti dalla matrice delle relative α risultino primi fra loro*. Sistemi omogenei del tipo suddetto si presentano in una vastissima categoria di problemi della fisica matematica; per essi, una funzione $z = z(x_1, x_2, \dots, x_d)$ che permetta di esprimere il relativo integrale generale con sole derivazioni, e più precisamente mediante equazioni del tipo (38) con opportuna scelta degli operatori differenziali β_j , chiamasi – col Sobrero [17], § 1 – *una funzione potenziale* (in senso lato). Il precedente corollario fornisce dunque in particolare *l'esistenza di una siffatta funzione potenziale sotto ipotesi assai poco restrittive* (tanto da potersi ritenere generalmente soddisfatte).

Questo risultato trovasi già nei casi più semplici $d = m = 2$ e $d = 2$, $m > 2$, rispettivamente in Sobrero [17], § 2 ed in Fichera [16]. L'ultimo Autore, nell'interessante lavoro testé citato, ha dato senza dimostrazione il relativo enunciato per $d = 2$ ⁽⁴⁾, aggiungendo che – diversamente dalla conclusione a cui siamo dianzi pervenuti – quell'enunciato dovrebbe considerarsi generalmente non estendibile ai problemi in più di due variabili indipendenti. L'apparente contraddizione si dirime subito, osservando che l'esempio addotto in [16] per suffragare tale illazione presenta una notevolissima particolarità, più oltre segnalata, la quale fa sì che *per esso non valgano le ipotesi da noi specificate*.

Più precisamente, l'esempio in questione è quello del sistema differenziale

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \right) + a \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_3^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \right) + a \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_3^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \right) + a \left(\frac{\partial^2 y_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y_3}{\partial x_3^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

(4) Egli mi ha però gentilmente mostrato uno schizzo inedito di dimostrazione, secondo una via assai diversa e meno semplice di quella che risulta dal n. 15 e dal presente numero.

(con a costante non nulla), cui soddisfanno le componenti (y_1, y_2, y_3) del vettore spostamento nello studio dell'equilibrio di un solido elastico isotropo ed omogeneo — riferito a coordinate cartesiane ortogonali (x_1, x_2, x_3) — quando non vi siano forze di massa. Attualmente, la matrice di polinomi associata alla matrice A è

$$\left\| \begin{array}{ccc} x_1^2 + a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 + a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 + a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{array} \right\|;$$

ed è manifesto che *ciascuno dei minori del 2° ordine estratti da essa risulta divisibile per $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$* , sicché il primo enunciato di questo numero non è applicabile a tale sistema.

Il risultato — relativo all'esempio in esame — conseguito dal Fichera [16, teor. III], mostra la *necessarietà* delle ipotesi ammesse in quell'enunciato ed in quelli del n. 15. Di più esso prova che, se i polinomi differenziali β di cui al n. 15 non sono primi fra loro, *non risulta generalmente valido* — contrariamente a quanto potrebbe venir supposto — *il teorema ottenibile da quello del n. 15 col sostituire nelle (38) ai suddetti polinomi β i rispettivi quozienti col loro M.C.D.*

18. Riferiamoci ora (sempre con le notazioni del n. 14) ad un sistema (2) per il quale si abbia $n = m + 1$, ossia della forma

$$(42) \quad \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} y_j = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

e poniamo per abbreviare

$$(43) \quad \gamma_l = (-1)^{n-l} \det \|\alpha_{ij}\|_{i=1, \dots, l-1, l+1, \dots, n; j=1, 2, \dots, n-1} \\ (l = 1, 2, \dots, n).$$

Ci proponiamo di dimostrare che:

Nell'ipotesi (generalmente soddisfatta) che gli operatori γ dati dalle (43) siano primi fra loro, esistono delle funzioni y soddisfacenti al sistema (42) se, e soltanto se, vale l'identità:

$$(44) \quad \sum_{i=1}^n \gamma_i u_i = 0.$$

La *necessarietà* della (44) è immediata, in quanto — in forza delle (43) — sussistono ovviamente le

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \gamma_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Per dimostrarne la sufficienza, osserviamo che, a norma del n. 11, le condizioni di compatibilità del sistema (42) possono tutte venire scritte nella forma

$$(45) \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0,$$

dove le λ denotino polinomi differenziali non tutti nulli tenuti soltanto a soddisfare le

$$(46) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \lambda_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1).$$

I polinomi differenziali (43) essendo non tutti identicamente nulli per ipotesi, dalle (46) discende la proporzionalità fra le λ e le γ ; sicché dev'essere

$$\lambda_i = \rho \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dove ρ designa un opportuno polinomio differenziale, in quanto le γ sono state supposte prime fra loro. Risulta pertanto identicamente

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \rho \sum_{i=1}^n \gamma_i u_i;$$

sicché, di fatto, la (45) coincide con la (44) oppure è una sua conseguenza differenziale.

19. Dimostreremo da ultimo il seguente teorema.

Consideriamo un qualunque sistema di m equazioni a derivate parziali, lineari ed a coefficienti costanti, in altrettante funzioni incognite z_1, z_2, \dots, z_m :

$$(47) \quad \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} z_j = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

e supponiamo che, per ogni $l = 1, 2, \dots, m-1$, i minori d'ordine l estratti dalla matrice

$$\| \alpha_{ij} \|_{i=1, \dots, l; j=1, \dots, l+1}$$

siano primi fra loro. Allora si può formare una successione di m equazioni a derivate parziali, lineari ed a coefficienti costanti, ciascuna contenente una sola funzione incognita, tali che l'integrazione completa del dato sistema (47) si ottenga determinando ordinatamente un integrale particolare delle prime $m-1$ equazioni e l'integrale generale dell'ultima.

Il teorema essendo banale per $m=1$, potremo supporre $m \geq 2$ e dimostrarlo per induzione rispetto ad m . Sarà quindi lecito applicare il teorema stesso al sistema

$$(48) \quad \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} \bar{z}_j = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

ciò che intanto condurrà a formare una successione di $m - 1$ equazioni a derivate parziali, lineari ed a coefficienti costanti, ciascuna contenente una sola funzione incognita, per modo che determinando ordinatamente un integrale particolare per ciascuna di esse se ne possa trarre un integrale particolare delle (48). Ci resta ora da far vedere come, noto che sia un siffatto integrale particolare $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{m-1})$, sia possibile ricavare l'integrale generale delle (47) integrando un' m^{ma} equazione a derivate parziali, lineare ed a coefficienti costanti, essa pure in una sola funzione incognita.

A tal uopo introduciamo m nuove funzioni incognite, y , assumendo

$$z_1 = \bar{z}_1 + y_1, z_2 = \bar{z}_2 + y_2, \dots, z_{m-1} = \bar{z}_{m-1} + y_{m-1}, z_m = y_m.$$

Con ciò, avuto riguardo alle (48), le (47) si riducono precisamente alle (41), ove si assuma come funzione nota, w , la:

$$w = u_m - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{mj} \bar{z}_j.$$

Applicando quindi il primo enunciato del n. 17, si conclude tosto nel modo voluto.

BIBLIOGRAFIA.

- [16] G. FICHERA, *Sull'esistenza delle funzioni potenziali nei problemi della Fisica-matematica*, « Rend. Acc. Lincei », (8) 2 (1947)₁, 527-532.
 [17] L. SOBRERO, *Delle funzioni analoghe al potenziale intervenienti nella Fisica-matematica*, « Rend. Acc. Lincei », (6) 21 (1935)₁, 448-454.

Analisi matematica. — *Sull'integrale affine di una funzione analitica di due n^{uple} di variabili.* Nota (*) del Corrisp. LUIGI FANTAPPIÈ.

1. In un lavoro precedente ⁽¹⁾ è stata definita la *traccia proiettiva* $\overset{\Delta}{T}q$ di una funzione qualunque $q(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_1, \dots, t_n)$ di due n^{uple} $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e t_1, t_2, \dots, t_n , purché *analitica e regolare* in due n -cilindri associati Q e Q' (cioè con raggi reciproci)

$$(I) \quad Q \equiv (|\alpha_1| \leq \rho_1, \dots, |\alpha_n| \leq \rho_n) \quad ; \quad Q' \equiv (|t_1| \leq \rho'_1 = \frac{1}{\rho_1}, \dots, |t_n| \leq \rho'_n = \frac{1}{\rho_n})$$

e quindi sviluppabile in serie nel dominio $Q \times Q'$

$$(2) \quad q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{\substack{r_1, \dots, r_n, \\ s_1, \dots, s_n}}^{\infty} q_{s_1, \dots, s_n}^{r_1, \dots, r_n} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_n^{r_n} t_1^{s_1} \dots t_n^{s_n}$$

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) L. FANTAPPIÈ, *L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari, ecc.*, « Ann. di Matem. », ser. 4^a, t. 22, pp. 181-289 (1943).

mediante la serie assolutamente convergente

$$(3) \quad \overset{\Delta}{T}q = \sum_{r_1 \dots r_n}^{\infty} \frac{(-1)^r r_1! \dots r_n!}{r!} q_{r_1 \dots r_n}^{r_1 \dots r_n} \quad (r = r_1 + r_2 + \dots + r_n)$$

(ved. ⁽¹⁾, formula (8,6)), oppure mediante l'integrale (ved. ⁽¹⁾, (8, 7))

$$(4) \quad \overset{\Delta}{T}q = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C'_1} d\alpha_1 \dots \int_{C'_n} d\alpha_n \int_{\Omega} d\omega \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{t^{n-1}}{\alpha_1 \dots \alpha_n} q \left(\frac{-t\tau_1}{\alpha_1}, \frac{t(\tau_1 - \tau_2)}{\alpha_2}, \dots, \frac{t(\tau_{n-1} - 1)}{\alpha_n}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \right) \right\}$$

ove le C'_s indicano i circoli dei piani complessi α_s ($s = 1, 2, \dots, n$) con centro nell'origine e raggi ρ'_s di Q' , $d\omega = d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{n-1}$, e Ω è la piramide dello spazio S_{n-1} delle τ_k , data dalla (6,28) di ⁽¹⁾

$$\Omega \equiv (0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_{n-1} \leq 1).$$

Altre formule equivalenti alla (4) si ottengono portando il fattore t nell'altra n^{uple} di variabili, o scambiando il ruolo delle due n^{uple} , e quindi sostituendo i circoli C'_s coi circoli C_s di raggi ρ_s di Q (ibid., fine cap. I); in particolare si ha anche l'altra espressione della traccia

$$(5) \quad \overset{\Delta}{T}q = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} d\alpha_1 \dots \int_{C_n} d\alpha_n \int_{\Omega} d\omega \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{t^{n-1}}{\alpha_1 \dots \alpha_n} q \left(t\alpha_1, \dots, t\alpha_n, \frac{-\tau_1}{\alpha_1}, \frac{\tau_1 - \tau_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{\tau_{n-1} - 1}{\alpha_n} \right) \right\}$$

come pure le espressioni che si ottengono permutando a nostro arbitrio gli n numeratori, dipendenti dalle variabili τ_s . Questa traccia, che porta su una funzione q di due n^{uple} di variabili, sarà detta perciò traccia proiettiva di q , d'ordine n , e sarà indicata anche con $\overset{\Delta}{T}_n q$; il nome di *traccia* è legato al fatto che la somma dei termini della (3), con r costante, a meno di un fattore numerico, non è altro che *la traccia della matrice quadrata*, formata con le derivate di q nell'origine, d'ordine r tanto rispetto alle α_k che alle t_s .

Quando, in particolare, la funzione q si spezza nel prodotto di due funzioni $p(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $y(t_1, \dots, t_n)$ delle due n^{uple} separate, la traccia proiettiva di questo prodotto si riduce al *prodotto funzionale proiettivo* $p \nabla y$ delle due funzioni

$$(6) \quad \overset{\Delta}{T} \{ p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) y(t_1, \dots, t_n) = p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \nabla y(t_1, \dots, t_n)$$

(ved. ⁽¹⁾, (8,4)), che è una formazione molto importante, perché ogni *funzionale analitico lineare* $F[y(t_1, \dots, t_n)]$ può rappresentarsi in questo modo, se y è regolare in Q' e se *la sua indicatrice proiettiva* p , definita dalla formula

$$(7) \quad p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = F \left[\frac{1}{1 + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n} \right]$$

è regolare in Q .

Calcolando anzi il valore del funzionale lineare F , dato dalla (6), con la formula (5), si ottiene per questo valore l'espressione integrale più semplice

$$(8) \quad F[y] = p \nabla y = \overset{\Delta}{T} \{ p y \} = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} d\alpha_1 \cdots \int_{C_n} d\alpha_n \int_{\Omega} d\omega p_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_n} y\left(\frac{-\tau_1}{\alpha_1}, \frac{\tau_1 - \tau_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{\tau_{n-1} - 1}{\alpha_n}\right)$$

già data in altro precedente lavoro⁽²⁾, ove p_1 , rappresenta la funzione, che diremo *indicatrice affine* del funzionale lineare F ,

$$(9) \quad p_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_{l=1}^{n-1}} \{ t^{n-1} p(t\alpha_1, t\alpha_2, \dots, t\alpha_n) \} = \\ = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_{l=1}^{n-1}} F\left[\frac{t^{n-1}}{1 + t(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \dots + \alpha_n t_n)}\right] = (n-1)! F\left[\frac{1}{(1 + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n)^n}\right]$$

(ved. ⁽²⁾, formula (12, 14)).

2. Osserviamo ora che il calcolo di una traccia proiettiva (3) d'ordine n si può sempre ridurre al calcolo di due tracce proiettive di ordini $k < n$ e $h+1$ (con $h = n - k$), e in definitiva al calcolo di tracce di 2° ordine soltanto. Basta distribuire le n^{uple} α_s e t_s in due sistemi ciascuna, che indicheremo con α', α'' e t', t'' , dati da

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'_1 = \alpha_1, \alpha'_2 = \alpha_2, \dots, \alpha'_k = \alpha_k \\ t'_1 = t_1, t'_2 = t_2, \dots, t'_k = t_k \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha''_1 = \alpha_{k+1}, \dots, \alpha''_h = \alpha_n \\ t''_1 = t_{k+1}, \dots, t''_h = t_n \end{array} \right.$$

e aggiungere due nuove variabili arbitrarie α''_0 e t''_0 , e applicare successivamente le due tracce proiettive $\overset{\Delta}{T}_k$ e $\overset{\Delta}{T}_{h+1}$ rispetto alle variabili α', t' e α'', t'' , per ottenere le espressioni

$$(11) \quad \overset{\Delta}{T}_k q(-\alpha''_0 \alpha'_1, -\alpha''_0 \alpha'_2, \dots, -\alpha''_0 \alpha'_k, \alpha''_1, \dots, \alpha''_h, t''_0 t'_1, \dots, t''_0 t'_k, t''_1, \dots, t''_h) = \\ = \sum_{r'_1 \dots r'_k r''_1 \dots r''_h} \frac{r'_1! r'_2! \dots r'_k!}{r'!} \alpha''_0^{r'} t''_0^{r'} q_{r'_1 \dots r'_k r''_1 \dots r''_h}^{r'_1 \dots r'_k r''_1 \dots r''_h} \alpha''_1^{r''_1} \dots \alpha''_h^{r''_h} t''_1^{s''_1} \dots t''_h^{s''_h}$$

(con $r' = r'_1 + r'_2 + \dots + r'_k$), e anche

$$(12) \quad \overset{\Delta}{T}_{h+1} \overset{\Delta}{T}_k q(-\alpha''_0 \alpha'_1, \dots, -\alpha''_0 \alpha'_k, \alpha''_1, \dots, \alpha''_h, t''_0 t'_1, \dots, t''_0 t'_k, t''_1, \dots, t''_h) = \\ = \sum_{r'_1 \dots r'_k r''_1 \dots r''_h} (-1)^r \frac{r'_1! \dots r'_k! r''_1! \dots r''_h!}{r'!} q_{r'_1 \dots r'_k r''_1 \dots r''_h}^{r'_1 \dots r'_k r''_1 \dots r''_h} = \overset{\Delta}{T}_n q.$$

In particolare, per $k = n - 1$, una traccia $\overset{\Delta}{T}_n$ d'ordine n si riduce all'applicazione di due tracce $\overset{\Delta}{T}_{n-1}$ e $\overset{\Delta}{T}_2$, ma quella d'ordine $n - 1$ si può esprimere

(2) L. FANTAPPIÈ, *Les nouvelles méthodes d'intégration, ecc.*, 2^d Colloque sur les équations aux dérivées partielles, Bruxelles, mai 1954, formula (12, 13).

a sua volta con una traccia di 2° ordine e una d'ordine $n - 2$, e così via, fino a giungere a esprimere una traccia $\overset{\Delta}{T}_n$, d'ordine n , mediante $n - 1$ tracce di 2° ordine, in un ordine qualunque, dato che operano rispetto a sistemi di variabili differenti.

3. Le definizioni (3), (4), (5) della traccia proiettiva $\overset{\Delta}{T}_n q$ di una funzione q delle α_k e delle t_s sono tutte conseguenze della definizione data con la (8, 3) del lavoro citato in ⁽¹⁾, e cioè con l'espressione

$$(13) \quad \overset{\Delta}{T}q = T_{\alpha_1} \cdots T_{\alpha_n} T_{t_1} \cdots T_{t_n} \chi_n(\alpha'_1 t'_1, \dots, \alpha'_n t'_n) q(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_1, \dots, t_n).$$

in cui χ_n è la funzione (6, 21), (6, 25) o (6, 26) di ⁽¹⁾, nella quale ultima si siano poste le $\tau_k = t\tau'_k$,

$$(14) \quad \chi_n(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{r_1 \dots r_n}^{\infty} \frac{(-1)^{r_1} r_1! \dots r_n!}{r!} z_1^{r_1} \dots z_n^{r_n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_1^{n-1}} \{ I^{n-1} L_{z_1} \dots L_{z_n} I \} \\ = \frac{\partial^{n-1}}{\partial t_1^{n-1}} \int_{\Omega} d\omega \cdot \frac{I}{I + z_1 \tau_1 t} \cdot \frac{I}{I - z_2 (\tau_1 - \tau_2) t} \dots \frac{I}{I - z_n (\tau_{n-1} - I) t}.$$

Volendo evitare la complicazione delle derivazioni rispetto a t , introduciamo ora la funzione $\bar{\chi}_n$, che si ottiene, per $t = 1$, senza effettuare queste derivazioni, e cioè la funzione che, per le (6,24) e (6,18) di ⁽¹⁾, è rappresentata dalla serie convergente (per $|z_k| < 1$)

$$(15) \quad \bar{\chi}_n(z_1, \dots, z_n) = \{ I^{n-1} L_{z_1} \dots L_{z_n} I \}_{t=1} = \left\{ \sum_{r_1 \dots r_n}^{\infty} (-1)^{r_1} r_1! \dots r_n! z_1^{r_1} \dots z_n^{r_n} I^{r_1 + \dots + r_n - 1} I \right\}_{t=1}$$

o anche

$$(16) \quad \bar{\chi}_n(z_1, \dots, z_n) = \sum_{r_1 \dots r_n}^{\infty} \frac{(-1)^{r_1} r_1! \dots r_n!}{(r_1 + \dots + r_n - 1)!} z_1^{r_1} \dots z_n^{r_n} = \\ = \int_{\Omega} d\omega \frac{I}{I + z_1 \tau_1} \cdot \frac{I}{I - z_2 (\tau_1 - \tau_2)} \dots \frac{I}{I - z_n (\tau_{n-1} - I)}.$$

Confrontando la (16) col 2° membro della (14), vediamo allora che è

$$(17) \quad \bar{\chi}_n(z_1, \dots, z_n) = \{ I_{\lambda}^{n-1} \chi_n(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n) \}_{\lambda=1}$$

con

$$(18) \quad I_{\lambda} f(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(\lambda) d\lambda.$$

Si ha dunque, dalla (17),

$$(19) \quad \bar{\chi}_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{I}{(n-2)!} \int_0^1 (1-\lambda)^{n-2} \chi_n(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n) d\lambda$$

mentre dalla (16) si ricava inversamente

$$(20) \quad \chi_n(z_1, \dots, z_n) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda_{n-1}} \{ \lambda^{n-1} \bar{\chi}_n(\lambda z_1, \dots, \lambda z_n) \} = (n-1)! M^{(n-1)} \bar{\chi}_n(z_1, \dots, z_n)$$

ove $M^{(n-1)}$ è la media proiettiva d'ordine $n-1$ di $\bar{\chi}_n$, nel punto considerato (ved. (20,3) di ⁽¹⁾).

Accanto alla traccia proiettiva (4) o (5) possiamo allora introdurre anche l'altra formazione, *puramente integrale* (senza operazioni di derivazione), che chiameremo *integrale affine* d'ordine n di q , e indicheremo col simbolo

$$(21) \quad \int_{\Delta} q(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \bar{\alpha}^1, \dots, \alpha^n) d\alpha = \\ = T_{\alpha_1} \dots T_{\alpha_n} T_{t_1} \dots T_{t_n} \bar{\chi}_n(\alpha'_1 t'_1, \dots, \alpha'_n t'_n) q(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_1, \dots, t_n).$$

Sostituendo allora in questa formula l'espressione integrale di $\bar{\chi}_n$ data dal 3° membro della (16), e calcolando le tracce T_{α_k}, T_{t_k} come è stato fatto al n. 7 di ⁽¹⁾ (meno le derivazioni) si ottiene per l'integrale affine di q la notevole espressione integrale

$$(22) \quad \int_{\Delta} q d\alpha = \\ = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} d\alpha_1 \dots \int_{C_n} d\alpha_n \int_{\Omega} d\omega \cdot \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n} q\left(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \frac{-\tau_1}{\alpha_1}, \frac{\tau_1 - \tau_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{\tau_{n-1} - 1}{\alpha_n}\right)$$

e tutte le altre che si ricavano da questa scambiando le due n^{uple} di variabili, o i numeratori dipendenti dalle τ_k . Sostituendo invece nella (21) l'espressione di $\bar{\chi}_n$ data dal 2° membro della (16), si ottiene l'integrale affine di q espresso dalla serie convergente

$$(23) \quad \int_{\Delta} q d\alpha = \sum_{r_1 \dots r_n}^{\infty} \tau_n (-1)^r \frac{r_1! \dots r_n!}{(r+n-1)!} q_{r_1 \dots r_n}^{r_1 \dots r_n}$$

se q è dato dalla serie (2).

Da queste espressioni (22) e (23) dell'integrale affine, risulta allora che esso dipende simmetricamente dalle due n^{uple} di variabili, come pure che il suo valore non cambia per sostituzioni lineari omogenee « duali » (affini, da cui il suo nome), sulle due n^{uple} di variabili (contragredienti), proprietà questa che si dimostra esattamente come l'analoga proprietà della traccia proiettiva (ved. n. 9 e fine del n. 12 del lavoro ⁽¹⁾).

Tenendo conto della (20), con cui si passa da $\bar{\chi}_n$ a χ_n , e delle espressioni (13) e (21) della traccia proiettiva e dell'integrale affine di q , ricaviamo poi

immediatamente l'espressione della traccia da quella dell'integrale affine nella forma

$$\begin{aligned}
 (24) \quad \overset{\Delta}{T}q &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda_{\lambda=1}^{n-1}} \left\{ \lambda^{n-1} \int_{\Delta} q(\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n, \alpha^1, \dots, \alpha^n) d\alpha \right\} = \\
 &= \int_{\Delta} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda_{\lambda=1}^{n-1}} \{ \lambda^{n-1} q(\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n, \alpha^1, \dots, \alpha^n) \} d\alpha = \\
 &= (n-1)! \int_{\Delta} M_{\alpha_k}^{(n-1)} q(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha^1, \dots, \alpha^n) d\alpha
 \end{aligned}$$

e cioè la traccia proiettiva di q come l'integrale affine (moltiplicato per $(n-1)!$) della media proiettiva d'ordine $n-1$ della q stessa, considerata come funzione della prima n^{upla} di variabili (o, più generalmente, anche della 2^a n^{upla} , o di una n^{upla} qualunque α_k , tale che α'_k coincida con α_k o con α^k , per $k=1, 2, \dots, n$).

Inversamente, si ricava dalla (19) l'espressione dell'integrale affine mediante la traccia proiettiva, con la formula

$$(25) \quad \int_{\Delta} q d\alpha = \frac{1}{(n-2)!} \int_0^1 (1-\lambda)^{n-2} \overset{\Delta}{T}q(\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n, \alpha^1, \dots, \alpha^n) d\lambda.$$

4. Con l'introduzione dell'integrale affine (22), l'espressione generale (8) del valore di un qualunque funzionale lineare $F[y]$ si può scrivere simbolicamente nella forma semplice (che è poi la stessa data in ⁽²⁾)

$$(26) \quad F[y] = p \nabla y = \overset{\Delta}{T} \{ p(\alpha_k) y(\alpha^k) \} = \int_{\Delta} p_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) y(\alpha^1, \dots, \alpha^n) d\alpha$$

in cui $p_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ non è altro che l'indicatrice affine (9) del funzionale lineare F . Tale valore di F per la funzione y è dato dunque dall'integrale affine del prodotto dell'indicatrice affine p_1 per la funzione y , variabile indipendente.

5. In particolare, possiamo applicare la formula (26) per calcolare il valore di una funzione $y(t_1, t_2, \dots, t_n)$ in un punto fissato z_1, z_2, \dots, z_n , che supporremo abbastanza prossimo all'origine, valore che è certamente un funzionale lineare $F_0[y]$, la cui indicatrice proiettiva p_0 è

$$(27) \quad p_0 = F_0 \left[\frac{1}{1 + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n} \right] = \frac{1}{1 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n}$$

e la cui indicatrice affine è, per la (9),

$$(28) \quad p_{01} = (n-1)! F_0 \left[\frac{1}{(1 + \alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_n t_n)^n} \right] = \frac{(n-1)!}{(1 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n)^n}.$$

Si avrà dunque dalla (26) il valore di y nel punto z_k , con una formula integro-differenziale, mediante l'indicatrice proiettiva

$$(29) \quad y(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{1 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n} \nabla y(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$$

oppure mediante l'indicatrice affine

$$(30) \quad \gamma(z_1, z_2, \dots, z_n) = \int_{\Delta} \frac{(n-1)!}{(1 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n)^n} \gamma(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) d\alpha$$

e cioè, tenendo conto della (22), con l'espressione puramente integrale

$$(31) \quad \gamma(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} d\alpha_1 \dots \int_{C_n} d\alpha_n \int_{\Omega} d\omega \frac{1}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{1}{(1 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n)^n} \cdot \gamma\left(\frac{-\tau_1}{\alpha_1}, \frac{\tau_1 - \tau_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{\tau_{n-1} - \tau_n}{\alpha_n}\right).$$

Questa formula integrale per il valore di una funzione in un punto è stata data, sotto forma alquanto diversa, ma particolarmente espressiva, specialmente per quanto riguarda la varietà d'integrazione, dal L e r a y ⁽³⁾.

6. Nel caso di $n = 2$ e $\gamma(t_1, t_2)$ reciproca di un polinomio $Q(t_1, t_2)$, la espressione (26) è già stata calcolata esplicitamente, nel lavoro citato in ⁽¹⁾ (al n. 26, con la formula (26,5), in cui si sostituisca γ con p e z con p_i), nella forma

$$(32) \quad \frac{1}{Q(\alpha_1, \alpha_2)} \nabla p(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{\Delta} p_1(\alpha_1, \alpha_2) \frac{1}{Q(\alpha^1, \alpha^2)} d\alpha = \\ = \frac{1}{2\pi i} \iint_D \frac{1}{J^*(x_1, x_2)} p_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

in cui $1/J^*$ è il salto, sulle due facce di D , della funzione reciproca dello jacobiano

$$(33) \quad J(x_1, x_2) = \frac{d(q, Q)}{d(\alpha_1, \alpha_2)} = x_1 Q'_2 - x_2 Q'_1$$

delle due funzioni delle α_k

$$(34) \quad \begin{cases} q = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 1 = 0 \\ Q = Q(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \end{cases}$$

nella quale le α_k si pensino ricavate da queste due equazioni, in funzione delle x_k , mentre la varietà d'integrazione D è un'opportuna superficie che ha il suo contorno sulla curva singolare $J = 0$ (luogo dei punti di contatto), nell'ipotesi che l'equazione $Q = 0$ rappresenti un involuppo di rette $q = 0$ del piano x_1, x_2 , senza elementi multipli. Se in questo involuppo compaiono invece rette multiple, bisognerà sostituire D , o meglio la superficie chiusa (ciclo) costituita dalle sue due facce, sulle quali si considerino i valori (in generale diversi) di $1/J$, con un'altra superficie chiusa V omologa (nel caso generale),

(3) J. LERAY, *Le problème de Cauchy pour une équation linéaire à coefficients polynomiaux*, «C. R. Ac. des Sc.», t. 242, pp. 953-959, 20 févr. 1956.

da cui si possono poi ottenere per continuità le espressioni relative a un qualunque involuppo, anche con elementi multipli, nella forma

$$(35) \quad \int_{\Delta} \frac{1}{Q(\alpha_1, \alpha_2)} p_1(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha = \frac{1}{2\pi i} \iint_V \frac{1}{J(x_1, x_2)} p_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Così, per esempio, nel caso dell'involuppo di 3^a classe

$$(36) \quad Q(\alpha_1, \alpha_2) = 4 + 12\alpha_1 - 15\alpha_1^2 - 27\alpha_2^2 + 4\alpha_1^3 = 0$$

che rappresenta una cardioide, l'espressione (35) diviene ⁽⁴⁾

$$(37) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Q(\alpha_1, \alpha_2)} \nabla p(\alpha_1, \alpha_2) &= \int \frac{1}{Q(\alpha_1, \alpha_2)} p_1(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \iint_V \frac{1}{J(x_1, x_2)} p_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \frac{1}{36\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{+\sqrt{\frac{3}{2}}} p_1\left(-\frac{1}{2}, x_2\right) dx_2 \end{aligned}$$

ove V è il dominio reale racchiuso dalla cardioide (36), contato con le sue due facce.

In particolare, per p_1 uguale all'indicatrice affine (28) del funzionale F_0 , questa formula ci dà il valore (30) o (31) della funzione razionale reciproca di Q nella forma notevole

$$(38) \quad \begin{aligned} \frac{1}{Q(z_1, z_2)} &= \frac{1}{2\pi i} \iint_V \frac{1}{(1 + x_1 z_1 + x_2 z_2)^2} \frac{1}{J(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 + \\ &+ \frac{1}{36\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}}^{+\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\left(1 - \frac{z_1}{2} + x_2 z_2\right)^2} dx_2 \end{aligned}$$

con cui questa funzione razionale viene decomposta in due parti (razionali), una data dall'integrale doppio, *delimitato dalla cardioide*, l'altra data dall'integrale semplice, *lungo la retta doppia* dell'involuppo, tra i punti di contatto.

Queste parti sono dunque relative *alle due parti*, in cui si spezza la curva singolare della funzione, pensata però non nel piano α_1, α_2 iniziale (rigato), ma *nel piano duale* x_1, x_2 , e cioè come *luogo dei punti di contatto*, curva che si spezza appunto nella *cardioide* e nella *retta doppia*, contata due volte.

(4) J. CASULLERAS, *Aplicacion de la teoria de los funcionales analiticos, ecc.*, «Collectanea Mathem.», vol. 1^o, fasc. 2, p. 44, formula (17, 2), in cui p_1 deve essere sostituito da p e z da p_1 .

Volendo quindi ricercare una possibile decomposizione delle funzioni analitiche di due variabili in parti « principali » relative alle singole curve (analitiche), singolari per una tale funzione, mediante le formule (30) o (31), o quella di Lera y, vediamo che il caso particolare (38) ci indica un fatto importantissimo, e cioè che le singole curve singolari della funzione analitica $y(z_1, z_2)$ vanno cercate non nel piano iniziale (z_1, z_2) , ma nel piano duale (x_1, x_2) , e cioè nella decomposizione della curva luogo dei punti di contatto dell'involuppo delle rette, che hanno coordinate (di « retta ») z_1, z_2 , singolari per la y . Ciò può forse contribuire a spiegare la radicale diversità fra le proprietà delle funzioni analitiche di una variabile, che sono definite su una retta, il cui spazio duale coincide con la retta stessa, e quelle delle funzioni analitiche di due o più variabili, che sono invece definite su uno spazio punteggiato, ben diverso dal corrispondente spazio duale (rigato o planato).

Geometria. — *Sul comportamento effettivo delle polari.* Nota (*) del Socio OSCAR CHISINI.

1. Si consideri una singolarità S realizzata da una curva algebrica piana $f(x, y) = 0$, passante con un (unico) ramo d'ordine ν per l'origine O ($x = y = 0$) degli assi.

Sia

$$f'(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

la polare, rispetto ad f , di un punto generico A , quale può suppersi essere il punto improprio dell'asse y .

Il comportamento della f' in O è espresso dalla nota regola di Enriques ⁽¹⁾. Ma questa regola non è verificata in tutti i casi ⁽²⁾.

Quantunque non esplicitamente, la trattazione di Enriques mostra chiaramente, come sottintesa, la ipotesi che la curva $f(x, y) = 0$ sia « generica » fra quelle che posseggono la singolarità S , dal cui schema appunto è dedotta quella, S' , della polare.

D'altra parte E. Vesentini ⁽³⁾ ha svolto in proposito una accurata analisi (complessa e minuta) precisando i casi di eccezione e mostrando così che l'ipotesi di generalità vale a garantire l'esattezza della regola; inoltre egli ha indicato una condizione significativa per riconoscere il caso di generalità ⁽⁴⁾.

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) Legge di alternanza e principio di massima separazione dei rami. Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni*, vol. II, p. 438.

(2) Un esempio, analizzato da B. SEGRE (*Geometria algebrica e aritmetica*, « Atti IV Congresso U.M.I. », Taormina 1951) è la curva $y^{12} + x^{13} = 0$; altro è la curva $y^{11} - x^{19} = 0$.

(3) « Annali di Matematica pura e applicata », serie IV, tomo XXXIV (1953) p. 219.

(4) Loc. cit., p. 245.

Ora, avendo avuto occasione di riesaminare il problema, ho visto che la validità della regola di Enriques per la curva generica avente una data singolarità S può dimostrarsi con notevole semplicità e che la condizione perché la f possa considerarsi generale (sia pure espressa in una forma leggermente diversa da quella usata dal Vesentini) è solo un caso particolare di una proposizione da me stabilita ⁽⁵⁾. Esporre ciò è lo scopo della presente Nota.

2. Scriviamo lo sviluppo del ramo della curva f che dà la singolarità S nella forma

$$(1) \quad y = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + a_3 x^{\alpha_3} + \dots + a_s x^{\alpha_s} + a_{s+1} x^{\alpha_{s+1}} + \dots$$

dove, per chiarezza tipografica, indico con $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ le frazioni che nella nomenclatura classica di Enriques si indicano con $(v + v')/v, (v + v' + v'')/v, \dots$: abbiamo dunque

$$\alpha_1 = \frac{v + v'}{v}, \quad \alpha_2 = \frac{v + v' + v''}{v}, \dots$$

(v, v', v'' numeri interi).

Inoltre possiamo supporre che i termini scritti dello sviluppo (1) siano tutti caratteristici.

La dimostrazione si ottiene prima per i rami di specie 1, poi - con induzione completa - in generale.

Consideriamo ora la singolarità S come data dallo sviluppo (1) limitato al primo termine che scriviamo $a_1 x^{\alpha/\beta}$ con α e β primi fra loro e

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha_1 = \frac{v + v'}{v}.$$

La singolarità della curva $f(x, y)$ è così rappresentata dalla equazione

$$(2) \quad f(x, y) = \Pi (y - a_1 x^{\alpha_1})$$

dove il prodotto va esteso a tutti i β valori che hanno i suoi fattori attribuendo ad $x^{1/\beta}$ le sue β determinazioni.

Sia ora $\Phi(x, y) = 0$ una curva che si comporta nel punto O come dovrebbe comportarsi la polare $\partial f / \partial y = 0$ secondo la regola di Enriques. Chiamiamo normale (rispetto ad S) la sua singolarità S' .

La curva Φ risulta composta di un certo numero di parti, φ_n , che hanno comuni con f solo punti appartenenti al primo (e per ora unico) gruppo satellite, staccandosi dal ramo (1) in un punto appartenente (come ultimo) a un tratto verticale (cioè d'indice dispari) del gruppo satellite. La φ_n ha quindi l'espressione

$$(3) \quad y = c_n x^{\delta_n} \quad \text{con} \quad \delta_n > \alpha_1 \quad (6).$$

(5) O. CHISINI, *Sulla singolarità di una superficie in un punto generico di una curva multipla*, « Rend. Accademia delle Scienze di Bologna », seduta del 22 febbraio 1920.

(6) δ_n è ridotta d'ordine dispari della frazione $\alpha/\beta = (v + v')/v$.

Assumiamo come curva Φ la

$$(4) \quad \Phi(x, y) = \Pi_{\varphi}(y - c_n x^{\delta_n}) = 0$$

dove con Π_{φ} indichiamo il prodotto di tutti i termini relativi alle φ_n che si ottengono attribuendo a ciascun x^{δ_n} tutte le sue determinazioni.

È ovvio che effettivamente la Φ così costruita ha in O la singolarità S' .

Per dimostrare che la polare di una f generica, avente in O la singolarità S , ha la singolarità S' basterà costruire una $F(x, y) = 0$ tale che la sua polare $\partial F / \partial y = 0$ coincida con la $\Phi(x, y) = 0$ e, d'altra parte, la $F(x, y) = 0$ abbia la singolarità S .

Ora la F è subito trovata: scritta infatti la Φ nella forma

$$(5) \quad \Phi(x, y) = \sum a_{rs} x^r y^s = 0$$

la $F(x, y)$ risulta data da

$$(6) \quad F(x, y) = \sum \frac{a_{rs} x^r}{s+1} y^{s+1} - \lambda x^{\alpha} = 0$$

dove

$$\lambda = \beta a_1^{\beta}.$$

Appare subito ovvio che la F ha come polare la Φ . La dimostrazione poi che la F ha in O uno sviluppo del tipo (i), con dati a_1, α_1 , si riduce ad una verifica banale.

Si osserva infatti che nella F data dalla (6) esiste un termine in y^{β} , uno in x^{α} , e che, posto

$$y = x^{\alpha/\beta},$$

tutti gli altri termini risultano infinitesimi di ordine $r > \beta$. Pertanto ove si cerchi lo sviluppo in serie di Puiseux della $y(x)$ definita dalla (6), applicando il classico metodo di Newton Cramer, si ha come (prima) separatrice la congiungente i punti immagine di questi due termini, e in questa separatrice non cadono altri elementi (7); risulta quindi (come prima equazione):

$$\beta y^{\beta} = \beta a_1^{\beta} x^{\alpha}$$

cioè

$$y = a_1 x^{\alpha/\beta}.$$

3. La estensione poi al caso di un ramo di specie qualunque si ottiene supponendo il risultato per i rami di una certa specie (s) e deducendolo per quelli della specie immediatamente superiore ($s+1$).

Consideriamo dunque le due singolarità:

$$\eta = a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + \dots + a_s x^{\alpha_s}$$

$$y = a_1 x^{\alpha_1} + \dots + a_s x^{\alpha_s} + a_{s+1} x^{\alpha_{s+1}}.$$

(7) Ricordare che si ha $\delta_n > \alpha_1 = \alpha/\beta$.

La prima sia relativa ad una curva $f(x, \eta) = 0$, la cui polare $f'_\eta(x, \eta) = 0$ abbia la singolarità normale, l'altra sia relativa ad una curva $F(x, y) = 0$ da costruirsi in modo che sia normale la singolarità della sua polare.

A tal fine scriviamo

$$\alpha_s = \frac{r_s}{n_s} \quad \alpha_{s+1} = \alpha_s + \frac{r}{hn_s}$$

dove n_s è il minimo denominatore comune, cui possano ridursi le frazioni $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, ed r, h sono primi fra loro.

Avremo

$$y = \eta + a_{s+1} x^{\alpha_s} \cdot x^{1/n_s \cdot r/h}.$$

La y può anche scriversi

$$y = \eta + a_{s+1} x^{\alpha_s} \cdot Y$$

con $(x^{1/n_s})^r - Y^h = 0$.

Sostituiamo ora alla relazione precedente una relazione

$$\Psi(x^{1/n_s}, Y) = 0$$

in modo che, posto $x^{1/n_s} = X$ la curva

$$\Psi(X, Y) = 0$$

abbia la singolarità

$$Y = X^{r/h}$$

e la sua polare

$$\Psi'_Y(X, Y) = 0$$

abbia singolarità normale, cosa fattibile, come è stato dimostrato al principio.

Dopocì si consideri la curva $F(x, y) = 0$ la cui equazione si ottiene eliminando η ed Y fra le equazioni

$$f(x, \eta) = 0$$

$$y - (\eta + a_{s+1} x^{\alpha_s} \cdot Y) = 0$$

$$\Psi(x^{1/n_s}, Y) = 0$$

e - se si vuole - razionalizzando.

Che la curva $F(x, y) = 0$ così costruita abbia una polare a comportamento normale segue tenendo conto che l'equazione

$$F'_y(x, y) = 0$$

coincide ⁽⁸⁾ con la

$$f'_\eta(x, \eta) \Psi'_Y(x^{1/n_s}, Y) = 0.$$

(8) Questa relazione è da ritenersi nota; essa segue infatti immediatamente dal fatto che in un S_4 la curva intersezione di tre forme tridimensionali $V_1 V_2 V_3$ ha come tangente in un suo punto P le intersezioni dei tre S_3 tangenti alle tre V_i .

È chiaro che quando si associno alla $\Psi_Y = 0$ le relazioni

$$f(x, y) = 0$$

$$y = \eta + a_{s+1} x^{\alpha_s} Y$$

si hanno quelle componenti della $F'_y(x, y) = 0$ che — secondo la regola di Enriques — devono staccarsi dalla $F(x, y) = 0$ partendo da punti dello $(s+1)$ -esimo gruppo satellite.

Per maggior determinazione osserviamo che, indicata con

$$Y = (x^{1/n_s})^m + \dots \quad \text{con } m = \frac{m_1}{m_2} > \frac{r}{h}$$

una delle componenti della $\Psi_Y \{ (x^{1/h}), Y \} = 0$, si ottiene, come corrispondente parte della polare F'_y , la

$$y = a_1 x^{\alpha_1} + \dots + a_s x^{\alpha_s} + a_{s+1} x^{\alpha_s + m_1/n_s m_2}.$$

4. Ora la condizione perché la polare $\varphi(x, y) = f'_y(x, y) = 0$, della $f(x, y) = 0$, abbia effettivamente la singolarità S' normale, corrispondendo alla regola di Enriques, è che il numero delle intersezioni riunite in O delle due curve

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \varphi'(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

sia esattamente quello che risulta nel caso di regolarità (cioè quello delle intersezioni di Φ e Φ').

Ciò è ovvio in base alla seguente proposizione:

Si consideri una singolarità qualunque O appartenente ad una curva φ e suppongasi una variazione per continuità senza che aumenti il numero delle intersezioni che la φ e la sua polare generica hanno nel punto O . In tali ipotesi non possono aumentare i contatti di due rami fra loro né può variare la struttura dei singoli rami ⁽⁹⁾.

Per l'applicazione al caso attuale basta assumere come curva φ la polare rispetto ad una curva variabile in un sistema continuo di curve aventi la stessa singolarità S , per esempio nel fascio

$$\lambda f + \mu F$$

con F costruita come è detto.

(9) Cfr. O. CHISINI, loc. cit. penultima pagina.

Geodesia. — *Ancora sulla geodesia intrinseca.* Nota (*) del
Socio CORRADINO MINEO.

Il Marussi, rispondendo a una mia precedente Nota ⁽¹⁾, si propone di dimostrare che la mia critica è *sempre infondata o addirittura errata* e che non porta un *fattivo contributo alla Geodesia*.

Quanto al secondo punto, non ho davvero alcun dubbio in proposito e so io quanto mi sia rincresciuto di scrivere quella Nota: gli «Atti» di questa Accademia sono prevalentemente destinati a scritti originali ed eccezionalmente a ribattere errate affermazioni; ma non ho creduto, d'altra parte, di potermi esimere da un preciso dovere verso l'Accademia, e di dover rispondere alle Note del Marussi, pubblicate proprio in questi «Rendiconti».

Quanto poi al primo punto, il Marussi non ha per nulla dimostrato la infondatezza o addirittura l'erroneità della mia critica, come è chiaro a chi s'intende della materia (quello che il Marussi ha scritto, ha scritto, ed è a disposizione di chi lo vuol leggere). Egli non ha inteso la mia critica e, se mai, ha aggiunto altri errori.

Come negare che tutte le questioni affrontate dal Marussi, *per rinnovarle profondamente*, hanno un secolo e più d'età e sono state già risolte da matematici eminenti? Egli tratta *ex-novo* le questioni, aggiungendovi interpretazioni erronee.

Vediamo di rispondere il più brevemente possibile alle sue domande e obiezioni. Mi riferisco alla mia Nota citata.

1. GEODESIA INTRINSECA. — Chi ha mai creduto che il Marussi avesse per iscopo *la risoluzione di un problema di Dirichlet*? Egli vuol studiare la *struttura* del campo di gravità terrestre. Ora questo campo di gravità terrestre è (se non m'inganno) costituito come ambiente da tutto lo spazio esterno a una superficie S d'equilibrio terrestre chiusa contenente nel suo interno tutte le masse terrestri, nel quale spazio è noto il potenziale totale W della terra. E W come può esser dato, conosciuta la massa totale M della terra e la sua velocità (costante) ω di rotazione, se non risolvendo un problema dei valori al contorno S , o problema di Dirichlet (esterno)? Ma questo problema non l'ha risolto il Marussi. D'accordo. Il Marussi parla di *struttura* del campo. Ma struttura vuol dire *Topologia, Analysis-situs*. E dove si parla di simili cose nella Memoria del Marussi?

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) Vedi C. Mineo, *Geodesia intrinseca e proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche*, questi «Rendiconti», ser. VIII, vol. XVIII, giugno 1955; e la risposta del MARUSSI nel vol. XIX, novembre 1955.

Che se poi il Marussi vuol tutto dalle misure e vuol costruire un geoide, poco prolungabile analiticamente, servendosi della bilancia di torsione di Eötvös, allora legga una Memoria di Adolfo Venturi⁽²⁾.

Il Marussi afferma che *una terna coordinata unica per tutto il campo si vuole evitare, in quanto non ne è elemento intrinseco*. No. La terna non è elemento intrinseco per S , ma è elemento intrinseco per lo spazio esterno a S : per determinare il quale ci vuole il sistema (1) della mia Nota citata. E per questo sistema il caso $W_1 = W_2 = 0$ è manifestamente da escludere. Nel così detto *sistema locale* del Marussi è proprio $W_1 = W_2 = 0$; ma allora il sistema locale si riduce al solo punto origine, e di lì non si esce. Un'altra affermazione del Marussi è che il mio sistema (1) non è *ovviamente*, un sistema triplo ortogonale. Le condizioni necessarie e sufficienti per l'ortogonalità del triplice sistema si possono scrivere così:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 \quad , \quad \sum \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad , \quad \sum \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 ;$$

e ce ne vuole affinché si riducano a una sola a derivate parziali del 3° ordine per una sola delle tre funzioni! Il Marussi scrive le condizioni di ortogonalità nel caso del sistema locale, che si riduce alla sola origine! Da tutti questi equivoci discende che le formule (25,6) e (25,7) non hanno senso e che le (25,8), che sono le mie, per quanto esatte, non si deducono dalle formule generali del Marussi.

2. UN PROBLEMA FONDAMENTALE PER LA GEODESIA. — Il Marussi non tiene conto, che questo problema è stato risolto da più di cento anni, *per una superficie qualunque*, da eminenti matematici e persino dal Cesàro nel suo aureo trattato di *Elementi di Calcolo infinitesimale* (Napoli, 1905). Il fatto incontestabile è però che egli nella sua Nota comincia a scrivere le formule (1), che non sono altro che le note formule di Frenet (per nulla generalizzate) di una curva sghemba dello spazio ordinario, e afferma che ha *tenuto conto* (sono le sue testuali parole) *che la curva assegnata è geodetica!* Occorre spiegare questo nonsenso? Mi accusa inoltre di non leggere bene la sua formula (8). Ora la parte principale di un certo angolo è $(s^2/6)\kappa\tau$ e il Marussi scrive testualmente: *la parte principale dell'angolo cercato uguaglia il prodotto della curvatura $[\kappa]$ per la torsione $[\tau]$ nella direzione assegnata, a meno di un fattore $s^2/6$ indipendente dalla superficie*. Non faccio commenti e non voglio insistere su questo problema.

3. PROPRIETÀ GENERALI DELLE RAPPRESENTAZIONI AFFINI TRA SUPERFICIE E IN PARTICOLARE DELLA CURVATURA TANGENZIALE DI TRASFORMATE DI CURVE DELLE SUPERFICIE STESSE. — Che le proprietà caratteristiche delle rappresentazioni di una superficie su di un'altra (conformi, autaliche,

(2) ADOLFO VENTURI, *Teoria delle bilancia di torsione di Eötvös*, « Accademia di Scienze, Lettere e Arti di Palermo », ser. 3^a, vol. IX, agosto 1908.

geodetiche) siano da tempo arcinote, non è cosa che importi al Marussi. Ma veniamo allo scopo principale della Nota del Marussi: trovare l'*alterazione* della curvatura geodetica d'una curva della superficie S nella più generale rappresentazione di S sopra una superficie \bar{S} . Ora, naturalmente, è dato il ds^2 della S come anche il $d\bar{s}^2$ della \bar{S} (trasformato, come si suole, nelle stesse coordinate curvilinee di S). Ma non appena è dato ds^2 si scrive subito la curvatura geodetica $1/\rho_\varphi$ d'una linea $\varphi(u, v) = c$ di S , per mezzo d'una nota formula del Bonnet (1848) ⁽³⁾; e similmente, dato il $d\bar{s}^2$, si scrive la curvatura geodetica $1/\bar{\rho}_\varphi$ della linea corrispondente su \bar{S} (e che su \bar{S} ha la stessa equazione $\varphi(u, v) = c$).

E allora che problema è codesto di trovare l'*alterazione* della curvatura geodetica? Quest'*alterazione* è senz'altro la differenza

$$(\alpha) \quad \Delta = \frac{1}{\bar{\rho}_\varphi} - \frac{1}{\rho_\varphi}.$$

Ma il Marussi non definisce la curvatura geodetica d'una curva sopra una superficie S , ma scrive una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine nella quale entra linearmente anche la stessa curvatura geodetica della curva S (una specie di *definizione per astrazione* della curvatura geodetica). Sarebbe lungo, però, addentrarci qui in questa specie di laberinto. Per qualcuno è stato possibile, con pazienza da certosino, di raccapezzarsi e di giustificare la formula (10) del Marussi, sebbene la sua deduzione sia errata e la formula (9) dalla quale la (10) discende sia falsa. Ma per un principio di logica russelliana, denotando con un V rovesciato il falso, si può scrivere:

$$\Lambda \supset x;$$

cioè dal falso può discendere qualunque proposizione x e quindi anche la verità.

Il Marussi potrà appresso leggere due Note tuttora in corso di stampa ⁽⁴⁾.

Comunque, con una trasformazione assai interessante (e non so se già da altri segnalata) la formula del Marussi si deduce anche, *immediatamente e rigorosamente*, dal 2° membro della (α) , senza alcun bisogno di *Algebra tensoriale*.

4. UNA CERTA DETERMINAZIONE APRIORISTICA DEL MODULO DI DILATAZIONE LINEARE IN UNA RAPPRESENTAZIONE CONFORME PIANA D'UNA SUPERFICIE. - Possiamo supporre, senza ledere le generalità, che i sistemi coordinati della superficie S e del piano siano isotermini:

$$(1) \quad ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2) \quad , \quad d\bar{s}^2 = dx^2 + dy^2.$$

(3) Vedi BIANCHI, *Geometria differenziale*, vol. I, parte I, Bologna, Zanichelli, 1927, p. 269.

(4) Vedi MASSIMO MINEO, *Sulla variazione della curvatura geodetica d'una curva nella rappresentazione di una superficie su di un'altra*, «Le Matematiche», Catania 1956, XI, Fasc. 1; e una seconda Nota nel Fasc. 2.

Il logaritmo μ della dilatazione lineare deve verificare l'equazione

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2} = \lambda K,$$

essendo K la curvatura gaussiana (supposta nota) della superficie.

Ma ognuno sa che la reciproca d'una proposizione non è sempre vera: viceversa dunque, non ogni integrale di (2) è il logaritmo μ d'un possibile modulo di deformazione nella rappresentazione conforme piana di S . Ma il Marussi sceglie (tralascio per brevità di illustrare la scelta) una soluzione di (1), e tutto è finito per lui. Ma come? Non bisogna vedere se a questo scelto valore di μ corrisponda effettivamente una rappresentazione conforme di S sul piano e quale? Una qualunque di queste rappresentazioni discende, come si sa, dalla relazione

$$x + iy = f(u \pm iv),$$

essendo f simbolo di funzione olomorfa della variabile complessa $u \pm iv$.

Per avere effettivamente una di queste soluzioni, basta scegliere per x una qualunque funzione armonica di u e v e la y resta determinata a meno di una costante additiva. La funzione μ è allora data da

$$\mu = \log \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}{\lambda}}.$$

In sostanza, affinché il problema sia possibile, l'integrale scelto μ di (2) deve esser tale che le due equazioni

$$(3) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \lambda e^{2\mu}$$

abbiano un integrale comune. Ne viene subito che un integrale μ della (2), scelto a caso, *con grandissima probabilità*, non darà una soluzione.

Il problema così posto (e non si può porre altrimenti) è allo studio di un giovane analista della scuola palermitana. È evidente, ad ogni modo, che subordinare la rappresentazione alla scelta d'un possibile μ , è, dal punto di vista pratico (cartografico), un errore: ne verrebbero carte praticamente incostruibili. I grandi geometri, compreso il grande Gauss, scelgono per f delle funzioni più semplici che sia possibile.

Fisica matematica. — *Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo.* Nota (*) II (**) del Corrisp. ANGELO TONOLO.

Trasformiamo l'integrale γ . Si osservi dapprima che

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \{H_z \cos ny - H_y \cos nz\} dt = \\ = \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \{H_z \cos ny - H_y \cos nz\} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + \frac{1}{2} \int_{\sigma} \{[H_z] \cos ny - [H_y] \cos nz\} d\sigma.$$

Inoltre possiamo scrivere

$$(16) \quad \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \frac{\partial}{\partial t} \{ (H_z \cos ny - H_y \cos nz) \frac{I_1(\rho)}{\rho} \} dt = \\ = \gamma - \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \{H_z \cos ny - H_y \cos nz\} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \{[H_z] \cos ny - [H_y] \cos nz\} d\sigma - \int_{\sigma} \{H_z^{(o)} \cos ny - H_y^{(o)} \cos nz\} \frac{I_1(\rho_o)}{\rho_o} d\sigma,$$

donde, per la (15), si ha in definitiva

$$(17) \quad \gamma = \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \{H_z \cos ny - H_y \cos nz\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + \\ + \int_{\sigma} \{H_y^{(o)} \cos nz - H_z^{(o)} \cos ny\} \frac{I_1(\rho_o)}{\rho_o} d\sigma.$$

Sostituendo nella (8) le (13), (14), (17), otteniamo

$$(18) \quad B = \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} E_z \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos nx - \frac{\partial}{\partial x} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos nz \right\} dt + \\ + \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} E_y \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos nx - \frac{\partial}{\partial x} \frac{I_1(\rho)}{\rho} \cos ny \right\} dt + \\ + a \frac{\partial}{\partial t_1} \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \{H_z \cos ny - H_y \cos nz\} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt +$$

(*) Continuazione della Nota I, apparsa a p. 403 di questo volume dei « Rendiconti ».

(**) Presentata nella seduta del 14 aprile 1956.

$$\begin{aligned}
 & + ab \int_{\sigma} d\sigma \int_0^{t_1-r} \{ H_y \cos nz - H_z \cos ny \} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + \\
 & + a \int_{\sigma} \{ H_y^{(o)} \cos nz - H_z^{(o)} \cos ny \} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} d\sigma + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\sigma} [E_z] \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial r}{\partial z} \cos nx \right\} d\sigma + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\sigma} [E_y] \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial r}{\partial y} \cos nx \right\} d\sigma.
 \end{aligned}$$

Trasformiamo l'integrale

$$(19) \quad C = \int_{\sigma} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial E_x}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Possiamo scrivere

$$(20) \quad C = \alpha_x + \beta_x + \gamma_x + ab\delta_x,$$

avendo posto

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_x &= \int_{\sigma} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial E_z}{\partial z} \cos nx \right] \frac{d\sigma}{r}, \\ \beta_x &= \int_{\sigma} \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial E_y}{\partial y} \cos nx \right] \frac{d\sigma}{r}, \\ \gamma_x &= \int_{\sigma} \left[\frac{\partial H_z}{\partial t} \cos ny - \frac{\partial H_y}{\partial t} \cos nz \right] \frac{d\sigma}{r}, \\ \delta_x &= \int_{\sigma} [H_y \cos nz - H_z \cos ny] \frac{d\sigma}{r}. \end{aligned} \right.$$

Osserviamo dapprima che si ha

$$(22) \quad \frac{\partial [E_z]}{\partial x} = \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial E_z}{\partial t} \right] \frac{\partial r}{\partial x}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & \int_{\sigma} \left\{ \frac{\partial [E_z]}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial [E_z]}{\partial z} \cos nx \right\} \frac{d\sigma}{r} + \int_{\sigma} \left[\frac{\partial E_z}{\partial t} \right] \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial r}{\partial z} \cos nx \right\} \frac{d\sigma}{r} = \\
 & = \int_{\sigma} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial E_z}{\partial z} \cos nx \right] \frac{d\sigma}{r}.
 \end{aligned}$$

Tenendo presente l'identità

$$(24) \quad \int_{\sigma} \mathbf{n} \wedge \text{grad}_Q \frac{[E_z]}{r} d\sigma = 0,$$

si ottiene in definitiva

$$(25) \quad \alpha_i = \int_{\sigma} [E_z] \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \cos nx - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cos nz \right\} d\sigma + \\ + \frac{\partial}{\partial t_i} \int_{\sigma} [E_z] \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial r}{\partial z} \cos nx \right\} \frac{d\sigma}{r}.$$

Analogamente si trova

$$(26) \quad \beta_i = \int_{\sigma} [E_y] \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \cos nx - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cos ny \right\} d\sigma + \\ + \frac{\partial}{\partial t_i} \int_{\sigma} [E_y] \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial r}{\partial y} \cos nx \right\} \frac{d\sigma}{r}.$$

Possiamo anche scrivere

$$(27) \quad \gamma_i = \frac{\partial}{\partial t_i} \int_{\sigma} [H_z \cos ny - H_y \cos nz] \frac{d\sigma}{r}.$$

Sostituendo le (25), (26), (27) nella (20), si ricava

$$(28) \quad C = \int_{\sigma} [E_z] \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \cos nx - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cos nz \right\} d\sigma + \\ + \int_{\sigma} [E_y] \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \cos nx - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \cos ny \right\} d\sigma + \\ + \frac{\partial}{\partial t_i} \int_{\sigma} [E_z] \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \cos nz - \frac{\partial r}{\partial z} \cos nx \right\} \frac{d\sigma}{r} + \\ + \frac{\partial}{\partial t_i} \int_{\sigma} [E_y] \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} \cos ny - \frac{\partial r}{\partial y} \cos nx \right\} \frac{d\sigma}{r} + \\ + a \frac{\partial}{\partial t_i} \int_{\sigma} [H_z \cos ny - H_y \cos nz] \frac{d\sigma}{r} + \\ + ab \int_{\sigma} [H_y \cos nz - H_z \cos ny] \frac{d\sigma}{r}.$$

Sostituendo le (6), (18), (28) nella (3) e tenendo presente che, denotando con u_1 una qualunque delle coordinate x_1, y_1, z_1 , e con U una generica funzione di x, y, z, t , si ha

$$(29) \quad \frac{\partial}{\partial u_1} \int_0^{t_1-r} U \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt = \int_0^{t_1-r} U \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt - \frac{1}{2} [U] \frac{\partial r}{\partial u_1} =$$

$$= - \int_0^{t_1-r} U \frac{\partial}{\partial u} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + \frac{1}{2} [U] \frac{\partial r}{\partial u},$$

si riconosce che

$$(30) \quad 4\pi E_x(P_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1} \left\{ b^2 \int_S E_x^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS + ab^2 \int_0^{t_1-r} d\sigma \int_0^{t_1-r} \{ H_y \cos nz - \right.$$

$$\left. - H_z \cos ny \} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + a \int_0^{t_1-r} [H_y \cos nz - H_z \cos ny] \frac{d\sigma}{r} \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y_1} \left\{ ab^2 \int_S H_z^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS + b^2 \int_0^{t_1-r} d\sigma \int_0^{t_1-r} \{ E_y \cos nx - E_x \cos ny \} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{t_1-r} [E_y \cos nx - E_x \cos ny] \frac{d\sigma}{r} \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial z_1} \left\{ ab^2 \int_S H_y^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS + b^2 \int_0^{t_1-r} d\sigma \int_0^{t_1-r} \{ E_x \cos nz - E_z \cos nx \} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^{t_1-r} [E_x \cos nz - E_z \cos nx] \frac{d\sigma}{r} \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ b^2 \int_0^{t_1-r} d\sigma \int_0^{t_1-r} (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + \int_0^{t_1-r} [\mathbf{E} \times \mathbf{n}] \frac{d\sigma}{r} \right\} -$$

$$- b \left\{ b^2 \int_S E_x^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS + ab^2 \int_0^{t_1-r} d\sigma \int_0^{t_1-r} \{ H_y \cos nz - H_z \cos ny \} \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + \right.$$

$$\left. + a \int_0^{t_1-r} [H_y \cos nz - H_z \cos ny] \frac{d\sigma}{r} \right\}.$$

Introducendo i vettori ausiliari

$$(31) \quad \mathbf{e} = b^2 \int_S \mathbf{E}^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS + ab^2 \int_0^{t_1-r} d\sigma \int_0^{t_1-r} (\mathbf{H} \wedge \mathbf{n}) \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt + a \int_0^{t_1-r} [\mathbf{H}] \wedge \mathbf{n} \frac{d\sigma}{r},$$

$$(32) \quad \mathbf{h} = -b^2 \int_S \mathbf{H}^{(0)} \frac{I_1(\rho_0)}{\rho_0} dS - \frac{b^2}{a} \int_0^{t_1-r} d\sigma \int_0^{t_1-r} (\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}) \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt - \frac{1}{a} \int_0^{t_1-r} \mathbf{n} \wedge [\mathbf{E}] \frac{d\sigma}{r},$$

e gli scalari

$$(33) \quad k = -b^2 \int_0^\sigma d\sigma \int_0^{t_1-\sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt - \int_0^\sigma [\mathbf{E}] \times \mathbf{n} \frac{d\sigma}{r},$$

$$(34) \quad k_1 = -b^2 \int_0^\sigma d\sigma \int_0^{t_1-\sigma} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \frac{I_1(\rho)}{\rho} dt - \int_0^\sigma [\mathbf{H}] \times \mathbf{n} \frac{d\sigma}{r},$$

si ottiene l'espressione definitiva per la \mathbf{E}

$$(35) \quad 4\pi \mathbf{E}(\mathbf{P}_1, t_1) = \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t_1} - a \operatorname{rot}_{\mathbf{P}_1} \mathbf{h} - b\mathbf{e} + \operatorname{grad}_{\mathbf{P}_1} k.$$

Per la \mathbf{H} si trova

$$(36) \quad 4\pi \mathbf{H}(\mathbf{P}_1, t_1) = -\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t_1} - \frac{1}{a} \operatorname{rot}_{\mathbf{P}_1} \mathbf{e} - b\mathbf{h} + \operatorname{grad}_{\mathbf{P}_1} k_1.$$

Per i mezzi non assorbenti ($\lambda = 0$), la costante b è nulla e le formule (35), (36) si riducono a quelle di Larmor-Tedone, ove si tenga conto dei diversi riferimenti spaziali e temporali, alle quali abbiamo accennato nella Prefazione.

Chimica. — *Polimero cristallino del butadiene a concatenamento 1-2 isotattico* (*). Nota di GIULIO NATTA, LIDO PORRI, PAOLO CORRADINI e DOMENICO MORERO, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

Al Simposio di Chimica Macromolecolare di Zurigo era stata da uno di noi (*) annunciata la preparazione di un polimero cristallino del butadiene 1-3 a concatenamento 1-2 delle unità monomeriche, la cui struttura è stata discussa in una Nota presentata a questa Accademia (2). La catena principale di tale polimero assume allo stato cristallino una struttura quasi planare, nella quale gli atomi di carbonio terziario, cui sono legati i sostituenti laterali (vinili), si alternano in posizioni successive con configurazioni steriche opposte. A tale struttura, alle catene ed ai polimeri vinilici che la posseggono era stato da noi proposto l'attributo di «sindiotattico».

In effetti una regolarità nella successione delle configurazioni steriche, che possono assumere lungo la catena gli atomi di carbonio terziari, è condizione necessaria, perché un polimero vinilico lineare (testa-coda), con sostituenti di notevoli dimensioni, sia suscettibile di cristallizzare. I due più sem-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Società Montecatini.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) G. NATTA, «Makromol. Chemie», 16, 213 (1955).

(2) G. NATTA e P. CORRADINI, «Rend. Atti Acc. Lincei», ser. VIII, vol. XIX, fasc. 5, 229 (1955).

plici « tipi » di regolarità che si possono immaginare sono quelli che corrispondono ad una successione di atomi di carbonio terziari con la medesima configurazione sterica (struttura isotattica) oppure ad una successione di atomi di carbonio terziari con configurazioni alternativamente opposte (struttura sindiotattica).

Nei polimeri isotattici la equivalenza delle successive unità monomeriche implica necessariamente nei cristalli una configurazione ad elica della catena principale. Nei polimeri sindiotattici la catena, per il maggior spazio a disposizione dei sostituenti laterali, mantiene allo stato cristallino, entro certi limiti, la sua planarità, ed una eventuale configurazione ad elica appare ammissibile solo qualora si consideri la successione di unità dimeriche equivalenti.

I nostri studi hanno dimostrato ⁽³⁾ che alla prima classe (polimeri isotattici) appartengono gli unici polimeri vinilici cristallizzabili sinora noti delle alfa-olefine (polipropilene, poli-alfa-butene, polistirolo, poli-5-metile-sene, in cui la catena principale si avvolge in un'elica ternaria; poli-4-metil-pentene e poli-4-metile-sene, in cui la catena principale si avvolge in un'elica contenente 3,5 monomeri per passo; poli-3-metilbutene in cui la catena principale si avvolge in un'elica contenente 4 monomeri per passo), ottenuti tutti con processi di polimerizzazione a cui noi attribuiamo un meccanismo anionico; mentre alla seconda classe appartengono l'unico polimero cristallino prima d'ora noto del butadiene (a concatenamento 1-2) e verosimilmente anche le forme sinora note del polivinilcloruro e del poliacrilonitrile, che presentano un certo grado di ordine. Prima d'ora non era mai stata osservata l'esistenza, per un dato monomero vinilico, di due tipi diversi di polimero cristallino, l'uno a struttura isotattica e l'altro a struttura sindiotattica, e poteva sorgere il dubbio che ciascun monomero avesse la tendenza a polimerizzare in una sola delle due forme, ossia che il tipo di struttura regolare dipendesse prevalentemente dalla natura del monomero e non dal metodo di polimerizzazione. Tale ipotesi poteva trovare un appoggio nel fatto che il poliacrilonitrile ottenuto con metodi di polimerizzazione sia radicalici che anionici denota sempre una tendenza ad un ordinamento sindiotattico.

Nel quadro delle ricerche svolte in questo Istituto sulla polimerizzazione del butadiene, che ci avevano già consentito di preparare due polimeri cristallini, uno a concatenamento 1-4 trans, l'altro a concatenamento 1-2 sindiotattico e dei polimeri amorfi a concatenamento in gran parte 1-4 cis ⁽⁴⁾, si è riusciti ora a preparare, con dei processi a cui attribuiamo un meccanismo anionico e con catalizzatori di diverso tipo, contenenti metalli di transizione e composti metalloalchilici, su cui riferiremo più

(3) G. NATTA, P. PINO, G. MAZZANTI, P. CORRADINI, U. GIANNINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XIX, fasc. 6, 397 (1955); G. NATTA, P. CORRADINI e I. W. BASSI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XIX, fasc. 6, 404 (1955); P. CORRADINI e I. PASQUON, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XIX fasc. 6, 453 (1955).

(4) G. NATTA, « Makromol. Chemie », 16, 213 (1955).

dettagliatamente in altra sede, un nuovo polimero cristallino del butadiene diverso dai precedenti. La sua insolubilità in solventi come l'etere etilico e l'acetone consente di separarlo facilmente dai polimeri amorfi che eventual-

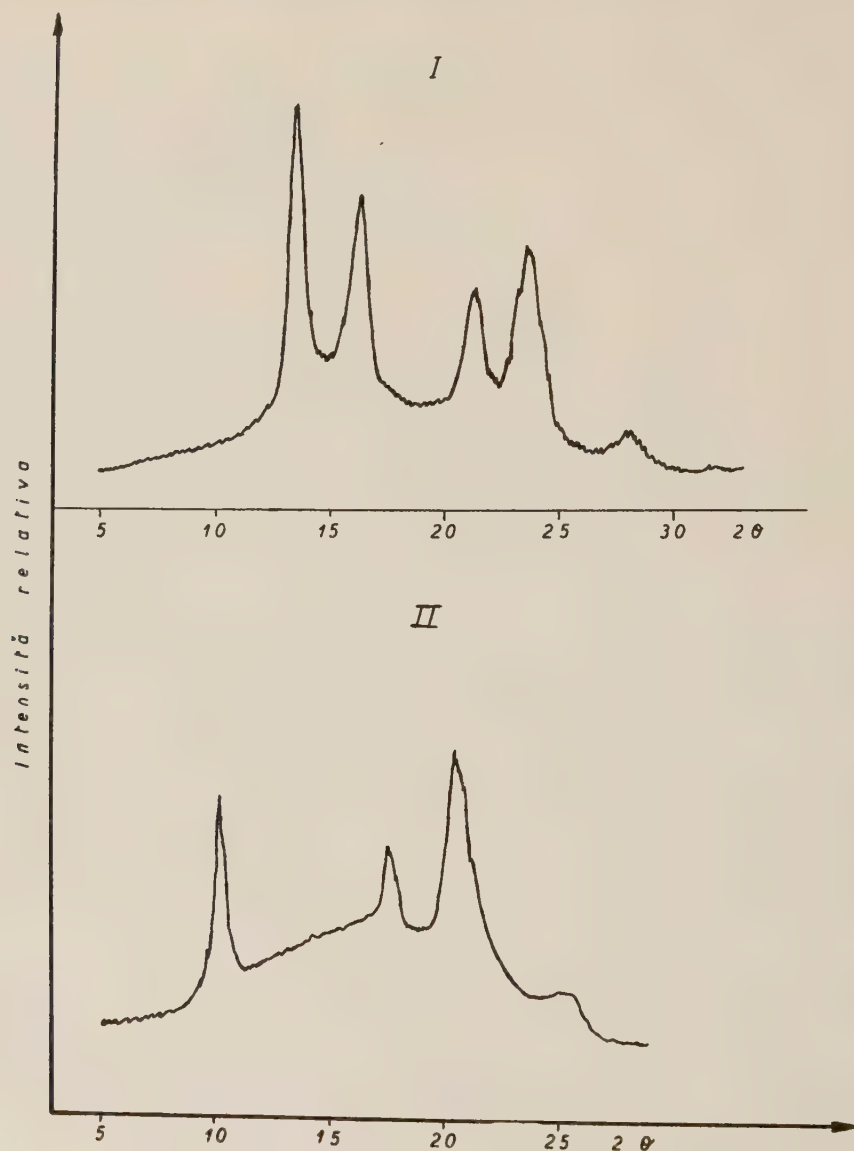


Fig. 1. - Confronto degli spettri ai raggi X registrati con contatori di Geiger dei polibutadieni 1-2 sindiotattico (I) e isotattico (II).

mente lo accompagnano. Dall'esame dello spettro nell'infrarosso esso denota un concatenamento prevalentemente 1-2 delle unità monomeriche, ma all'esame con i raggi X dimostra una struttura cristallina nettamente diversa da quella del polibutadiene sindiotattico precedentemente descritto. Il poli-

mero, estruso in fili e successivamente stirato, fornisce all'esame con i raggi X fotogrammi di fibra che presentano grande analogia, nelle distanze reticolari e nell'intensità delle singole riflessioni, con quelle del poli- α -butene cristallino. Esso cristallizza nel sistema romboedrico con costanti $a = 17,3 \pm 0,1 \text{ \AA}$ e $c = 6,5 \pm 0,1 \text{ \AA}$ che sono praticamente identiche a quelle del

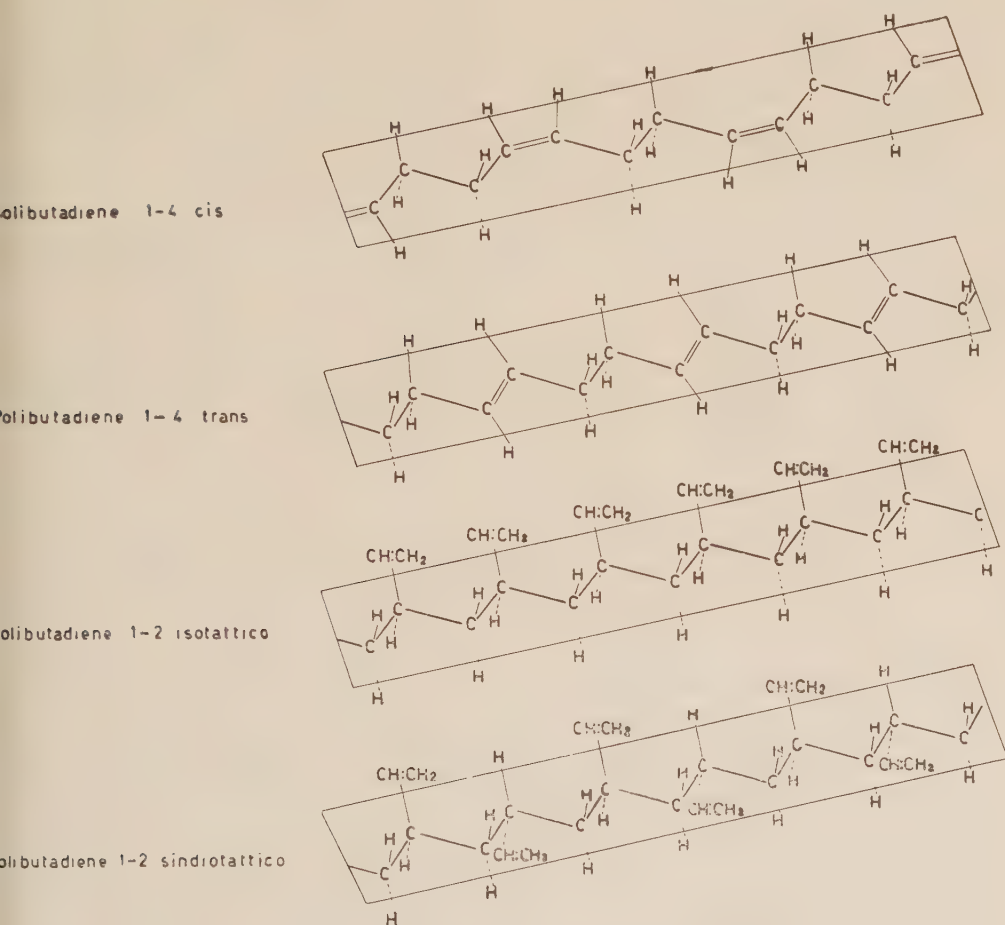


Fig. 2. - Confronto di vari polibutadieni a struttura regolare supponendo la catena principale distesa su di un piano.

poli- α -butene ($a = 17,7$; $c = 6,5 \text{ \AA}$). La densità calcolabile dai dati roentgenografici risulta 0,96. In base alla analogia delle costanti reticolari e dell'intensità delle singole riflessioni si può affermare che nel polibutadiene cristallino esaminato le molecole assumono una configurazione corrispondente a quella del poli- α -butene, cosa che era del resto lecito attendersi per un polimero isotattico. Per il principio del massimo allontanamento dei legami semplici è prevedibile che il gruppo vinilico si disponga in modo da allontanarsi al massimo dagli atomi di carbonio adiacenti, e cioè

in modo che il piano $\text{CH}-\text{CH}=\text{CH}_2$ sia a 55° circa sull'asse della catena, come Bunn aveva supposto avvenisse per il polistirolo isotattico ⁽⁵⁾.

Mentre gli spettri ai raggi X del polibutadiene 1-2 sindiotattico (I) e quelli del polibutadiene 1-2 isotattico (II) (fig. 1) sono nettamente diversi,

Polibutadiene 1-2 isotattico

Polibutadiene 1-2 sindiotattico

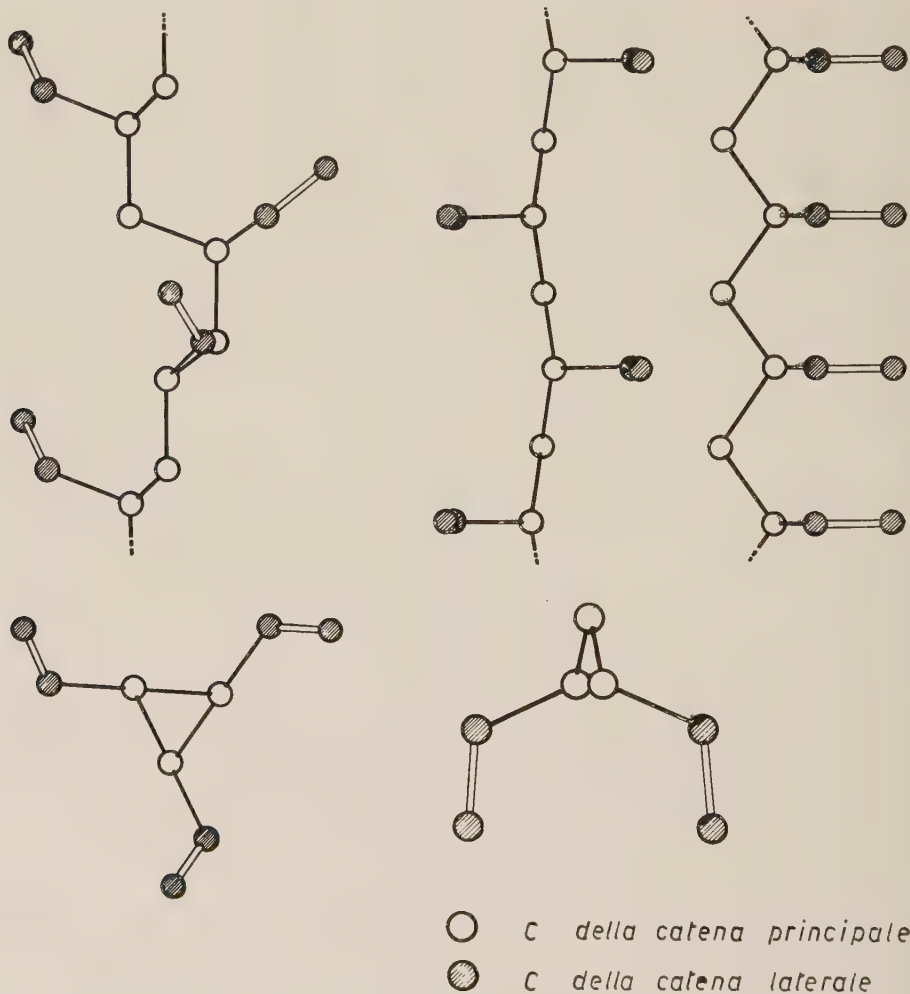


Fig. 3. - Forma delle catene allo stato cristallino nel polibutadiene isotattico e sindiotattico.

risulta meno facile per via puramente roentgenografica distinguere il polibutadiene 1-2 isotattico dal poli-alfa-butene pure isotattico (III).

Altre proprietà fisiche (Tabella I) differenziano tuttavia nettamente i tre prodotti. Il punto di fusione roentgenografico è per (I) di 154°C , per (II)

(5) C. W. BUNN e E. R. HOWELLS, « J. Pol. Sci. », 16, 307 (1955).

di 120° C, per (III) di 126° C. È logico attendersi per (I) un punto di fusione elevato in quanto la catena nei cristalli assume dal punto di vista del principio del massimo allontanamento dei legami (staggered bonds) una configurazione di minor energia potenziale. Per (III) era stato giustificato il punto di fusione più basso che nel polipropilene isotattico per la maggior mobilità ed ingombro del gruppo etilico laterale rispetto al metilico; è logico quindi attendersi per (II) un punto di fusione circa dello stesso valore o leggermente più basso, poiché la maggiore mobilità del vinile in confronto con l'etile intorno al legame semplice che li unisce alla catena compensa largamente l'effetto della minore mobilità del gruppo =CH₂ rispetto a quella del metile. Analogamente al poli-alfa-butene, il poli-1-2 butadiene isotattico presenta scarsa solubilità nei solventi ossigenati (acetone, etere), che consente di separarlo dai polimeri amorfi che eventualmente lo accompagnano, mentre risulta più solubile negli idrocarburi, soprattutto in quelli aromatici.

TABELLA I.

	Polibutadiene sindiotattico	Polibutadiene isotattico	Poli-alfa-butene isotattico
Periodo di identità lungo l'asse della fibra: Å	5,14	6,5	6,5
Densità dei cristalli	0,96	0,96	0,95
Temperatura fusione röntgenografica .	154°	120°	126°

Il polibutadiene isotattico presenta all'esame infrarosso delle bande di assorbimento caratteristiche che permettono di distinguerlo facilmente sia dal poli-alfa-butene isotattico che dal polibutadiene sindiotattico. Infatti esso presenta le seguenti bande di assorbimento caratteristiche del gruppo vinilico: 10,9 ÷ 11,0 μ , molto forte; 9,96 ÷ 10,09 μ , forte; 7,04 ÷ 7,08 μ , molto debole; 6,08 ÷ 6,10 μ , media; 5,46 ÷ 5,54 μ , debole; 5,04 ÷ 5,08 μ , molto debole; che naturalmente non sono presenti nel poli-alfa-butene. Esso non presenta inoltre le bande caratteristiche dell'etile la cui posizione normale in soluzione a 12,96 ÷ 12,98 μ risulta apparentemente spostata nel poli-alfa-butene cristallino sui 13,06 μ a causa della sovrapposizione di un assorbimento dovuto alla cristallinità.

La differenziazione tra i due polibutadieni stereoisomeri a concatenamento 1-2, che non è possibile in soluzione o allo stato fuso, risulta invece facile allo stato cristallino.

Caratteristiche del polibutadiene 1-2 isotattico sono gli assorbimenti a 8,12 μ (*d*); 8,36 μ (*d*); 9,02 μ (*d*); 10,60 μ (*d*); 11,42 μ (*d*); 12,40 μ (*d*); e una banda di notevole intensità e spiccato dicroismo a 14,40 μ . L'utilità di quest'ultima banda per l'identificazione del polibutadiene isotattico viene però

ridotta notevolmente dall'inconveniente che il doppio legame cis, eventualmente presente in prodotti amorfi coesistenti, assorbe pure nello stesso intervallo.

L'esame in luce polarizzata di un campione stirato di polibutadiene isotattico ha permesso inoltre, misurando il dicroismo della banda a $6,08 \mu$ dovuta alla vibrazione di valenza del doppio legame, di determinare l'angolo formato dal piano contenente il doppio legame e l'atomo di carbonio adiacente della catena con la direzione della catena stessa. Ammettendo infatti che lo stiramento abbia provocato un orientamento unidirezionale dei cristalli secondo l'asse z , si è determinato per tale angolo un valore di circa 55° , che corrisponde al valore prevedibile in base al principio del massimo allontanamento tra gli atomi vicini della stessa molecola.

La caratterizzazione, a mezzo dell'esame con i raggi X e della spettrografia infrarossa, del nuovo polimero cristallino del butadiene ha permesso così di dimostrarne la struttura isotattica, nettamente diversa da quella del polimero cristallino, pure a concatenamento 1-2, precedentemente noto, che possiede una struttura sindiotattica.

Risulta perciò dimostrata la possibilità, a partire da uno stesso monomero, di ottenere dei polimeri vinilici stereoisomeri, nettamente diversi nelle loro proprietà fisiche, che differiscono solo, per quanto riguarda la struttura della molecola, per il diverso tipo di regolarità nelle configurazioni steriche degli atomi di carbonio terziari presenti nella catena principale.

Chimica. — *Sullo spettro ultrarosso di assorbimento del Molibdenotocianuro di potassio* (*). Nota di G. B. BONINO e GIANFRANCO FABBRI, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

Il Molibdenotocianuro di potassio, che cristallizza con due molecole di acqua $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$, costituisce uno fra i più noti esempi di ottocoordinazione.

Ricorderemo che la giusta interpretazione di questo complesso data dal Chilesotti [1] ha avuto una brillante conferma per parte di Rosenheim [2].

Sulla configurazione spaziale del complesso $[Mo(CN)_8]^{(-4)}$ e sulla possibilità di una ottocoordinazione, sono state fatte dettagliate discussioni da vari Autori. Ricorderemo qui le difficoltà sollevate da R. Hultgren [3] ad una estensione della nota teoria di Pauling ad una coordinazione di ordine 8 rispetto ad un atomo centrale coordinante.

Van Vleck [4] ha trovato che, qualora l'atomo coordinante potesse disporre di orbitali atomici di « tipo f » si potrebbe prevedere ottimamente un tale tipo di coordinazione. Due anni più tardi Penney [5] in uno speciale studio sulla ottocoordinazione dei complessi ha sviluppato il punto di vista

(*) Lavoro eseguito presso il Centro studi di Chimica Fisica ed Idrologica del Consiglio Nazionale delle Ricerche presso l'Istituto Chimico « Giacomo Ciamician » della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

di Van Vleck ed ha mostrato che da configurazioni elettroniche $d^3 fsp^3$ e $d^3 f^4 s$ dell'atomo coordinante si possono ottenere ottocoordinazioni di tipo cubico con l'atomo coordinante al centro di un cubo e gli 8 gruppi coordinati agli 8 vertici dello stesso. Ma difficilmente si può ammettere che il molibdeno «tetravalente» possa disporre nella sua configurazione elettronica di valenza di «elettroni f » per formare l'ottocianuro complesso.

Più tardi nel 1940 Kimball [6] ha mostrato che una ottocoordinazione si può ottenere anche quando l'atomo coordinante mette a disposizione per la sua configurazione elettronica di valenza soltanto orbitali atomici di tipo s, p, d .

Si può così osservare una simmetria di ottocoordinazione ad antiprisma di Archimede con una configurazione elettronica $p^3 d^5$ ovvero $d^4 sp^3$ per l'atomo coordinante; ovvero un dodecaedro a facce triangolari se l'atomo coordinante dispone di una configurazione elettronica atomica $d^4 sp^3$. Si avrà la possibilità di una configurazione spaziale a prisma trigonale con facce rettangolari centrate da una configurazione elettronica $d^5 sp^2$ dell'atomo centrale.

L'esperienza, attraverso alle ricerche röntgenografiche di Hoard e Nord-sieck [7], ha dimostrato che la configurazione reale dell'ione del molibdenotocianuro devesi riferire ad un dodecaedro, a facce triangolari, a otto vertici. Il gruppo di simmetria che compete a tale poliedro è il D_{2d} ed il cristallo ortorombico di $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ ha una cella elementare, con 4 molecole di complesso, riferibile al gruppo spaziale D_{2h}^{16} .

Lo spettro ultrarosso di assorbimento di questo complesso non ci risultava ancora noto ed abbiamo pertanto intrapreso questa ricerca che fa parte di un gruppo di ricerche di spettrometria ultrarossa su complessi di tipo Werneriano e che stiamo conducendo presso questo Centro.

Campioni del molibdenotocianuro sono stati preparati in questo Istituto seguendo le istruzioni di Hobard Willard e R. C. Thielke [8].

Ringraziamo la sig.na dott.ssa Franca Forlani per la efficace collaborazione prestataci nella preparazione del composto studiato.

Lo spettrometro ultrarosso usato in questa ricerca e gli adattamenti ed accorgimenti adottati sono gli stessi di quelli descritti in un nostro precedente lavoro [9].

Il complesso $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ è stato studiato sia allo stato di polvere cristallina impastata, sia con olio di vasellina che con «Tripen», sia anche con il così detto metodo del «disco di KBr» [13] con risultati coincidenti.

Si sono analizzate le varie zone dello spettro ultrarosso rilevabile con ottica di fluoruro di litio, di salgemma e di bromuro di potassio.

Lo spettro della soluzione acquosa satura del complesso è stato studiato con ottica di fluoruro di litio nella zona a 2100 cm^{-1} circa che, come si sa, interessa le oscillazioni dei gruppi CN. La soluzione satura veniva esaminata in una cella speciale le cui pareti erano costituite da sottili fogli di polietilene, materiale trasparente all'ultrarosso nella speciale zona studiata.

Nella Tabella I sono riportate le posizioni dei massimi di assorbimento, sia con la indicazione della lunghezza d'onda in micron sia con quella della frequenza espressa in numeri d'onda.

TABELLA I.

*Massimi di assorbimento nello spettro ultrarosso
del $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2 H_2O$ allo stato cristallino.*

Nr. d'ordine	λ (μ)	ν (cm^{-1})	Intensità
1	2,777	3601	<i>f</i>
2	2,834	3528	<i>f</i>
3	3,785	2642	<i>dd</i>
4	3,821	2617	<i>dd</i>
5	(3,988)	(2508)	
6	(4,017)	(2489)	
7	4,048	2470	<i>dd</i>
8	(4,684)	(2135)	
9	4,704	2126	<i>ff</i>
10	4,715	2121	<i>ff</i>
11	4,755	2103	<i>ff</i>
12	(4,810)	(2080)	
13	4,851	2061	<i>d</i>
14	6,167	1621	<i>f</i>
15	8,985	1113	<i>f</i>
16	10,185	982	<i>dd</i>
17	10,630	941	<i>dd</i>
18	11,941	837	<i>dd</i>
19	13,82	723	<i>dd</i>
20	16,07	622	<i>m</i>
21	20,30	493	<i>m</i>
22	24,60	407	<i>m</i>

dd = debolissima; *m* = media; *f* = forte; *ff* = fortissima.

Soluzione acquosa satura: banda semplice a 4,735 (2112 cm^{-1})

Nota. - La forte banda (sdoppiata nelle due componenti 2126 e 2121 cm^{-1}), nelle condizioni di normale lavoro con il nostro spettrometro si presentava come una unica banda. Soltanto portando al massimo l'amplificazione, ed utilizzando il registratore Speedomax, si è riusciti, nello studio di questa banda, a ridurre la larghezza della fenditura spettrometrica a 0,068 mm a cui corrisponde nello spettro da noi rilevato una larghezza di circa 1 cm^{-1} .

In queste condizioni la banda, che si presentava a 2127 cm^{-1} , si sdoppia nettamente nelle due componenti 2126 e 2121 cm^{-1} ambedue molto intense.

Le intensità sono riportate nella terza colonna della tabella utilizzando le solite abbreviazioni.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Discuteremo in questa Nota soltanto le caratteristiche dello spettro ultrarosso del $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ per quanto riguarda la zona di assorbimento per le oscillazioni di valenza dei gruppi CN. Riferiremo pure qualche considerazione riguardo all'assorbimento nell'ultrarosso delle due molecole d'acqua del complesso cristallino.

Nella zona attorno ai 2100 cm^{-1} circa (zona del (CN)) si osservano dunque nello spettro del complesso allo stato cristallino tre intense bande rispettivamente a 2103 , 2121 e 2126 cm^{-1} accompagnate da tre satelliti a intensità molto

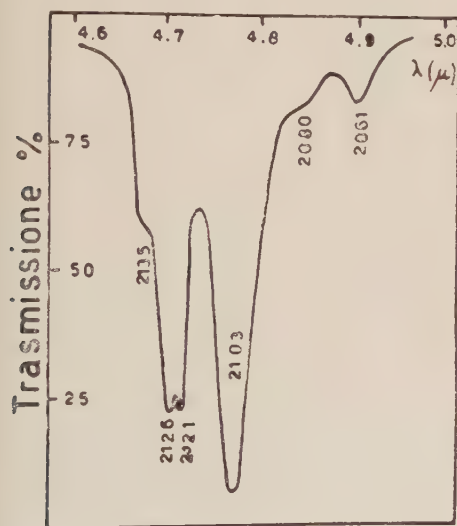


Fig. 1. - Spettro ultrarosso del $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ in polvere cristallina nella zona di assorbimento del «CN».

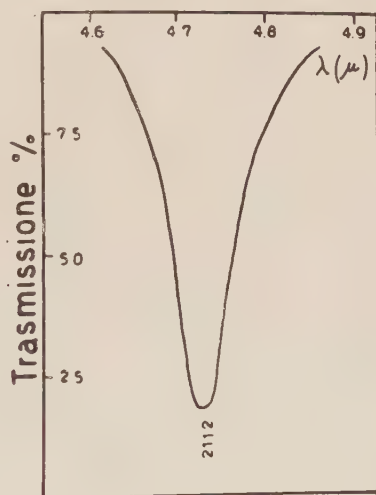


Fig. 2. - Spettro ultrarosso del $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ in soluzione acquosa saturata nella zona di assorbimento del «CN».

piccola (ved. fig. 1). Viceversa nello spettro del complesso in soluzione si osserva una sola banda a 2112 cm^{-1} ($4,735\text{ }\mu$) che potrebbe identificarsi con la banda a 2103 cm^{-1} ($4,755\text{ }\mu$) del cristallo ma leggermente spostata verso le minori lunghezze d'onda (ved. fig. 2).

Questa banda intensa e caratteristica è quasi coincidente (se pure spostata leggermente verso le minori lunghezze d'onda) con la banda del CN delle soluzioni acquose di KCN ($4,80\text{ }\mu$) e del NaCN ($4,78\text{ }\mu$) [10].

Uno studio della simmetria cristallina del $K_4Mo(CN)_8 \cdot 2H_2O$ ci permetterà di discutere più a fondo i risultati sperimentali anche in questo caso nel quale (come già in quello del ferrocianuro di potassio precedentemente da noi studiato) la banda del complesso in soluzione si risolve in una molteplicità di bande (CN) nello spettro ultrarosso del cristallo.

Le due molecole di acqua del complesso studiato allo stato cristallino vengono rivelate nello spettro ultrarosso dalle due bande a 3601 e 3528 cm^{-1} e dalla 1621 cm^{-1} .

Le prime due bande (fig. 3) sono da riferire alle oscillazioni di valenza delle molecole di acqua del cristallo e la terza va riferita alla tipica oscillazione di deformazione delle stesse molecole H_2O .

Lyon e Kinsey [11] in un classico lavoro sullo spettro ultrarosso di assorbimento delle molecole di acqua nei cristalli di alcuni sali mostrano le variazioni che subiscono le due oscillazioni di valenza (simmetrica ed anti-

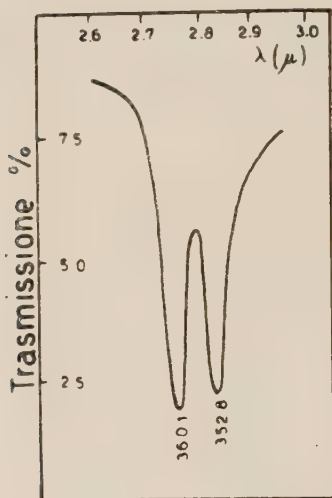


Fig. 3. - Bande dovute alle oscillazioni di valenza delle molecole di acqua del $\text{K}_4\text{Mo}(\text{CN})_8 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (allo stato cristallino).

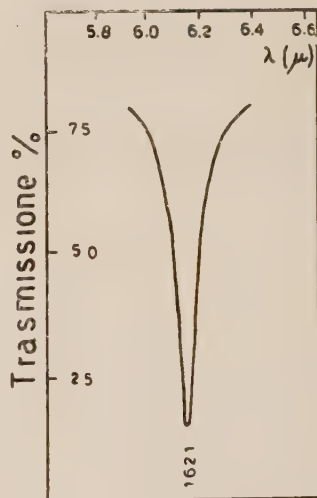


Fig. 4. - Banda dovuta alla oscillazione di deformazione delle molecole di H_2O del $\text{K}_4\text{Mo}(\text{CN})_8 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ (stato cristallino).

simmetrica) delle molecole d'acqua nei cristalli dei sali idratati rispetto alle analoghe frequenze che corrispondono agli spettri dell'acqua in soluzione diluita in solventi organici o dell'acqua allo stato di vapore.

Nella Tabella II diamo alcuni dei valori pubblicati da questi Autori in confronto con i valori da noi trovati nello spettro del molibdenottocianuro cristallino.

È interessante notare come le bande ν_{π} e ν_{σ} dell'acqua del molibdenottocianuro cristallizzato cadano a posizioni più basse di circa 100 cm^{-1} rispetto alle bande mostrate dalle molecole « libere » di H_2O nelle soluzioni diluite in tetracloruro di carbonio. Queste posizioni delle bande dell'acqua nell'ottocianuro cristallino hanno poi valori nettamente superiori, come frequenza, a quelle mostrate dall'acqua liquida e dall'acqua dei cristalli di $\text{BaCl}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ e di $\text{NaBr} \cdot 2\text{H}_2\text{O}$.

Le due molecole di acqua di cristallizzazione nel $\text{K}_4\text{Mo}(\text{CN})_8 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ si troverebbero cioè in una situazione di « minore impegno » che non le molecole d'acqua di cristallizzazione dei due sali esemplificati. Potrebbe però anche pensarsi che a questo « impegno » contribuissero non solo le interazioni

fra le molecole stesse d'acqua ma azioni di tipo quasi elettrostatico del catione o dei cationi del sale sulle molecole d'acqua.

Si potrebbe per esempio paragonare l'effetto spettroscopico di spostamento osservato con il rapporto tra carica e raggio dei vari cationi impegnati nei sali idrati presi d'esempio. Immediatamente risulterebbe la singolare posizione dell'ione bario con due cariche positive e per il quale effettivamente si osservano maggiori effetti di spostamento delle bande dell'acqua.

TABELLA II.

Indicazione della frequenza	Frequenze di massimo assorbimento in cm^{-1}					
	H ₂ O in soluzione di CCl ₄	Ghiaccio	Acqua liquida	NaBr · 2 H ₂ O	BaCl ₂ · 2 H ₂ O	K ₄ [Mo(CN) ₈] · 2 H ₂ O
ν_R	—	601	400–500	(496)	(546)	407?
ν_h	—	3136	3219	3229	3280	—
ν_π	3614	3330	3445	3380	3340	3528
ν_σ	3705	—	3580	3510	3450	3601

Abbiamo in corso su questo argomento una speciale ricerca che richiede però il rilevamento di un congruo numero di dati sperimentali. Riferiremo perciò in un prossimo lavoro, anche riferendoci ai risultati teorici raggiunti in questo Centro di Studi da Scrocco e Salvetti sul problema dei cosiddetti sali idrati [12].

Devesi anche notare che la banda dovuta alla oscillazione di deformazione delle molecole d'acqua nei cristalli di $\text{K}_4\text{Mo}(\text{CN})_8 \cdot 2 \text{H}_2\text{O}$ (che cade a 1621 cm^{-1}) è semplice fig. 4, mentre in altri complessi idrati allo stato cristallino (come per esempio nel $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$) appare raddoppiata.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] CHILESOTTI, « Gazz. Chim. Ital. », 34, (II), 493 (1904).
- [2] ROSENHEIM, « Zeit. f. Anorg. Chem. », 54, 96 (1907).
- [3] R. HULTGREN, « Phys. Rev. », 40, 891 (1932).
- [4] VAN VLECK, « J. Chem. Phys. », 3, 803 (1935).
- [5] PENNEY, « Trans. Far. Soc. », XXXIII, 1364 (1937).
- [6] KIMBALL « J. Chem. Phys. », 8, 188 (1940).
- [7] HOARD e NORDSIECK, « J. Amer. Chem. Soc. », 61, 2853 (1939).
- [8] HOBARD WILLARD e R. C. THIELKE, « J. Am. Chem. Soc. », 57, 2609 (1935).
- [9] G. B. BONINO e G. FABBRI, questi « Rendiconti ».
- [10] GORDY e WILLIAMS, « J. Chem. Phys. », 3, 664 (1935).
- [11] LYON e KINSEY, « Phys. Rev. », 61, 482 (1942).
- [12] E. SCROCCO e O. SALVETTI, « Gazz. Chim. Ital. », 84, 1093 (1954); « La Ricerca Scientifica », n. 7, 1478 (1954); id., n. 6, 1258 (1954).
- [13] SCHIEDT e RHEINWEIN, « Z. Naturforsch. », 75, 270 (1952); STIMSON e O' DONNELL, « J. Am. Chem. Soc. », 74, 1805 (1952).

Geologia. — *Contributo alla conoscenza geologica della Sardegna.* —
I. *Le pietre verdi.* Nota (*) del Corrisp. ANTONIO CAVINATO.

In Sardegna ricorrono « rocce verdi » con i caratteri delle alpine, e delle molte altre del mondo.

Consegue una profonda modificazione delle idee correnti sulla geologia della Sardegna.

E poiché di queste « rocce verdi » non vi è che vago accenno ⁽¹⁾ ne diamo una, pur sommaria, descrizione, ed una inquadratura stratigrafica e cronologica.

Ricorrono in lenti, talvolta cospicue, entro al siluriano, e vi sono stratificate e scistose in concordanza: ad eccezione dei gabbri verdi che ricorrono in ammasso e che sono solo debilmente scistosi.

Esse appartengono ai 1°) gabbri con i caratteri dell'eufotide, 2°) talcoscisti, 3°) anfiboliti, 4°) prasiniti.

1. *I gabbri.* — Ricorrono in ammassi. Un primo e più caratteristico è a sud di Perdas de Fogu, nella valle del Flumineddu, ed è visibile anche dalla strada che da Escalaplano conduce a Perdas de Fogu, poco dopo il ponte sul Flumineddu. È di colore verde cupo, a struttura olocristallina ed a grana grossa, poco o punto scistoso.

È composto di un plagioclasio oligoclasico-bitownitico, di un pirosseno diallagico e di abbondante anfibolo cloritizzato e talcizzato: accessori abbondanti sono: epidoto, apatite, rutilo.

Questo gabbro verde sfuma verso facies più povere di minerali scuri; e, pertanto, pur conservando colore e tessiture e strutture è da ascriversi a facies dioritiche basiche.

Un secondo è esteso per alcuni chilometri quadrati, a sud-est degli impianti della miniera di Monte Canaglia (Nurra).

Il colore è giallo verdastro sporco. La tessitura è solo talvolta debolmente scistosa e la struttura è olocristallina con passaggi a cristalloblastica.

Notevole è la variazione di composizione mineralogica: ma nella media è data dall'associazione di olivina granulare, talora idiomorfa, di anfibolo idiomorfo aciculare e piramidale (orneblenda verde sino a termini leggermente glaucofanici), ed in minor misura da diopside, da plagioclasio anche in grossi cristalli (termini dell'oligoclasioandesina e della labradorite). Accessori frequenti: magnetite in quantità sensibile, apatite, epidoto talora con distinto pleocroismo, rutilo, biotite.

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) A. STELLA, *Le miniere di ferro d'Italia*, p. 322; A. CAVINATO, *Cicli magmatici in Sardegna*, « Atti del Congresso Minerario Italiano », 1948, *Studi petrografici sulla Sardegna sud-orientale*, Padova 1935, p. 142; A. MORETTI, « Bollettino del Servizio geol. d'Italia », 75^o, p. 750 (1954).

La età di questi gabbri verdi è precedente a quella dei graniti, ma sembra essere posteriore a quella porfiroidica almeno a giudicare dai relativi rapporti stratigrafici intercorrenti nel sud della Sardegna.

Nell'Isola ricorrono anche altri tipi di gabbri che hanno età ed aspetto e colore ecc. nettamente diverso, e con nessuna aria di famiglia con le « rocce verdi ». Sono l'estremo basico del ciclo granitico. Era ben noto che alle « rocce granitoidi » appartengono facies granitiche dalle acidissime a quelle tonalistiche: (queste ultime ricorrono a Sorgono, Lanusei, vetta del Gennargentu, ecc.).

Aggiungiamo la novità che queste « rocce granitoidi » giungono a facies dioritiche basiche e gabbri-co-oliviniche negli ammassi di Tempio ⁽²⁾, di Bartigiadas, di Sarule, di Buddusò, ecc. ed anche a Burcei, dove, ad est dell'abitato, formano addirittura un sistema collinoso; ed a M. Nureci a nord dell'Arcuentu.

2. *I talcoscisti*. — In lenti e banchi interstratificati negli scisti del silurico superiore (gothlandiano) si sviluppano poco sotto M. Cardiga, in località Muflone Langi.

Sono rocce coerenti, scistose, ben stratificate, composte solo da talco fibrillare, formante un fitto e compatto feltro. Talvolta assumono facies nettamente steatitosa.

Altre lenti e banchi si sviluppano ad Orani, con le stesse identiche caratteristiche: talora steatitose come a S. Francesco.

Qui però si nota in vicinanza al contatto con i graniti anche un bel talco bianco oggetto di coltivazione, in località sa Matta: come è noto.

3. *Le anfiboliti*. — Grossi banchi, a mo' di filoni strato, si ritrovano nel cunicolo della ferrovia a valle del Ponte sul Flumendosa di Villanova Tulo. Sono stratificate in concordanza con gli argilloscisti del gothlandiano che poggiano, alla loro volta, su banchi di Calcare della base del gothlandiano.

Hanno color verde scuro, tessitura scistosa, struttura intersertale accennante alla cristalloblastica. Sono composte da prevalente plagioclasio (albite ed albite oligoclasica) e da anfibolo in grande parte cloritizzato e talcizzato: accessorio abbondante il rutilo.

A dire il vero questa roccia è un « ibrido » che sta tra i gneiss cloritici e le prasiniti cloritiche, le anfiboliti e le spessartiti filoniane.

Le ascriviamo alle anfiboliti per la relativa basicità del plagioclasio ed anche perché le stesse forme accentuano il carattere di anfiboliti man mano che si procede dal sud verso il nord dell'Isola, parallelamente ad un accrescersi della cristallinità delle rocce sedimentari e vulcaniche preerciniche. Esse sono distinte dai ben noti filoni lamprofirici che ricorrono di frequente ovunque in Sardegna, anche entro ai graniti, e che non sono mai scistosi, e sempre discordanti rispetto al sedimentare, e che sono, quindi, più recenti.

(2) A. CAVINATO, *Studi petrografici sulla Sardegna sud-orientale*, Padova 1935, p. 107.

Ma nella Nurra, a tetto e a letto dei banchi di minerale ferifero, ricorrono facies franche di anfiboliti per tessitura e struttura e composizione. Hanno un colore verde scuro, una struttura cristalloblastica a grana grossa, sono nettamente scistose.

Risultano dall'associazione di un plagioclasio dell'albite e della andesina e da anfibolo verde. Accessori abbondanti: il rutilo orlato di titanite, la apatite, la clorite, il talco, e meno frequente la biotite.

Un terzo tipo di anfiboliti in vistosi banchi ricorre in vetta a M. Giesgia. La potenza dei banchi è di alcune decine di metri; e sono interstratificati negli scisti sericitici, e sono concordanti con questi.

Queste facies di anfiboliti sono rocce grigie, talvolta grigio verdognole.

Hanno tessitura scistosa e struttura porfiroblastica, o fibroblastica.

Sono composte da anfibolo tremolitico sia in grossi cristalli, sia in minuto intreccio di aciculi molto allungati, privi di paleocroismo; e subordinatamente da pirosseno di tipo diopsidico sia in grossi elementi, sia in minuti granuli cristallini. Associate vi sono plaghe di granato.

Accessori sono muscovite abbondante, albite, apatite, epidoto. Molti dei granati sono trasformati in *clorite* (antigorite) e così anche qualche anfibolo aciculare.

Estesa è la trasformazione dei granoblasti di pirosseno in fascetti di cristalli aciculari anfibolici.

4. *Le prasiniti*. – Esse si sviluppano in lenti ed in banchi ripetuti sotto a M. Giesgia, scendendo verso Canaglieddu. Sono interstratificate con i banchi di ortogneiss, e con le estese formazioni di ortoscisti sericitici. Questi ortoscisti e questi ortogneiss sono i più caratteristici della Sardegna: saranno descritti, insieme agli altri *scisti cristallini* del nord della Sardegna nella successiva Nota.

Le prasiniti sono rocce altamente fissili ed hanno un colore verde chiaro, sino al verde scuro. Hanno lo stesso aspetto delle prasiniti alpine.

La tessitura è nettamente scistosa, e la struttura loro è cristalloblastica a grana generalente minuta. Sono composte da albite, frequentemente granulare, ma anche in rari cristalloblasti, in ogni caso limpida e fresca, e da clorite sempre molto abbondante: subordinatamente da plagioclasti acidi, anche plurigeminati. Accessori abbondanti sono la calcite, il rutilo, il quarzo, il talco, l'epidoto.

Alcune facies sono particolarmente ricche di quarzo iniettato posteriormente e perciò facies di passaggio a paragneis cloritici minuti: altre contengono il pirosseno in quantità sensibile.

Sarebbe quindi lecita una loro suddivisione in prasiniti cloritico-epidotiche e prasiniti cloritico-pirosseniche. Ma avvertiamo che le differenze tra le diverse facies sono piccole; che solo l'osservazione microscopica permette di precisarle; che esse si alternano ed intrecciano frequentemente.

CONCLUSIONE. – In Sardegna dunque ricorrono delle rocce verdi che hanno analogie e talora identità con quelle di altre regioni.

La età loro è ordoviciana superiore ed in parte gothlandiano-devonica: sono tutte precedenti al corrugamento ercinico in quanto hanno risentito in vario grado delle conseguenti azioni meccaniche le cui ripercussioni sulle caratteristiche tessiturali e strutturali sono state sopra illustrate (laminazioni, scistosità, ricristallizzazioni, ecc.).

Che la età sia la su enunciata consegue da una loro ricorrenza nelle assise ultime del siluriano, non mai nelle assise inferiori, e sempre interstratificate e concordanti con esse.

Chi scrive è stato portato ad affermare la esistenza, in Sardegna, di una serie comprensiva ordoviciano-gothlandiano-devonica estesa, non solo a tutto il Gerrei, ma anche all'Arburese, alla Barbogia, ecc., come sarà detto in successive Note.

Ebbene le pietre verdi di Villanova Tulo ricorrono sopra ai primi banchi calcarei del gothlandiano, quella della Nurra sopra agli scisti grafitici a graptoliti, tipici della base del gothlandiano e a livelli più alti (devonico), e quella di Muflone Laugi appena sotto ai calcari ad orthoceras: ossia hanno la età denunziata.

Questo ofiolitico metamorfico della Sardegna, descritto in questa Nota, ha i caratteri vulcanici di geosinclinale (effusioni laviche e tufacee sottomarine; intrusione per i gabbri) e testimonia della esistenza di un moderato vulcanismo basico precedente il ciclo porfiroidico acido: in analogia a quanto si osserva anche in altre parti del mondo, specie, nel versante sud delle Alpi Occidentali.

Così si inquadra bene anche la genesi, assegnata dallo scrivente, agli arricchimenti chamoisitico-sideritici della Nurra, da esalazioni tufacee-idrotermali sottomarine ⁽³⁾.

Fisiologia. — *Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto trattato con cloralosio* ⁽¹⁾.

Nota di ETTORE FADIGA, GIULIO CESARE PUPILLI e GIAN PIETRO VON BERGER, presentata ^(**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Da nostre ricerche comunicate in una Nota precedente [Fadiga, Pupilli e von Berger ⁽¹⁾] risulta che un'area di proiezione visiva è delimitabile nella superficie dorsale del cervelletto di Gatto, in assenza dei farmaci che solitamente [Snider e Stowell ⁽²⁾; Gastaut, Naquet, Badier e Roger ⁽³⁾] la rivelano.

(3) A. CAVINATO, «Atti del 2° Congresso Minerario Italiano», 1948.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) E. FADIGA, G. C. PUPILLI e G. P. VON BERGER, «Rend. Acc. Naz. Lincei», Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. 8^a, questo volume.

(2) R. S. SNIDER e A. STOWELL, «J. Neurophysiol.», VII, 331 (1944).

(3) H. GASTAUT, R. NAQUET, M. BADIER et A. ROGER, «J. Physiologie», XLIII, 737 (1951).

Abbiamo successivamente esaminato la topografia e i caratteri dei potenziali riflessi che si derivano nella stessa specie dopo il trattamento con cloralosio, allo scopo di confrontare direttamente le modificazioni che la somministrazione di tale farmaco produce nella risposta cerebellare allo stimolo luminoso.

Per disporre di dati raccolti nelle medesime condizioni poste in atto nelle indagini svolte in Gatti non trattati col farmaco, la preparazione degli animali, la stimolazione fotonica e la derivazione e registrazione dell'attività elettrica erano effettuate in modo identico a quello già descritto [Fadiga, Pupilli e von Berger ⁽¹⁾]. Saggiata la responsività della corteccia cerebellare dell'animale non narcotizzato, si somministrava il cloralosio per via intraperitoneale, nella dose di 70 mg/kg.

Durante la narcosi cloralosica, le modificazioni dell'attività elettrica cerebellare per effetto dello stimolo luminoso sono molto più facili a osser-

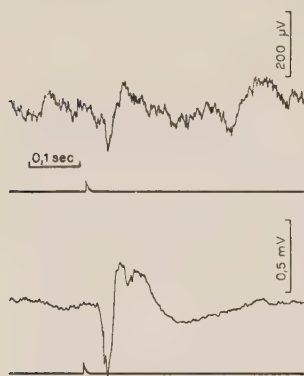


Fig. 1. - Risposte allo stimolo fotonico registrate dalla corteccia del verme cerebellare di Gatto, prima e dopo la somministrazione di cloralosio.

Derivazione dalla superficie del *folium vermis*. In alto, risposta nell'animale non narcotizzato; in basso, risposta allo stesso stimolo, nel medesimo animale, dopo la somministrazione di cloralosio nella dose di 70 mg/kg per via intraperitoneale. In questa figura e nelle seguenti, le deflessioni verso l'alto indicano variazioni di potenziale superficie-negative; il tempo di accensione del *flash* risulta registrato con la deviazione del secondo pennello catodico, connesso col circuito derivato del fotostimolatore.

varsi che in animali non trattati: spesso il farmaco è sufficiente a determinare la ricomparsa della risposta in Gatti, il cui cervelletto ha cessato di reagire al *flash*. L'area di proiezione visiva appare più estesa di quella per solito identificabile negli animali non narcotizzati, i potenziali riflessi essendo comunemente registrabili dagli emisferi oltre che dal verme: eccettuata la porzione più caudale dell'*uvula*, tutta la corteccia cerebellare scoperta risulta così interessata. Il tempo di latenza ⁽⁴⁾ delle risposte ottenute è sensibilmente maggiore di quello misurabile prima del trattamento, variando secondo i preparati da 30 e 80 msec (valori più frequenti: 40-50 msec). Per ciò che riguarda il segno, la forma e l'ampiezza, è opportuno descrivere separatamente le risposte del verme e quelle degli emisferi.

Le prime non sono diverse, quanto al segno e alla forma, dalle reazioni registrabili in assenza di narcosi, mentre differenze notevoli esistono rispetto al voltaggio (fig. 1). Dal verme, durante la narcosi cloralosica si deriva infatti una oscillazione superficie-positiva di un voltaggio pari a 600-

(4) La misura di tale grandezza si riferisce all'inizio della prima onda costante della risposta.

800 μV ⁽⁵⁾, seguita da una componente negativa (400–500 μV) assai meno variabile di quella che si osserva nell'animale non narcotizzato; la durata complessiva della risposta è di circa 80–100 msec. La piccola deflessione negativa, che nell'elettrogramma del cervelletto di Gatto non narcotizzato precede talvolta l'onda superficie-positiva [Fadiga, Pupilli e von Berger ⁽¹⁾], si osserva con maggior frequenza; e così pure l'onda lenta di scarsa ampiezza che fa séguito alla componente superficie-negativa. La cocaina, il Nembutal e la stricnina producono nelle risposte vermiane modificazioni in tutto corrispondenti a quelle che compaiono negli esperimenti eseguiti in mancanza di narcosi.

Le oscillazioni elettriche che si derivano dal lobulo ansiforme hanno ampiezza minore (del 50–60% circa) di quelle vermiane, e da esse si distinguono genericamente in quanto che presentano la oscillazione più

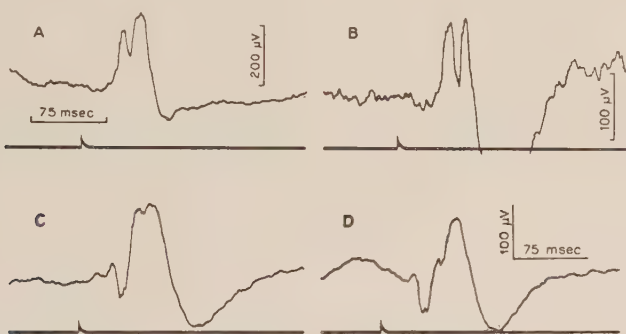


Fig. 2. — Risposte allo stimolo fotico registrate dalla corteccia del lobulo ansiforme di Gatto cloralosato.

Derivazione dalla superficie del *crus I* (A e B) e del *crus II* (C e D) di sinistra. La velocità di registrazione è la medesima in tutti gli elettrogrammi; l'amplificazione di C è eguale a quella di D.

ampia di segno negativo; secondo che siano registrate dal *crus I* o dal *crus II*, i potenziali riflessi presentano caratteristiche diverse. Nel *crus I*, la risposta (fig. 2, A e B) si palesa d'ordinario con un'onda superficie-negativa, per lo più interrotta da una deflessione di segno opposto e variabile per ampiezza e durata; all'onda superficie-negativa fa séguito di regola una lenta variazione di potenziale positiva. La risposta derivata dal *crus II* (fig. 2, C e D) consta di un'onda superficie-positiva poco ampia, la quale a volte è preceduta da una piccola deflessione negativa (analogamente a quanto si osserva talora nelle reazioni vermiane), e di un'onda negativa che predomina nettamente per ampiezza; termina spesso con un'onda positiva lenta corrispondente a quella descritta per le risposte del *crus I* e del verme. Un altro particolare in cui i potenziali registrati dal *crus II* si differenziano da quelli del *crus I*,

(5) Valori dell'ordine di grandezza di 1 mV non sono eccezionali. Per mantenere nei limiti dello schermo oscillografico queste risposte, si è dovuto diminuire oltremodo il rapporto di amplificazione, sicché spesso nei grafici non si nota nemmeno l'attività spontanea cerebellare che residua dopo il taglio delle alte frequenze.

è la durata della loro latenza, più lunga di circa 5-8 msec⁽⁶⁾. L'applicazione *in loco* di soluzioni di farmaci produce nelle oscillazioni riflesse del *crus II* modificazioni analoghe a quelle osservate nella reazione vermiana in animali non narcotizzati come in quelli trattati con cloralosio; riguardo ai potenziali provocati che si derivano dal *crus I*, si è notato (fig. 3) che l'effetto deprimente della cocaina e del Nembutal è manifesto solo nella deflessione positiva che divide in due porzioni la risposta, e su quella parte della oscillazione negativa che la segue, mentre risparmia la prima porzione della reazione elettrica; l'effetto opposto della stricnina si rivela nelle stesse componenti ora specificate.

Quanto al *lobulus paramedianus*, nella sua porzione mediale le risposte appaiono molto simili alle vermiane, mentre più lateralmente si accostano a quelle del *crus II*; nella parte laterale del *lobulus simplex* si hanno poten-

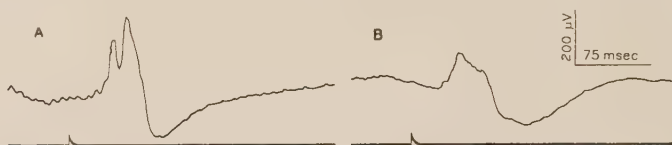


Fig. 3. - Risposta allo stimolo fotico registrata dalla corteccia del lobulo ansiforme di Gatto cloralosato, prima e dopo applicazione locale di cocaina.

Derivazione dalla superficie del *crus I* di sinistra. A, risposta normale; B, risposta ottenuta 15 min dopo il trattamento della corteccia con soluzione di cloridrato di cocaina al 5 %.

ziali di forma e segno simili a quelli dei potenziali del verme. La cocainizzazione della corteccia vermiana, nella parte compresa tra la *fissura prima* e la *fissura uvulo-nodularis*, non altera le risposte della corteccia degli emisferi.

A fine di cogliere elementi atti a chiarire il significato delle reazioni del *lobulus ansiformis*, abbiamo confrontato le oscillazioni elettriche del *folium vermis* e quelle dei *crura*, rispetto alla comparsa dei singoli accidenti nel tempo. Volendo registrare contemporaneamente i potenziali riflessi, che uno stesso stimolo provoca in aree cerebellari diverse (*folium vermis* e *crus I* oppure *crus II*), le osservazioni si sono effettuate utilizzando anche il secondo pennello catodico dell'oscillografo e mettendo in connessione un altro preamplificatore.

La reazione elettrica del *crus I* si manifesta, come si è detto, con una deflessione superficie-negativa. Essa compare di regola prima che abbia inizio la componente positiva della reazione vermiana, tale anticipo essendo di 5-10 msec e rivelandosi chiaramente nei tracciati ripresi ad alta velocità. Nei casi in cui la componente superficie-positiva della risposta del verme è immediatamente preceduta da una deflessione negativa di debole voltaggio,

(6) La descrizione che ora abbiamo fatta delle manifestazioni elettriche osservabili nel lobulo ansiforme, concerne i risultati della maggior parte dei casi. Oscillazioni molto simili a quelle registrabili dal *crus II* si derivano tuttavia da quella zona delle prime tre lamelle (numerandole a partire dalla più mediale) del *crus I*, che è limitrofa alla *fissura intercruralis*, e inoltre da tutta la superficie accessibile della quarta lamella.

simultaneo è l'inizio di quest'ultima e della reazione emisferica. Se, come accade di solito, l'onda negativa derivabile dal *crus* è interrotta da una deflessione di segno opposto, quest'ultima è per lo più contemporanea all'onda positiva derivata dal verme, di modo che la seconda porzione della risposta negativa del *crus*, cioè quella che segue la deflessione positiva, si svolge contemporaneamente alla componente negativa della risposta vermiana. E nel caso in cui l'ampiezza di quest'ultima vari sensibilmente in successive registrazioni, corrispondenti variazioni di ampiezza si notano nella seconda porzione dell'onda negativa derivata dal *crus I*.

La risposta del *crus II* principia con un'onda superficie-positiva, che ha la medesima latenza della componente positiva della reazione elettrica registrata dal verme. Come si rileva dai dati esposti dianzi, una notevole analogia esiste tra le oscillazioni derivate dall'una e dall'altra regione; tale corrispondenza appare molto chiaramente in quei rari casi in cui le risposte del *crus II* sono contraddistinte da un'onda positiva iniziale di ampiezza e durata rilevanti.

L'attualità di risposte a stimoli fotici in zone appartenenti ai lobuli ansiformi non risultava chiaramente dalla letteratura: Snider e Stowell⁽²⁾ parlano di un incostante interessamento delle lamelle più mediali del *crus I*, Gastaut *et alii*⁽³⁾ affermano esplicitamente che al di fuori del verme le risposte si derivano solo dal *lobulus paramedianus*, non dai *crura*.

Secondo le indagini che abbiamo già rese note [Fadiga, Pupilli e von Berger⁽¹⁾], nel Gatto non narcotizzato l'area di proiezione visiva è circoscritta generalmente nel *declive*, nel *folium* e nel *tuber vermis*; durante la narcosi cloralosica, il *flash* provoca invece modificazioni dell'attività elettrica di quasi tutta la superficie cerebellare esplorata. Tale diversa ampiezza dell'area di proiezione nelle due condizioni di esperimento, potrebbe spiegarsi conforme alla ipotesi di Gastaut *et alii*⁽³⁾, secondo cui il cloralosio esalterebbe la « permeabilità » delle sinapsi centrali, essendo la sua azione da accostarsi a quella del cardiazolo. Ci si può tuttavia domandare se il fenomeno sia invece ricollegabile con un'azione diretta del farmaco sulla eccitabilità dei neuroni cerebellari, piuttosto che sulla « permeabilità » dei *relais* tectali e pontini: all'azione stricnino-simile del cloralosio danno infatti rilievo Snider e Stowell⁽²⁾, pur non escludendo che gli effetti di tale sostanza vengano in atto anche in corrispondenza delle sinapsi della corteccia cerebellare. Ma un'azione propriamente eccitante del cloralosio sui neuroni della corteccia del cervelletto, non è in effetto comprovata: altra cosa è infatti dire che il trattamento dell'animale con tale farmaco permette in modo soddisfacente, a differenza di quanto si osserva con l'uso dei barbiturici, la indagine degli effetti di stimolazione della corteccia cerebellare [Moruzzi^(7,8)] e la derivazione della reazione elettrica allo stimolo fotico. Né va trascurato il fatto che il tempo di latenza delle risposte cerebellari da noi studiate si allunga nella narcosi cloralosica.

(7) G. MORUZZI, « Arch. Fisiol. », XLI, 87 (1941).

(8) G. MORUZZI, « Arch. Fisiol. », XXXVIII, 36 (1938).

In realtà, dallo studio farmacodinamico del cloralosio balzano chiari alcuni fatti, che inducono a ritenere questa sostanza un narcotico del tutto singolare [cfr. anche Moruzzi⁽⁷⁾]. È sufficiente rammentare come l'effetto prodotto dalla stricnina sui centri estrapiramidali sottocorticali di Gatto, nell'animale cloralosato compaia per dosi di alcaloide molto minori di quelle necessarie nel caso dell'animale non narcotizzato [Moruzzi⁽⁹⁾]. Che il cloralosio esalti la eccitabilità dei motoneuroni corticali è stato del resto affermato da Adrian e Moruzzi⁽¹⁰⁾; e per di più è noto che questo stesso farmaco può sostituire la stricnina quale fattore preparante della epilessia riflessa [Martino⁽¹¹⁾]. È vero che questi dati non provano esplicitamente la realtà di un'azione « permeabilizzante » del cloralosio, localizzabile nelle sinapsi centrali; ma allo stato presente della ricerca bisogna convenire che la ipotesi di Gastaut *et alii*⁽³⁾, quando s'intenda interpretare i fatti sopra esposti, non è facilmente sostituibile con altra più valida.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sui coefficienti di Fourier-Stieltjes di una funzione non decrescente*^(*). Nota di ALDO GHIZZETTI, presentata^(**) dal Socio M. PICONE.

Sia $\alpha(x)$ una funzione reale, a variazione limitata in $(0, 2\pi)$. Considerati i suoi coefficienti di Fourier-Stieltjes (o momenti trigonometrici)

$$(I) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\alpha(x), \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

sono note le condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare i numeri c_k per essere i momenti trigonometrici di una $\alpha(x)$ non decrescente⁽¹⁾.

(9) G. MORUZZI, « Arch. Fisiol. », XLIV, 109 (1945).

(10) E. D. ADRIAN a. G. MORUZZI, « J. Physiol. », XCVII, 153 (1939-40).

(11) G. MARTINO, « Arch. Fisiol. », XXXI, 186 (1932).

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) Vedi per esempio F. RIESZ e B. SZ.-NAGY, *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Budapest 1952, pp. 116-118. Sotto altra forma e cioè, in sostanza, con riferimento alla funzione

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(x - \theta) + \rho^2} d\alpha(x),$$

armonica nel cerchio $\rho < 1$, le condizioni in discorso si trovano ricavate e discusse nei classici lavori di TOEPLITZ, CARATHÉODORY, CARATHÉODORY e FÉJER, FISCHER contenuti nel volume 32 (1911) dei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ». Recentemente sono comparsi sull'argomento i seguenti due lavori di E. BAJADA, *La limitatezza, gli zeri di una funzione e i coefficienti di Eulero-Fourier* [« Rendiconti Circolo Mat. di Palermo », II serie, 4, 91-111 (1955)]; *Il corpo convesso di Carathéodory* [« Annali Mat. pura appl. », IV serie, 39, 75-85 (1955)].

In questa Nota mi propongo di esporre una nuova semplicissima dimostrazione del corrispondente teorema, aggiungendovi qualche precisazione. La novità risiede nel modo di stabilire la *sufficienza* delle condizioni; tuttavia, per maggior chiarezza, esporrò tutta la dimostrazione del teorema che si può enunciare nel modo seguente:

Data una successione numerica $\{c_k\}$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $c_{-k} = \bar{c}_k$), condizione necessaria e sufficiente affinché essa sia la successione dei momenti trigonometrici di una funzione $\alpha(x)$ non decrescente, è che, posto

$$(2) \quad D_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_k \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \dots & c_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{-k} & c_{-k+1} & c_{-k+2} & \dots & c_0 \end{vmatrix}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

si verifichi uno dei seguenti due casi:

I) per un certo intero $n \geq 0$ si ha $D_k > 0$ (per $k = 0, 1, \dots, n-1$); $D_k = 0$ (per $k = n, n+1, \dots$),

II) si ha $D_k > 0$ (per $k = 0, 1, 2, \dots$).

Il caso I si verifica se e solo se la $\alpha(x)$ è costante a tratti con n salti (positivi)⁽²⁾.

DIM. — La condizione è necessaria. — Se $\alpha(x)$ è non decrescente, per ogni intero $n \geq 0$, la seguente forma hermitiana nelle $n+1$ variabili $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$(3) \quad H_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{h=0}^n \lambda_h e^{-ihx} \right|^2 d\alpha(x) = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n c_{k-h} \lambda_h \bar{\lambda}_k$$

è ovviamente semidefinita o definita positiva (includiamo tra le forme semidefinite quelle identicamente nulle). Può risultare $H_n = 0$ soltanto se la $\alpha(x)$ definisce una distribuzione di masse (non negative) concentrate negli zeri

della funzione $\sum_{h=0}^n \lambda_h e^{-ihx}$. Poiché questi zeri possono al massimo essere n

(oppure $n+1$, ma in tal caso figurano fra essi i punti estremi $x=0, x=2\pi$), si deduce, tenendo anche conto di quanto è stato detto nella nota⁽²⁾, che la H_n può essere semidefinita soltanto se la $\alpha(x)$ è costante a tratti con un numero $s \leq n$ di salti. Viceversa si vede immediatamente che, per una siffatta $\alpha(x)$, si possono sempre scegliere dei valori (non tutti nulli) delle variabili λ_h in modo da annullare la H_n . Si conclude pertanto che se $\alpha(x)$ è costante a tratti con $n \geq 0$ salti, le forme H_0, H_1, \dots, H_{n-1} sono definite positive (dove $D_0 > 0, D_1 > 0, \dots, D_{n-1} > 0$), mentre le H_n, H_{n+1}, \dots sono semidefinite positive (e quindi $D_n = 0, D_{n+1} = 0, \dots$). In ogni altro caso invece tutte le forme H_0, H_1, H_2, \dots sono definite positive e si ha pertanto $D_0 > 0, D_1 > 0, D_2 > 0, \dots$

(2) Oppure con $n+1$ salti, di cui due verificantisi agli estremi dell'intervallo $(0, 2\pi)$; ma questo caso si riduce al precedente con un'ovvia modificazione della $\alpha(x)$.

La condizione è sufficiente. - Sia $\{c_k\}$ una successione verificante uno dei due casi contemplati dal teorema (onde in particolare si ha $c_0 \geq 0$). Le forme hermitiane $H_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sono tutte semidefinite o definite positive; ne segue

$$(4) \quad \sigma_n(x) = H_n\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{e^{ix}}{\sqrt{n+1}}, \frac{e^{2ix}}{\sqrt{n+1}}, \dots, \frac{e^{nix}}{\sqrt{n+1}}\right) \geq 0, \\ (n = 0, 1, 2, \dots),$$

onde le funzioni

$$(5) \quad \alpha_n(x) = \int_0^x \sigma_n(t) dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

sono *non decrescenti* in $(0, 2\pi)$. Inoltre esse sono ivi *equilimitate*; infatti da (3), (4) si trae

$$(6) \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n c_{k-h} e^{-i(k-h)x} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=-n}^n (n-|l|+1) c_l e^{-ilx} \quad (3),$$

e successivamente, per la (5)

$$0 \leq \alpha_n(x) \leq \int_0^{2\pi} \sigma_n(x) dx = 2\pi c_0.$$

Allora, per un noto teorema di Helly, dalla successione $\{\alpha_n(x)\}$ si può estrarre una successione parziale $\{\alpha_{n_j}(x)\}$, ($j = 1, 2, \dots$), che in $(0, 2\pi)$ converge quasi ovunque verso una $\alpha(x)$ non decrescente:

$$(7) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_{n_j}(x) = \alpha(x).$$

Si noti poi che:

$$(8) \quad \alpha_n(0) = \alpha(0) = 0, \quad \alpha_n(2\pi) = \alpha(2\pi) = 2\pi c_0.$$

Dimostriamo che la $\alpha(x)$ definita da (7) ha come momenti trigonometrici precisamente gli assegnati numeri c_k . Tenuto conto che

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\alpha_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} \sigma_n(x) dx = \begin{cases} \frac{n-|k|+1}{n+1} c_k & \text{per } |k| \leq n, \\ 0 & \text{per } |k| > n, \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d\alpha_n(x) = c_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

è ovvio che la nostra tesi consiste nel dimostrare che

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d[\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)] = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

(3) Si osservi che le $\sigma_n(x)$ non sono altro che le *medie di Cesaro* della serie di Fourier $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ikx}$ corrispondente a $d\alpha(x)$.

Ma ciò è immediato perché, integrando per parti e tenendo conto di (8), si può scrivere

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} d[\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)] = -ik \int_0^{2\pi} e^{ikx} [\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)] dx,$$

e successivamente, osservando che $|e^{ikx} [\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)]| \leq 2\pi c_0$ e ricordando la (7):

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{ikx} d[\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)] = -ik \int_0^{2\pi} e^{ikx} \lim_{j \rightarrow \infty} [\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)] dx = 0.$$

È da osservare infine che, se gli assegnati numeri c_k verificano il caso I, la costruzione della corrispondente $\alpha(x)$ si può compiere per via puramente algebrica. Basta anzi assegnare i c_k per $|k| \leq n$, sotto le condizioni $D_0 > 0, \dots, D_{n-1} > 0, D_n = 0$, per individuare completamente la $\alpha(x)$ e cioè la distribuzione discontinua di masse che essa definisce; i rimanenti momenti c_k restano determinati. Si può consultare in proposito il mio lavoro: *Sui coefficienti di Fourier di una funzione limitata, compresa fra limiti assegnati* [Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, s. III, vol. IV, p. 131-156 (1950)] e più particolarmente i teoremi II e III del § 2 (p. 136-141).

Come è noto, le disuguaglianze relative ai casi I e II del teorema sopra enunciato definiscono nello spazio dei c_k il cosiddetto *corpo convesso di Carathéodory* (cfr. E. Bajada, loc. cit. in ⁽¹⁾). Se ci si limita agli ordinari coefficienti

di Fourier $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx$ di una funzione sommabile, l'appartenenza

del punto $\{c_k\}$ al predetto corpo C rappresenta una condizione necessaria, *ma non sufficiente*, perché i c_k siano i coefficienti di Fourier di una $f(x) \geq 0$. Volendo che la condizione sia anche sufficiente è indispensabile formulare la questione per i coefficienti di Fourier-Stieltjes ⁽⁴⁾; basta pensare, per esempio, che ogni punto $\{c_k\}$ della frontiera del corpo C non corrisponde ad alcuna $f(x)$ sommabile, ma bensì ad una particolare $\alpha(x)$ discontinua ⁽⁵⁾.

L'uso dell'integrale di Stieltjes è invece inutile nella ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti affinché i c_k siano i coefficienti di Fourier di una funzione limitata compresa, per esempio, fra 0 e 1 (cf. il mio lavoro citato poco sopra). Infatti, detta ricerca, formulata per i coefficienti di Fourier-Stieltjes, dovrebbe prendere in considerazione delle $\alpha(x)$ tali che $\alpha(x)$ e $x - \alpha(x)$ siano non decrescenti. Ma una siffatta $\alpha(x)$ è assolutamente continua (anzi lipschitziana, perché da $x' < x'', \alpha(x') \leq \alpha(x''), x' - \alpha(x') \leq x'' - \alpha(x'')$ segue $0 \leq \frac{\alpha(x'') - \alpha(x')}{x'' - x'} \leq 1$) e perciò i suoi coefficienti di Fourier-Stieltjes sono uguali a quelli di Fourier della funzione $\alpha'(x)$, con $0 \leq \alpha'(x) \leq 1$.

(4) Oppure riferirsi alle funzioni armoniche, così come hanno fatto nel 1911 Carathéodory e gli altri Autori citati nella nota ⁽¹⁾.

(5) Sarebbe interessante classificare i punti del corpo C che corrispondono a funzioni $\alpha(x)$ discontinue, continue, assolutamente continue.

Analisi matematica. — *Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel.* Nota di SOLOMON MARCUS, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

A. Császár a posé la définition suivante [1]: une fonction réelle $f(x)$ définie sur (a, b) est interne sur (a, b) si pour $a < x < y < b$ on a

$$\min(f(x), f(y)) < f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max(f(x), f(y))$$

ou

$$\min(f(x), f(y)) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \max(f(x), f(y)).$$

Toute fonction strictement monotone est interne. Mais il existe des fonctions internes non monotones. Telles sont les fonctions de Hamel, c'est-à-dire les solutions discontinues de l'équation fonctionnelle

$$(1) \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

A. Császár a montré [2] que les fonctions internes non monotones possèdent des propriétés fort singulières: elles sont non mesurables par rapport à tout ensemble de mesure positive, contenu dans (a, b) ; elles n'admettent aucun point de continuité approximative.

Toutes les propriétés démontrées par A. Császár pour les fonctions internes, non monotones, sont connues d'assez long temps pour les fonctions de Hamel. Il est naturel de se poser la question s'il existe une fonction interne, non monotone, qui ne satisfait pas (1) et, si la réponse est affirmative, de trouver des fonctions internes non monotones, jouissant de certaines propriétés de structure qui n'appartiennent pas aux fonctions de Hamel. Puis, tenant compte d'une certaine analogie qu'existe entre les propriétés métriques des fonctions et les propriétés liées à la catégorie de Baire, il se pose la question si les fonctions internes non monotones sont aussi singulières du point de vue descriptif.

C'est le but de cette Note de résoudre ces problèmes. A la fin, on verra qu'une fonction interne, non monotone, présente une solidarité qui ressemble au caractère organique d'une fonction analytique. Les propriétés locales et globales en sont intimement liées.

THÉOREME 1. — Soit $\varphi(x)$ une fonction de Hamel qui prend toute valeur réelle et $\psi(u)$ une fonction croissante sur $(-\infty, +\infty)$, qui n'est pas linéaire affine. La fonction $f(x) = \psi(\varphi(x))$ est interne, non monotone et ne satisfait pas (1).

(*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

Démonstration. — On a, pour deux valeurs x et y

$$(2) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \psi\left(\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) = \psi\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right).$$

Puisque $\psi(u)$ est croissante, on a

$$\min(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(y))) < \psi\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) < \max(\psi(\varphi(x)), \psi(\varphi(y)))$$

et, tenant compte de (2),

$$\min(f(x), f(y)) < f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max(f(x), f(y)):$$

donc $f(x)$ est une fonction interne.

$\varphi(x)$, étant une fonction de Hamel, est non bornée. Pour $x < y$ on peut trouver un z , tel que

$$x < z < y \quad , \quad \varphi(x) < \varphi(z) > \varphi(y).$$

Vu que $\psi(u)$ est croissante, il résulte que $f(x)$ n'est pas monotone.

Si $f(x)$ était une fonction de Hamel, on aurait, tenant compte de (2),

$$\psi\left(\frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}\right) = \frac{\psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y))}{2}.$$

Mais, pour u et v donnés, il existe x et y tels que $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$, donc

$$(3) \quad \psi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{\psi(u) + \psi(v)}{2}.$$

On sait que les seules fonctions croissantes qui satisfont (3) sont les fonctions linéaires affines. La contradiction obtenue achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. — *Il existe une fonction interne, non monotone, qui n'est pas convexe au sens de Jensen.* En effet, tenant compte que la définition des fonctions internes est symétrique par rapport aux relations \leq et \geq , il résulterait, si l'affirmation n'était pas vraie, que toute fonction interne, non monotone, est à la fois convexe et concave au sens de Jensen, ce qui contredirait le théorème 1.

Une fonction de Hamel n'est bornée ni inférieurement ni supérieurement, mais

COROLLAIRE 2. — *Il existe une fonction bornée, interne et non monotone.* En effet, soit $\varphi(x)$ une fonction de Hamel qui prend toute valeur réelle et soit $\psi(u)$ une fonction croissante et bornée sur $(-\infty, +\infty)$ (par exemple, $\psi(u) = \tanh u$). La fonction $f(x) = \psi(\varphi(x))$ en est la fonction cherchée.

On sait que le graphique d'une fonction de Hamel est un ensemble dense partout dans le plan. Certaines fonctions internes, non monotones, s'en dérobent, comme le montre le

THÉORÈME 2. — *Il existe une fonction interne, non monotone, dont le graphique est rare dans le plan.*

Démonstration. - Soit

$$\psi_p(u) = (p-1) + \sum_{r_n^p < u} \frac{1}{2^n}, \quad \text{si } p-1 \leq u < p,$$

où $\{r_n^p\}$ est la suite des nombres rationnels de $[p-1, p)$ et la sommation s'étend à toutes les valeurs de n pour lesquelles $r_n^p < u$. Soit

$$\psi(u) = \begin{cases} \psi_p(u) & , \quad \text{si } p-1 \leq u < p \\ -\psi_p(u) & , \quad \text{si } -p < u \leq -(p-1). \end{cases}$$

On voit aisément que $\psi(u)$ est croissante sur $(-\infty, +\infty)$ et que les intervalles $(\psi_p(r_n^p-0), \psi_p(r_n^p+0))$ ne contiennent pas des valeurs de $\psi(u)$, donc l'ensemble des valeurs de $\psi(u)$ est rare sur $(-\infty, +\infty)$.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de Hamel. Par des considérations semblables à celles de la démonstration du théorème 1, on montre que la fonction $f(x) = \psi(\varphi(x))$ est interne et non monotone; les valeurs de $f(x)$ forment un ensemble rare sur $(-\infty, +\infty)$, donc le graphique de $f(x)$ est rare dans le plan.

LEMME. - Soit $f(x)$ une fonction interne, non monotone sur (a, b) et soit $a < \alpha < \beta < b$. Soit E l'ensemble des points de (α, β) où la valeur de $f(x)$ est comprise entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$. Tout ensemble jouissant de la propriété de Baire, contenu dans E , est de première catégorie.

Démonstration. - On suit la marche du raisonnement de A. Császár (le lemme de [2]), tenant compte des faits suivants:

si un ensemble A est de deuxième catégorie et jouit de la propriété de Baire, alors il existe un intervalle I par rapport auquel le complémentaire de A est de première catégorie;

la catégorie d'un ensemble se conserve par une translation ou une symétrie;

si un ensemble A est de deuxième catégorie et jouit de la propriété de Baire, alors il existe un $\omega > 0$, tel que tout ensemble qui s'obtient de A par une translation inférieure à ω , a des points communs avec A .

Remarque. - La propriété ci-dessus et son analogue métrique, démontré par A. Császár [2], sont bien connues, même dans une forme plus puissante, pour les fonctions de Hamel. En effet, W. Sierpinski a démontré [3] que, si $f(x)$ est une fonction de Hamel et k est un nombre réel, alors chacun des ensembles

$$\{x; f(x) < k\} \quad , \quad \{x; f(x) > k\}$$

rencontre dans tout intervalle (α, β) un ensemble de deuxième catégorie et de mesure extérieure égale à $\beta - \alpha$.

Le corollaire 2 du théorème 1 montre que le théorème de W. Sierpinski n'est pas vrai pour les fonctions internes, non monotones.

THÉORÈME 3. - Une fonction $f(x)$ interne, non monotone sur (a, b) , est dépourvue de la propriété de Baire par rapport à tout ensemble E de deuxième catégorie, jouissant de la propriété de Baire et contenu dans (a, b) .

Démonstration. — Supposons, par absurde, que $f(x)$ jouit de la propriété de Baire par rapport à E . D'après un théorème de [4], il existe un ensemble $E_1 \subset E$, tel que $E - E_1$ est de première catégorie et la restriction de $f(x)$ à E_1 est continue.

Puisque E_1 jouit aussi de la propriété de Baire, il existe un point $\alpha \in E_1$, où E_1 est un résiduel (complémentaire d'un ensemble de première catégorie par rapport à un certain intervalle qui contient α). Maintenant, comme le fait A. Császár en [2], on considère α_1 et β_1 , tels que

$$a < \alpha_1 < \alpha < \beta_1 < b, \quad f(\alpha_1) < f(\alpha) < f(\beta_1).$$

Soit $I = (\alpha_1, \beta_1)$. A cause de la continuité de $f(x)$ sur E_1 , il résulte que, pour $x \in E_1$, tel que $|x - \alpha|$ est assez petit, on a

$$x \in I \cap \{x; f(\alpha_1) < f(x) < f(\beta_1)\}$$

donc $I \cap \{x; f(\alpha_1) < f(x) < f(\beta_1)\}$ est un résiduel au point α . Ce fait contredit le lemme ci-dessus.

Le raisonnement fait amène aussi à la conclusion suivante:

Une fonction interne, non monotone sur (a, b) , n'est qualitativement continue en aucun point de (a, b) . Pour la notion de « continuité qualitative », voir [5]).

THÉORÈME 4. — *Si une fonction interne, non monotone, est bornée supérieurement (resp. inférieurement) en un point de (a, b) , alors cette fonction est bornée supérieurement (resp. inférieurement) en chaque point de (a, b) ; la borne supérieure (resp. inférieure) est la même en chaque point, les bornes ne sont atteintes en aucun point.*

Démonstration. — Le théorème est une conséquence immédiate du lemme 4 de [1].

On dit [6] qu'une fonction $f(x)$ jouit de la propriété de Darboux à droite (resp. à gauche) au point ξ , si l'intervalle qui a comme extrémités les bornes de $f(x)$, à droite (resp. à gauche), au point ξ , est contenu dans l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ dans l'intervalle $(a, a + h)$ resp. $(a - h, a)$, quel que soit $h > 0$.

THÉORÈME 5. — *Une condition suffisante (et, évidemment, nécessaire) pour qu'une fonction $f(x)$ interne, non monotone sur (a, b) , jouisse de la propriété de Darboux sur (a, b) est qu'il existe un point $\xi \in (a, b)$, où $f(x)$ jouit de la propriété de Darboux à gauche et à droite.*

Démonstration. — Soit un point $\xi \in (a, b)$ où $f(x)$ jouit de la propriété de Darboux à gauche et à droite. D'après le théorème 4, il résulte que l'intervalle qui a comme extrémités les bornes de $f(x)$ à droite (ou à gauche) au point ξ est (m, M) . Il s'en suit que tout ensemble de niveau de $f(x)$ possède au moins deux points. Mais de la définition des fonctions internes on déduit aisément que tout niveau qui a deux points, en a une infinité et est un ensemble dense sur (a, b) . Donc $f(x)$ jouit de la propriété de Darboux sur (a, b) .

COROLLAIRE. — *Le graphique d'une fonction interne, non monotone, jouissant de la propriété de Darboux, est dense sur le rectangle $(a, b; m, M)$.*

THÉORÈME 6. — *Si une fonction interne, non monotone, est dépourvue de la propriété de Darboux, alors son graphique est totalement non connexe.*

Démonstration. — Soit H une composante de connexion du graphique de $f(x)$. Supposons que H ne se réduit pas à un point. Notons par α et β les abscisses extrêmes des points de H . Sur (α, β) la graphique de $f(x)$ est connexe, donc $f(x)$ jouit, sur (α, β) , de la propriété de Darboux. D'après le théorème 5, il résulte que $f(x)$ jouit de la propriété de Darboux sur (a, b) .

La contradiction obtenue démontre le théorème.

Remarque. — La propriété ci-dessus a été signalée, pour les fonctions de Hamel, par F. B. Jones (théorème 0 de [7]).

Le théorème 6 pose la question de l'existence d'une fonction interne, non monotone, dont le graphique est connexe. F. B. Jones a démontré [7] qu'il existe une fonction de Hamel ayant le graphique connexe. Soit $\varphi(x)$ une telle fonction. $\varphi(x)$ jouit de la propriété de Darboux donc elle prend toute valeur réelle. Soit $\psi(u)$ une fonction croissante et continue sur $(-\infty, +\infty)$, qui n'est pas linéaire affine. D'après le théorème 1, la fonction $f(x) = \psi(\varphi(x))$ est interne, non monotone et n'est pas une fonction de Hamel. D'autre part, le graphique de $f(x)$ est connexe, comme image continue d'un ensemble connexe (le graphique de $\varphi(x)$). On a donc

THÉORÈME 7. — *Il existe une fonction interne, non monotone, qui n'est pas une fonction de Hamel et dont le graphique est connexe.*

THÉORÈME 8. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que le graphique d'une fonction interne, non monotone sur (a, b) , soit connexe est qu'il rencontre tout continu situé dans le rectangle $(a, b; m, M)$ et non contenu dans une verticale.*

Vu le corollaire du théorème 5, la démonstration est identique à celle donnée par F. B. Jones au théorème 2 de [7].

Remarques. — Si, dans la démonstration du théorème 7, on impose que $\psi(u)$ soit bornée, alors on voit aisément, grâce à certaines propriétés démontrées jusqu'ici, que le graphique de la fonction $f(x)$ est borné, connexe, ponctiforme, irréductible entre deux points, dense partout dans le rectangle $(a, b; m, M)$ et ne rencontre pas les côtés inférieur et supérieur de ce rectangle.

Le premier exemple d'un ensemble plan, jouissant, dans un rectangle, de toutes ces propriétés, a été donné par B. Knaster et C. Kuratowski (l'exemple β de [8]).

L'ensemble qui s'obtient du graphique ci-dessus, en prenant $m = 0$ et en changeant l'ordonnée y de tout point par $1/y$, est connexe mais ne contient aucune partie connexe et bornée, qui ne se réduit pas à un seul point.

Le premier exemple d'ensemble de telle nature a été construit, par une voie très compliquée, par St. Mazurkiewicz [9].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. CSÁSZÁR, *Sur une classe de fonctions non mesurables*, « Fund. Math. », t. 36, pp. 72-76 (1949).
- [2] A. CSÁSZÁR, *Sur les fonctions internes, non monotones*, « Acta Scient. Math. », t. 13, fasc. 1, pp. 48-50 (1949).
- [3] W. SIERPINSKI, *Sur une propriété des fonctions de M. Hamel*, « Fund. Math. », t. 5, pp. 334-336 (1924).
- [4] C. KURATOWSKI, *Topologie*, I, Warszawa-Wrocław, p. 306 (1948).
- [5] S. MARCUS, *Continuitatea aproximativă calitativă*, « Com. Acad. R.P.R. », t. III, nr. 3-4, pp. 117-120 (1953).
- [6] A. CSÁSZÁR, *Sur la propriété de Darboux*, « C. R. du premier Congrès des mathématiciens hongrois », pp. 556-560 (1950).
- [7] F. B. JONES, *Connected and disconnected plane sets and the functional equation $f(x) + f(y) = f(x+y)$* , « Bull. A.M.S. », Febr. 1942, vol. 48, nr. 2, pp. 115-120.
- [8] B. KNASTER-C. KURATOWSKI, *Sur les ensembles connexes*, « Fund. Math. », t. 2, pp. 206-255 (1921).
- [9] ST. MAZURKIEWICZ, *Sur l'existence d'un ensemble plan connexe, ne contenant aucun sous-ensemble connexe borné*, « Fund. Math. », t. 2, pp. 96-103 (1921).

Analisi matematica. — *Fonction de variables complexes: sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctions linéaires.*
 Nota di JEAN LERAY, presentata (*) dal Corrisp. L. FANTAPPIÈ.

Le produit fonctionnel projectif de L. Fantappiè permet ⁽¹⁾ de représenter une fonction analytique de l variables par une somme de puissances $m^{\text{ièmes}}$ de fonctions linéaires des variables, quel que soit l'entier négatif m . La Note précédente de L. Fantappiè explicite les cas $m = -1$ et $m = -l$. Dans ce dernier cas nos formules donnent l'énoncé très simple qui suit. Cet énoncé généralise par ailleurs une formule de E. Martinelli ⁽²⁾ retrouvée par S. Bochner et D. C. May ⁽³⁾. Nous n'indiquons pas ici notre démonstration; mais il est assez aisé de réduire notre formule à celle de E. Martinelli, dont la preuve est publiée.

THÉORÈME. — Soit X l'espace vectoriel, sur le corps des nombres complexes, de dimension complexe l . Soit Ξ son dual, la dualité étant définie par la forme bilinéaire

$$\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_l x_l \quad , \quad \text{où } x = (x_1, \dots, x_l) \in X, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_l) \in \Xi.$$

(*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) J. LERAY, « Comptes rendus », Paris, 242, pp. 953-959, n° 6 (1956).

(2) E. MARTINELLI, « Memorie Acc. d'Italia », 9, p. 269 (1938); « Annali di Mat. », 34, p. 277 (1953).

(3) S. BOCHNER, « Annals of Math. », 44, p. 652 (1943); D. C. MAY, Thesis, Princeton, 1941.

Soit Ξ^* l'espace projectif, de dimension complexe $l-1$, image de Ξ . Soit un compact, convexe régulier, $C \subset X$.

Soit $\overset{\circ}{C}$ son intérieur, ∂C son bord. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe sur C . On a, pour *tout* $z \in C$:

$$(1) \quad f(z) = \frac{(l-1)!}{(2\pi i)^l} \int_{\alpha^*} \frac{f(x)}{[\xi \cdot (x-z)]^l} \omega^*(\xi) \wedge \omega(x);$$

\wedge désigne le produit extérieur;

$$\omega(x) = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l$$

$$\omega^*(\xi) = \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} \xi_k d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_{k-1} \wedge d\xi_{k+1} \wedge \dots \wedge d\xi_l;$$

au second membre de (1) la forme différentielle utilisée est une forme de $\Xi^* \times X$; par abus de langage nous la notons comme l'est son image dans $\Xi \times X$;

$\alpha^* = \alpha^*(C)$ est un cycle de $\Xi^* \times X$; il dépend de C , *non* de z ;

il est constitué par l'ensemble, convenablement orienté, des points (ξ, x) de $\Xi^* \times X$ tels que:

$$(2) \quad x \in \partial C$$

$$(3) \quad \xi \cdot dx = 0 \text{ implique que les vecteurs } dx, \text{ d'origine } x, \text{ touchent } \partial C \text{ en } x.$$

Nota. — ξ est donc fonction (non analytique) de x sur $\alpha^*(C)$; (3) équivaut à

$$(3 \text{ bis}) \quad \xi \cdot (x-z) \neq 0 \text{ pour tout } z \in \overset{\circ}{C}.$$

Par exemple si C est une sphère de centre a , ξ est l'image dans Ξ^* du vecteur $(\bar{x}_1 - \bar{a}_1, \dots, \bar{x}_l - \bar{a}_l) \in \Xi$ (\bar{u} : imaginaire conjugué de u).

Corollaire. — Supposons $f(x)$ holomorphe dans un domaine $D \subset X$; la formule (1) vaut pour tout $z \in D$ à condition d'y choisir pour α^* une classe d'homologie $\alpha^*(z)$, dépendant de z , du domaine de $\Xi^* \times D$ où $\xi \cdot (x-z) \neq 0$: $\alpha^*(z)$ est la classe d'homologie des cycles $\alpha^*(C)$ tels que

$$z \in \overset{\circ}{C}, \quad C \subset D.$$

Cas $l=1$: $\omega^*(\xi) = \xi$; (1) se réduit à l'intégrale de Cauchy.

Magneto-idrodinamica. — *Su qualche effetto del secondo ordine nella magneto-idrodinamica.* Nota II di RENATO NARDINI, presentata (*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

In una Nota precedente (7) si sono studiati, in prima approssimazione, fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni acustici in un fluido compressibile ed elettricamente conduttore; qui si passa alla seconda approssimazione.

4. CALCOLO DELLA VELOCITÀ IN SECONDA APPROSSIMAZIONE. — Per valutare l'apporto che, nel caso di grandezze non infinitesime, i termini di secondo ordine danno alla soluzione della (16) e della (18), possiamo adattare al caso nostro il metodo di successive approssimazioni introdotto da Airy (8) per lo studio delle onde acustiche di ampiezza finita. Riferendosi all'equazione (16), diamo alle funzioni incognite, che compaiono a secondo membro nei termini di secondo grado, i valori di prima approssimazione espressi dalla (22), dalla (23) e dalla (25). Posto

$$W\left(t - \frac{z}{V}\right) = \frac{\mu}{2} \left[h_x^2\left(t - \frac{z}{V}\right) + h_y^2\left(t - \frac{z}{V}\right) \right],$$

si ha allora l'equazione non omogenea

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = & - \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left[\frac{1}{\rho_0} W\left(t - \frac{z}{V}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} u^2\left(t - \frac{z}{c}\right) - \frac{\lambda^2}{c^2} u^2\left(t - \frac{z}{c}\right) \right] + c \frac{\partial^2}{\partial z^2} u^2\left(t - \frac{z}{c}\right). \end{aligned}$$

Essendo poi

$$(27) \quad c \frac{\partial^2}{\partial z^2} u^2\left(t - \frac{z}{c}\right) = - \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} u^2\left(t - \frac{z}{c}\right),$$

la detta equazione si può scrivere più brevemente

$$(28) \quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = - \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left[\frac{1}{\rho_0} W\left(t - \frac{z}{V}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) u^2\left(t - \frac{z}{c}\right) \right]$$

e va considerata con le condizioni iniziali (19) e la condizione al contorno (21_r).

(*) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(7) Ved. pp. 457-462 di questo volume dei « Rendiconti ».

(8) G. B. AIRY, *Tides and Waves* « Encyc. Metrop. », 1845. Si veda anche H. LAMB, *The Dynamical Theory of Sound*, 2ª ed., Arnold, London, 1925, n. 63, oppure E. FUBINI GHIRON, *Anomalie nella propagazione di onde acustiche di grande ampiezza*, « Alta Frequenza », 4, 530-581 (1935).

Limitiamoci, per il momento, a supporre presente nella parentesi quadra il solo termine $\frac{1}{\rho_0} W\left(t - \frac{z}{V}\right)$; è facile verificare che la soluzione del problema è espressa allora dalla formula ⁽⁹⁾

$$(29) \quad v_z(t, z) = u\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{V}{\rho_0(V^2 - c^2)} \left[W\left(t - \frac{z}{V}\right) - W\left(t - \frac{z}{c}\right) \right] \quad (V \neq c).$$

Cercando per l'ultimo termine il limite per $V \rightarrow c$ ⁽¹⁰⁾, si ha il risultato particolare

$$(30) \quad v_z(t, z) = u\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{2\rho_0 c^2} z W'\left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (V = c)$$

che del pari si presta ad un'immediata verifica riguardante le condizioni del problema.

Dato ora che il termine $-\left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} u^2\left(t - \frac{z}{c}\right)$, che compare a secondo membro di (28), dà, a parte il coefficiente, identico contributo a quello dato alla formula (30) dal termine $-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} W\left(t - \frac{z}{V}\right)$ in cui si faccia $V = c$, si può in definitiva scrivere la soluzione completa della (28) in uno dei due modi seguenti

$$(31) \quad v_z(t, z) = u\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{V}{\rho_0(V^2 - c^2)} \left[W\left(t - \frac{z}{V}\right) - \right. \\ \left. - W\left(t - \frac{z}{c}\right) \right] + \left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{c^2}\right) \frac{z}{2c^2} \left[u^2\left(t - \frac{z}{c}\right) \right]' \quad (V \neq c)$$

$$(32) \quad v_z(t, z) = u\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{z}{2c^2} \left\{ \frac{1}{\rho_0} W'\left(t - \frac{z}{c}\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{c^2}\right) \left[u^2\left(t - \frac{z}{c}\right) \right]' \right\} \quad (V = c).$$

In assenza del campo magnetico, e cioè con $W = 0$, si ha sostanzialmente la formula trovata da Airy: unica differenza, puramente formale, è che Airy, ponendosi dal punto di vista lagrangiano anziché euleriano, considera gli spostamenti delle singole particelle dalla loro posizione iniziale

(9) Volendo ricavare la (29) per via diretta si può, ad esempio, applicare all'equazione (28) la trasformazione di Laplace; si veda analogo procedimento svolto al riguardo nel lavoro *Sul comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica*, Nota II di R. NARDINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 16, 341-348 (1954). È necessario inoltre tener presente il fatto che la funzione W è identicamente nulla quando è ad argomento negativo.

(10) Ricordiamo a tale proposito che, per esempio, nei gas diffusi nelle regioni interstellari, V e c possono avere uguale ordine di grandezza valutabile in 10^4 m/sec: si veda a tale riguardo il n. 15 del lavoro citato in ⁽¹⁾.

anziché le velocità, inoltre, considerando il caso di condizioni fisiche e di fluidi per i quali nell'equazione (6) è

$$f(\rho) = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

ottiene

$$-\lambda^2 = c^2 \frac{\gamma - 1}{2}$$

per cui si ha

$$\frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{c^2} = \frac{\gamma + 1}{2}.$$

5. CALCOLO DELLA CONCENTRAZIONE. — Introducendo a primo membro delle equazioni del sistema (15) l'espressione di v_z fornita dalla (31) e dando ai termini di secondo grado i valori di prima approssimazione si ricava

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{1}{c} u' \left(t - \frac{z}{c} \right) + \frac{V}{\rho_0 (V^2 - c^2)} \left[\frac{1}{V} W' \left(t - \frac{z}{V} \right) - \frac{1}{c} W' \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2c^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{c^2} \right) \left[u^2 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]' + \frac{1}{2c^3} \left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) z \left[u^2 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]'' \\ \frac{\partial s}{\partial z} &= -\frac{1}{c^2} u' \left(t - \frac{z}{c} \right) - \frac{V}{\rho_0 (V^2 - c^2)} \left[\frac{1}{V^2} W' \left(t - \frac{z}{V} \right) - \frac{1}{c^2} W' \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{c^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) \left[u^2 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]' - \frac{1}{2c^4} \left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) z \left[u^2 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]'', \end{aligned}$$

da cui, ricordando che sono nulli i valori iniziali delle funzioni h_i e di s , si ricava per la concentrazione l'espressione di seconda approssimazione

$$\begin{aligned} (33) \quad s(t, z) &= \frac{1}{c} u \left(t - \frac{z}{c} \right) + \frac{V}{\rho_0 (V^2 - c^2)} \left[\frac{1}{V} W \left(t - \frac{z}{V} \right) - \frac{1}{c} W \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{2c^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{c^2} \right) u^2 \left(t - \frac{z}{c} \right) + \frac{1}{2c^3} \left(\frac{3}{2} - \frac{\lambda^2}{c^2} \right) z \left[u^2 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]'. \end{aligned}$$

6. CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO IN SECONDA APPROSSIMAZIONE. — Per calcolare la soluzione del sistema (17) in seconda approssimazione, osserviamo che dalle (22), (23), (25) e (26) si ricava

$$H_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z^{(0)} \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial z} + \frac{\mu H_0}{\rho_0} s^{(0)} \frac{\partial H_i^{(0)}}{\partial z} \right) = \left(1 - \frac{V}{c} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[u \left(t - \frac{z}{c} \right) h_i' \left(t - \frac{z}{V} \right) \right];$$

ne segue che la (18), in seconda approssimazione, diventa, per entrambi i valori dell'indice i

$$\begin{aligned} (34) \quad \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 H_i}{\partial z^2} &= - \frac{c^2 u \left(t - \frac{z}{c} \right) h_i \left(t - \frac{z}{V} \right)}{\partial z \partial t} - \\ &- \left(1 - \frac{V}{c} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left[u \left(t - \frac{z}{c} \right) h_i \left(t - \frac{z}{V} \right) \right], \end{aligned}$$

che va considerata con le condizioni iniziali (20) e la condizione al contorno (21₂). Il calcolo della soluzione di tale problema si presenta laborioso: la causa di ciò è da individuarsi nella presenza, a secondo membro, dei prodotti di una funzione di argomento $t - z/V$ per una funzione di argomento $t - z/c$; se è $V \neq c$, le operazioni di integrazione non sono perciò immediate, anche perché, fra l'altro, non è possibile in tale caso trasformare nel loro complesso derivate parziali fatte rispetto a z in derivate parziali fatte rispetto a t e viceversa, come si è fatto, ad esempio, nella formula (27). Preferiamo perciò, per non appesantire la trattazione, riportare i calcoli in un'altra Nota ⁽¹¹⁾, limitandoci qui a dare i risultati finali, per i quali conviene distinguere il caso in cui è $c > V$ da quello in cui è $c < V$.

Per il caso $c > V$ si ha la formula, valida per $z < Vt$,

$$\begin{aligned} H_i(t, z) = & h_i\left(t - \frac{z}{V}\right) + \frac{c+V}{4V(c-V)} \left[u\left(t - \frac{z}{c}\right) - \right. \\ & - u\left(t - \frac{z}{V}\right) \left] h_i\left(t - \frac{z}{V}\right) + \frac{1}{2V^2} h_i'\left(t - \frac{z}{V}\right) \int_0^z u\left[t - \frac{z}{V} + \zeta\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{c}\right)\right] d\zeta + \\ & + \frac{1}{4V} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{V}\right) \left\{ \int_z^{(Vt+z)/2} h_i\left(t + \frac{z}{V} - \frac{2\zeta}{V}\right) u'\left[t + \frac{z}{V} - \zeta\left(\frac{1}{V} + \frac{1}{c}\right)\right] d\zeta - \right. \\ & - \left. \int_0^{(Vt-z)/2} h_i\left(t - \frac{z}{V} - \frac{2\zeta}{V}\right) u'\left[t - \frac{z}{V} - \zeta\left(\frac{1}{V} + \frac{1}{c}\right)\right] d\zeta \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{V}\right) \left\{ \int_{(Vt+z)/2V}^t u\left[\tau\left(1 + \frac{V}{c}\right) - \frac{Vt+z}{c}\right] h_i'\left(2\tau - \frac{Vt+z}{V}\right) d\tau - \int_{(Vt-z)/2V}^{(Vt-z)/V} u\left[\tau\left(1 + \frac{V}{c}\right) - \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{Vt-z}{c}\right] h_i'\left(2\tau - \frac{Vt-z}{V}\right) d\tau - h_i'\left(t - \frac{z}{V}\right) \int_{t-z/V}^t u\left[\tau\left(1 - \frac{V}{c}\right) + \frac{Vt-z}{c}\right] d\tau. \right. \end{aligned}$$

È immediato verificare che per $z > Vt$ si ha $H_i \equiv 0$.

Per il caso $c < V$ e per $z < ct$ si ha invece la formula risolutiva

$$\begin{aligned} H_i(t, z) = & h_i\left(t - \frac{z}{V}\right) + \frac{c+V}{4V(c-V)} \left[u\left(t - \frac{z}{c}\right) - \right. \\ & - u\left(t - \frac{z}{V}\right) \left] h_i\left(t - \frac{z}{V}\right) + \frac{1}{2V^2} h_i'\left(t - \frac{z}{V}\right) \int_0^z u\left[t - \frac{z}{V} + \zeta\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{c}\right)\right] d\zeta + \end{aligned}$$

(11) Sulla formula risolutiva di un particolare problema della magneto-idrodinamica, «Ann. dell'Univ. di Ferrara», in corso di stampa nel vol. V della Nuova Serie.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4V} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{V} \right) \left\{ \int_z^{(Vt+z)/(1+V/c)} h_i \left(t + \frac{z}{V} - \frac{2\zeta}{V} \right) u' \left[t + \frac{z}{V} - \zeta \left(\frac{1}{V} + \frac{1}{c} \right) \right] d\zeta - \right. \\
& \quad \left. - \int_0^{(Vt-z)/(1+V/c)} h_i \left(t - \frac{z}{V} - \frac{2\zeta}{V} \right) u' \left[t - \frac{z}{V} - \zeta \left(\frac{1}{V} + \frac{1}{c} \right) \right] d\zeta \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{V} \right) \left\{ \int_{(Vt+z)/(c+V)}^t u \left[\tau \left(1 + \frac{V}{c} \right) - \frac{Vt+z}{c} \right] h_i' \left(2\tau - \frac{Vt+z}{V} \right) d\tau - \int_{(Vt-z)/(c+V)}^t u \left[\tau \left(1 + \frac{V}{c} \right) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{Vt-z}{c} \right] h_i' \left(2\tau - \frac{Vt-z}{V} \right) d\tau - h_i' \left(t - \frac{z}{V} \right) \int_{t-z/V}^t u \left[\tau \left(1 - \frac{V}{c} \right) + \frac{Vt-z}{c} \right] d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Importa rilevare che, per $ct < z < Vt$, le funzioni H_i , pur subendo qualche immediata modifica rispetto alla forma precedente, sono generalmente diverse da zero, mentre, ovviamente, sono identicamente nulle per $z > Vt$.

Il caso particolare in cui sia $c = V$ si tratta con tutta facilità, analogamente a quanto si è fatto al n. 4, e dà il risultato, particolarmente semplice, e di immediata verifica,

$$H_i(t, z) = h_i \left(t - \frac{z}{V} \right) + \frac{z}{2V^2} \left[h_i \left(t - \frac{z}{V} \right) u \left(t - \frac{z}{V} \right) \right]'$$

Non ci dilungheremo a calcolare i valori di v_x e v_y : osserviamo solo che, dalle (17), in cui si introducano le grandezze già note, si ricava che, per $z > Vt$ è in ogni caso $\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial z} \equiv 0$, per cui è anche $v_i \equiv 0$ ($i = x, y$); si conclude che al di là del fronte d'onda $z = Vt$ non si hanno fenomeni magneto-idrodinamici.

7. CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE. — L'effetto della presenza del campo magnetico sulle onde di tipo acustico di ampiezza finita è, in seconda approssimazione, rappresentato nell'espressione di v_x dal termine

$$\frac{V}{\rho_0(V^2 - c^2)} \left[W \left(t - \frac{z}{V} \right) - W \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

e risulta perciò proporzionale alla differenza fra l'energia magnetica indotta che si propaga con velocità magneto-idrodinamica V ed analogo termine che si propaga invece con velocità acustica c ; i due valori della velocità di propagazione risultano ancora quelli che competono ai due fenomeni separati, come si è riscontrato in prima approssimazione ⁽¹²⁾, solo che questa volta

(12) Se si tiene presente il metodo delle caratteristiche (T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Bologna, Zanichelli, 1931), ciò appare in perfetto accordo con il fatto che le equazioni di seconda approssimazione non sono altro che le equazioni di prima approssimazione rese non omogenee per l'introduzione di funzioni note e quindi nulla si modifica nei riguardi delle discontinuità delle derivate di ordine massimo, che da sole determinano i possibili valori della velocità di propagazione del fronte d'onda.

compaiono entrambi nel fenomeno acustico rappresentato da v_z . Giova anche rilevare che, per $V > c$, al di là del fronte d'onda $z = ct$ delle comuni onde sonore di ampiezza qualunque, sul quale generalmente non è nulla la componente tangenziale del campo magnetico, è in atto, fino al fronte d'onda $z = Vt$ delle comuni onde magneto-idrodinamiche (che avrebbero luogo in un mezzo incompressibile di densità costante ρ_0), anche una specie di prolungamento dei fenomeni acustici, dovuto alla presenza del campo magnetico e rappresentato dall'espressione

$$v_z(t, z) = \frac{V}{\rho_0(V^2 - c^2)} W\left(t - \frac{z}{V}\right).$$

Analoghe considerazioni si possono fare nei riguardi del termine

$$\frac{V}{\rho_0(V^2 - c^2)} \left[\frac{1}{V} W\left(t - \frac{z}{V}\right) - \frac{1}{c} W\left(t - \frac{z}{c}\right) \right]$$

che esprime l'influenza del campo magnetico sulla concentrazione.

Invece le grandezze magneto-idrodinamiche H_x ed H_y , v_x e v_y , pur restando influenzate dalla comprimibilità del mezzo, si propagano solamente con velocità di tipo magneto-idrodinamico V .

Come si è rilevato nell'introduzione, tuttociò è in accordo con i risultati qualitativi richiamati al n. 1.

Gasdinamica. — *Un modello semplificato di miscela multipla di gas.* Nota di GIANNI JARRE, presentata (*) dal Corrisp. C. FERRARI.

1. Presentiamo un modello semplificato di miscela multipla di gas, adatto allo studio di prima approssimazione di complessi problemi aerotermo-chimici.

La semplificazione concerne i fenomeni di trasporto, qui di seguito compendati insieme ai relativi coefficienti:

trasporto di quant. di moto	I	coefficiente: μ/ρ
trasporto di calore {	conduzione	I coefficiente: $\lambda/c_p \rho$
	termoeffetto {	
	 (N - 1) coefficienti: \mathfrak{D}_i^T
trasporto di massa {	termodiffusione {	
	diffusione pura {	
	pressodiffusione { $\binom{N}{2}$ coefficienti: \mathfrak{D}_{ij}
	diffusione forzata {	

N è il numero di costituenti; μ, λ, ρ, c_p sono: viscosità, conducibilità, densità e calore specifico a pressione costante della miscela; \mathfrak{D}_i^T sono i coefficienti di termodiffusione; \mathfrak{D}_{ij} sono i coefficienti di diffusione binaria dei costituenti a due a due.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

Descriviamo il modello di miscela che soddisfa al seguente sistema di ipotesi:

$$\mathfrak{D}_i^T = 0 \quad ; \quad \mu/\rho = \lambda/c_p \rho = \mathfrak{D}_{ij} = D.$$

Abbiamo denominato D il valore comune attribuito ai $2 + N(N-1)/2$ coefficienti di trasporto non nulli, resi equidimensionali.

Secondo la teoria cinetica delle miscele di gas, binarie [1] e multiple [2], i coefficienti \mathfrak{D}_i^T sono piccoli rispetto agli altri, ed i coefficienti μ/ρ , $\lambda/c_p \rho$, \mathfrak{D}_{ij} sono generalmente poco differenti fra loro.

Le ipotesi accettate consentiranno perciò una descrizione di prima approssimazione delle evoluzioni reali di una miscela multipla di gas. Osserviamo ancora che spesso una approssimazione migliore:

non è possibile per le incomplete informazioni quantitative attuali sui coefficienti di trasporto;

non sarebbe proporzionata al grado di informazione attuale sugli schemi effettivi di reazione e sulle costanti di reazione, nel caso di problemi aero-termo-chimici tipici delle miscele multiple.

Illustriamo in questo lavoro le notevoli semplificazioni consentite dall'impiego delle quattro ipotesi accettate che, per chiarezza, elenchiamo separatamente:

- | | |
|-----|-------------------------|
| (1) | $\mathfrak{D}_i^T = 0$ |
| (2) | $\mathfrak{D}_{ij} = D$ |
| (3) | $\lambda = c_p \rho D$ |
| (4) | $c_p \mu = \lambda.$ |

Ci limiteremo a considerare miscele con:

- | | |
|-----|---|
| (5) | $\left\{ \begin{array}{l} \text{pressione totale} = \text{costante} \\ \text{forze di massa} = \text{nulle.} \end{array} \right.$ |
|-----|---|

Queste limitazioni consentono lo studio di numerosi ed importanti problemi di combustione e di strato limite, e sono *sufficienti* ad escludere i fenomeni di pressodiffusione e di diffusione forzata. L'ipotesi (1) riduce le cause del trasporto di calore alle sole disuniformità di temperatura (conduzione); l'ipotesi (1) e le limitazioni (5) riducono le cause del trasporto di massa alle sole disuniformità di composizione della miscela (diffusione pura). Denominiamo: ρ_i ed n_i le densità di massa e di moli dei costituenti; $\rho = \Sigma \rho_i$ ed $n = \Sigma n_i$ le densità di massa e di moli della miscela; $\rho_{i0} = \rho_i/\rho$ ed $n_{i0} = n_i/n$ le frazioni di massa e di moli dei costituenti. Per definizione si ha:

$$(6) \quad \Sigma \rho_{i0} = \Sigma n_{i0} = 1.$$

A differenza di quanto avviene in un gas omogeneo:

il peso molecolare m non è costante ma dipende dalla composizione della miscela:

$$(7) \quad m = \Sigma n_{i0} m_i \quad 1/m = \Sigma \rho_{i0}/m_i$$

l'entalpia h dell'unità di massa non dipende soltanto dalla temperatura ma anche dalla composizione della miscela:

$$(8) \quad h = \sum \rho_{i0} h_i$$

le entalpie h_i dei costituenti comprendono le energie chimiche (o di formazione); perciò h è entalpia totale: chimica e termica;

il calore specifico c_p dell'unità di massa non dipende soltanto dalla temperatura T ma anche dalla composizione della miscela:

$$(9) \quad c_p = (\partial h / \partial T)_{\rho_{i0}} = \sum \rho_{i0} dh_i / dT = \sum \rho_{i0} c_{p_i}.$$

2. Scriviamo i bilanci di massa dei costituenti ⁽¹⁾:

$$(10) \quad \rho \frac{d\rho_{i0}}{dt} + \nabla (\rho_i \mathbf{V}_i) = C_i$$

e, nell'ambito delle limitazioni (5), l'equazione dell'energia totale,

$$(11) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \nabla (\mathbf{q} + \sum \rho_i h_i \mathbf{V}_i + \boldsymbol{\Psi}) = 0:$$

$\mathbf{v} = \sum \rho_{i0} \mathbf{v}_i$ è la velocità baricentrica della miscela; \mathbf{v}_i sono le velocità dei costituenti; d/dt è la derivata sostanziale baricentrica; C_i sono le produzioni chimiche di massa ($\sum C_i = 0$); $\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}$ sono le velocità di diffusione; \mathbf{q} è la corrente di calore; $\boldsymbol{\Psi}$ è la corrente di energia degli sforzi viscosi.

Caratteristica delle miscele è la corrente diffusiva di energia $\sum \rho_i h_i \mathbf{V}_i$, nulla per gas omogenei.

Le equazioni di continuità globale e del moto sono identiche a quelle valide per gas omogenei, se si assume la velocità baricentrica come velocità della miscela.

Le velocità di diffusione \mathbf{V}_i sono determinate dal seguente sistema:

$$(12) \quad \sum_i \rho_{i0} \mathbf{V}_i = 0$$

$$(13) \quad \sum_j \frac{n_{i0} n_{j0}}{\mathfrak{D}_{ij}} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) = \nabla n_{i0}.$$

La (12) deriva dalle definizioni di velocità baricentrica e di velocità di diffusione; la (13) particularizza l'espressione generale [3] delle velocità \mathbf{V}_i nell'ambito delle (1, 5) che escludono termodiffusione, pressodiffusione e diffusione forzata.

Per definizione le frazioni di massa e di moli sono legate dalla relazione:

$$(14) \quad n_{i0} = \rho_{i0} m / m_i.$$

Derivando logaritmicamente e dividendo per m :

$$(15) \quad \frac{\nabla n_{i0}}{m n_{i0}} = \frac{\nabla \rho_{i0}}{m \rho_{i0}} - \nabla \left(\frac{1}{m} \right)$$

(1) Utilizziamo l'operatore ∇ come gradiente se applicato a uno scalare e come divergenza se applicato a un vettore.

otteniamo, con la (7):

$$(16) \quad \frac{\nabla n_{i0}}{mn_{i0}} = \sum_j \frac{\rho_{j0}}{m_j} \left(\frac{\nabla \rho_{i0}}{\rho_{i0}} - \frac{\nabla \rho_{j0}}{\rho_{j0}} \right).$$

Possiamo quindi scrivere la (13) nella forma equivalente:

$$(17) \quad \sum_j \frac{\rho_{j0}}{m_j} \left[\left(\frac{\mathbf{V}_i}{\mathfrak{D}_{ij}} + \frac{\nabla \rho_{i0}}{\rho_{i0}} \right) - \left(\frac{\mathbf{V}_j}{\mathfrak{D}_{ij}} + \frac{\nabla \rho_{j0}}{\rho_{j0}} \right) \right] = 0.$$

Ora l'ipotesi (2) permette di risolvere esplicitamente il sistema (12, 17):

$$(18) \quad \mathbf{V}_i = -D \frac{\nabla \rho_{i0}}{\rho_{i0}}$$

La (10) assume così la semplice forma:

$$(19) \quad \rho \frac{d\rho_{i0}}{dt} = \nabla (\rho D \nabla \rho_{i0}) + C_i.$$

Il trasporto di massa i -esima è ridotto a un fenomeno di *opposizione ai gradienti di frazione di massa del solo costituente i -esimo*.

I risultati (18, 19) sono esatti per miscele binarie che soltanto soddisfino all'ipotesi (1); l'estensione alle miscele multiple è resa possibile dall'ipotesi (2).

Utilizziamo le (18) per esplicitare, con le (8, 9), l'espressione della corrente diffusiva di energia:

$$(20) \quad \begin{aligned} \Sigma \rho_i h_i \mathbf{V}_i &= -\rho D \Sigma h_i \nabla \rho_{i0} = -\rho D [\nabla \Sigma \rho_{i0} h_i - \Sigma \rho_{i0} \nabla h_i] = \\ &= -\rho D \left[\nabla h - \Sigma \rho_{i0} \frac{dh_i}{dT} \nabla T \right] = -\rho D [\nabla h - c_p \nabla T]. \end{aligned}$$

Nell'ambito dell'ipotesi (1), che esclude il termoeffetto, la corrente di calore vale, come per un gas omogeneo:

$$(21) \quad \mathbf{q} = -\lambda \nabla T$$

e perciò calcoliamo, con le (20, 21):

$$(22) \quad \mathbf{q} + \Sigma \rho_i h_i \mathbf{V}_i = -\rho D \nabla h - (\lambda - c_p \rho D) \nabla T.$$

Ora l'ipotesi (3) permette di porre:

$$(23) \quad \mathbf{q} + \Sigma \rho_i h_i \mathbf{V}_i = -\frac{\lambda}{c_p} \nabla h = -\rho D \nabla h.$$

La (13) assume così la semplice forma:

$$(24) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = \nabla \left(\frac{\lambda}{c_p} \nabla h - \Psi \right) = \nabla (\rho D \nabla h - \Psi).$$

Il trasporto conduttivo e diffusivo di energia è ridotto a un fenomeno di *opposizione ai soli gradienti di entalpia totale*.

L'equazione (24) è identica a quella valida per gas omogenei con calore specifico variabile; l'estensione alle miscele è resa possibile dalle ipotesi (1, 2, 3).

L'ipotesi (4) concerne il coefficiente di viscosità. Dato il carattere tensoriale degli sforzi viscosi, sono possibili notevoli semplificazioni soltanto nell'ambito della teoria dello strato limite.

Detta u la componente della velocità baricentrica parallela alla superficie lambita ed y la coordinata normale alla superficie stessa, l'equazione (24) diventa:

$$(25) \quad \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} + \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

essendo identiche le espressioni della corrente Ψ per miscele e per gas omogenei.

È conveniente mettere in evidenza l'energia totale (termica, chimica e cinetica):

$$(26) \quad H = h(T, \rho_{i0}) + u^2/2$$

per ottenere la seguente formulazione della (25):

$$(27) \quad \rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial H}{\partial y} + \left(\frac{\lambda}{c_p} - \mu \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right].$$

Ora con l'ipotesi (4) la (27) assume la semplice forma:

$$(28) \quad \rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial H}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D \frac{\partial H}{\partial y} \right].$$

Il trasporto conduttivo, diffusivo e viscoso di energia è ridotto a un fenomeno di *opposizione ai soli gradienti normali di energia totale*.

L'equazione (28) è identica a quella valida per gas omogenei con calore specifico variabile, che soltanto soddisfa alla (4); l'estensione alle miscele è resa possibile dalle ulteriori ipotesi (1, 2, 3).

3. Illustriamo ora due notevoli proprietà del modello di miscela descritto.

Per fenomeni a bassa velocità l'equazione (24) si semplifica nella forma:

$$(29) \quad \rho \frac{dh}{dt} = \nabla (\rho D \nabla h)$$

che ammette l'integrale primo dell'entalpia totale (chimica e termica):

$$(30) \quad h = h(T, \rho_{i0}) = \text{costante}.$$

La (30) vale indipendentemente dalla permanenza del moto, dall'uni-, bi-, tri-dimensionalità del campo e dal valore del coefficiente di trasporto D ; ed è integrale generale della (29) se compatibile con le condizioni al contorno.

Tipici di questa classe sono molti fenomeni di combustione ed, in particolare, la propagazione della fiamma.

Vastissima è la letteratura teorica in materia e comprende studi in cui si trascura la diffusione (teorie termiche) e studi più completi in cui si tien conto della diffusione (teorie diffusive).

Osserviamo anzitutto che l'integrale primo (30) deriva dalla forma (22) della corrente di energia; perciò le teorie termiche, che trascurano la diffusione e perciò il termine $\sum \rho_i h_i \mathbf{V}_i$, non possono stabilire l'integrale primo dell'entalpia totale.

L'integrale primo (30) connette la temperatura con la composizione della miscela; esclude perciò l'esistenza di una *zona di preriscaldamento* in cui la temperatura potrebbe variare senza variazioni di composizione. La questione è di notevole importanza ed è discussa nelle opere [4], [5].

Per fenomeni di strato limite l'equazione dell'energia ha la forma (28) che ammette l'integrale primo dell'energia totale (chimica, termica e cinetica):

$$(31) \quad H = h(T, \rho_{i0}) + u^2/2 = \text{costante}.$$

La (31) vale indipendentemente dalla permanenza e dal valore del coefficiente di trasporto D ; ed è integrale generale della (28) se compatibile con le condizioni al contorno. La (31) generalizza per miscele multiple con reazioni chimiche, il classico integrale primo dell'energia [6] valido per gas omogeneo che lambisce ad alta velocità una superficie fissa e adiabatica.

4. Esaminiamo ora le ipotesi adottate in altri studi sulle miscele di gas. Abbiamo già osservato che la (2) costituisce un'ipotesi soltanto per miscele almeno ternarie; conviene perciò distinguere gli studi su miscele con $N = 2$, da quelli su miscele con $N > 2$.

Miscele con $N = 2$:

a) nella già citata opera [4] D. B. Spalding studia fenomeni a bassa velocità, di evaporazione e di combustione; utilizza sistematicamente le ipotesi (1, 3, 4) ed ammette inoltre che siano costanti ed uguali i calori specifici dei costituenti;

b) nel lavoro [7] l'A. studia il raffreddamento evaporativo ad alta velocità; utilizza le ipotesi (1, 3, 4) ed ammette inoltre che siano costanti, ma non uguali, i calori specifici dei costituenti;

c) nel lavoro [8] T. v. Kármán e S. S. Penner studiano, fra l'altro, la propagazione della fiamma di decomposizione dell'idrazina; utilizzano le ipotesi (1, 3) ed ammettono inoltre che siano costanti ed uguali i calori specifici dei costituenti (NH_2 ed N_2H_4); deducono, con tale approssimazione, l'integrale primo dell'entalpia totale (30);

d) nel lavoro [9] F. E. Marble e T. C. Adamson studiano la combustione alla confluenza di due getti piani; utilizzano le ipotesi (1, 4) ed ammettono inoltre che siano costanti ed uguali i calori specifici dei costituenti.

Miscele con $N > 2$:

e) nel lavoro [10] J. O. Hirschfelder e C. F. Curtiss impostano il problema della propagazione unidimensionale della fiamma (teoria diffusiva); utilizzano l'ipotesi (1), giudicano troppo complicata l'espressione (13) delle

velocità di diffusione ed introducono un'approssimazione differente dalla (2) e meno semplificatrice; non deducono infatti l'integrale primo dell'entalpia totale (30);

f) le stesse considerazioni valgono per il citato lavoro [8] a proposito dello studio della propagazione della fiamma di decomposizione dell'ozono; vi si ammette inoltre che siano costanti ed uguali i calori specifici dei costituenti (O , O_2 , O_3).

In conclusione, nello studio di problemi relativi a miscele di gas:

si ammette sempre l'ipotesi (1);

si riconosce la necessità di semplificare le velocità di diffusione per miscele con $N > 2$; tale necessità è qui risolta con la semplice ipotesi (2);

si ammettono spesso le ipotesi (3, 4);

si ammettono spesso ipotesi ingiustificate sui calori specifici, qui non accettate; alludiamo soprattutto all'assunzione che siano uguali tutti i calori specifici, per unità di massa, dei costituenti.

5. La termodinamica dei processi irreversibili [11], [12], [13] consente una notevole interpretazione delle prime tre ipotesi (1, 2, 3) relative ai soli fenomeni vettoriali, cioè al trasporto di calore ed al trasporto di massa.

La produzione irreversibile di entropia per unità di volume e nell'unità di tempo è misurata dalla sorgente di entropia σ . Il contributo dato alla sorgente di entropia dai suddetti fenomeni vettoriali, e nell'ambito delle limitazioni (5), può essere scritto nella forma:

$$(32) \quad \frac{\sigma}{nR} = - \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \mathbf{V}_0 \cdot \frac{\nabla T}{T} + \sum \mathbf{V}_i \cdot \nabla n_{i0} \right]$$

in cui R è la costante molare dei gas, γ è il rapporto dei calori specifici della miscela, \mathbf{V}_0 è la velocità di diffusione del calore:

$$(33) \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{q}/c_p \rho T.$$

Il secondo membro della (32) è l'inverso di un tempo caratteristico dell'irreversibilità.

Coerentemente con la teoria cinetica di prima approssimazione, la termodinamica dei processi irreversibili esprime ciascuna *velocità* \mathbf{V}_0 , \mathbf{V}_i , come combinazione lineare di tutti i vettori $\nabla T/T$, ∇n_{i0} , detti *affinità*:

$$(34) \quad \begin{cases} \mathbf{V}_0 = \varphi_{00} \nabla T/T + \varphi_{0j} \nabla n_{j0} \\ \mathbf{V}_i = \varphi_{i0} \nabla T/T + \varphi_{ij} \nabla n_{j0}. \end{cases}$$

Abbiamo ommesso le sommatorie rispetto a $j = 1, 2, \dots, N$.

Il teorema di Onsager dimostra che la matrice dei coefficienti fenomenologici φ è simmetrica:

$$(35) \quad \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha} \quad (\alpha \text{ e } \beta = 0, 1, 2, \dots, N).$$

Osserviamo ora che la (16) permette di esprimere ciascun ∇n_{i0} come combinazione lineare di tutti i $\nabla \rho_{j0}$. Il sistema (34) può quindi essere scritto nella forma equivalente:

$$(36) \quad \mathbf{V}_i = \psi_{ij} \nabla \rho_{j0} / \rho_{j0} \quad (i \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, N)$$

in cui abbiamo introdotto la convenzione:

$$(37) \quad \rho_{00} = T.$$

In generale, a differenza della matrice φ_{ij} di Onsager, la matrice modificata ψ_{ij} non risulterà simmetrica.

I risultati dedotti dal sistema di ipotesi (1, 2, 3) possono essere compendati nella forma:

$$(38) \quad \mathbf{V}_i = -D \nabla \rho_{i0} / \rho_{i0}.$$

Per $i = 1, 2, \dots, N$, la (38) coincide con la (18); per $i = 0$ la (38) coincide con la (21) in virtù delle convenzioni (33, 37) e dell'ipotesi (3). Confrontando le (36, 38) concludiamo: il sistema di ipotesi (1, 2, 3) non soltanto simmetrizza, ma *diagonalizza* la matrice dei coefficienti ψ nella forma:

$$(39) \quad \psi_{ij} = -D \delta_{ij}$$

essendo δ_{ij} il simbolo di Kronecker.

La termodinamica dei processi irreversibili postula la validità *locale* del Secondo Principio, affermando che è positiva in ogni punto la sorgente di entropia.

Con la (38), dedotta dalle ipotesi (1, 2, 3), la (32) diventa:

$$(40) \quad \frac{\sigma}{nR} = D \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \sum \frac{\nabla \rho_{i0} \cdot \nabla n_{i0}}{\rho_{i0}} \right].$$

Risulta immediatamente che è sufficiente la condizione:

$$(41) \quad D > 0$$

per rendere positivo il contributo della conduzione, essendo direttamente opposti i vettori velocità \mathbf{V}_0 ed affinità $\nabla T/T$.

Per il contributo della diffusione osserviamo che i vettori velocità \mathbf{V}_i non sono direttamente opposti alle affinità ∇n_{i0} , bensì ai vettori $\nabla \rho_{i0}$.

Moltiplicando ambo i membri della (15) per $m \nabla n_{i0}$ e sommando, otteniamo, per la (6):

$$(42) \quad \sum \frac{(\nabla n_{i0})^2}{n_{i0}} = \sum \frac{\nabla \rho_{i0} \cdot \nabla n_{i0}}{\rho_{i0}}.$$

Alla sorgente di entropia (40) conviene quindi dare la forma più espressiva:

$$(43) \quad \frac{\sigma}{nR} = D \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{\nabla T}{T} \right)^2 + \sum \frac{(\nabla n_{i0})^2}{n_{i0}} \right]$$

dalla quale appare chiaramente che la condizione (41) è sufficiente a rendere positivo anche il contributo della diffusione. Le ipotesi introdotte, con la sola condizione qualitativa (41), sono perciò coerenti con il Secondo Principio della Termodinamica e semplificano notevolmente anche l'espressione della sorgente di entropia.

Tralasciamo le considerazioni entropiche sulla viscosità, identiche a quelle valide per gas omogenei. Concludiamo osservando che:

nelle equazioni indefinite (19, 24) è privilegiato il ruolo delle *frazioni di massa* e dell'*entalpia*;

nella sorgente di entropia (43) è invece privilegiato il ruolo delle *frazioni di moli* e della *temperatura*.

6. Abbiamo illustrato, discusso ed interpretato le notevoli semplificazioni consentite dall'impiego del modello di miscela multipla di gas che soddisfa al solo sistema di ipotesi (1, 2, 3, 4).

Per qualsiasi miscela multipla tali ipotesi hanno ridotto gli originali $1 + N(N + 1)/2$ coefficienti di trasporto, all'unico coefficiente D . Non si è mai dovuta esplicitare l'espressione del coefficiente D ; quindi le equazioni impostate valgono sia per regime laminare che per regime turbolento, soltanto con differenti valori e significati del coefficiente D : molti fenomeni particolari in fluidi omogenei ed in miscele binarie, inducono a prevedere che, ancor più che al regime laminare, il modello di miscela illustrato sia adeguato al regime turbolento.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. CHAPMAN e T. G. COWLING, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge, Univ. Press, ed. 1953.
- [2] J. O. HIRSCHFELDER e collaboratori: Sez. B, cap. 5 e Sez. D su: *Thermodynamics and Physics of Matter*, Princeton, Univ. Press, 1955.
- [3] C. F. CURTISS e J. O. HIRSCHFELDER, *Transport Properties of Multicomponent Gas Mixtures*, « J. Chem. Phys. », vol. 17, p. 550, 1949.
- [4] D. B. SPALDING, *Some Fundamentals of Combustion*, London, Butterw. Sc. Publ., 1955.
- [5] B. LEWIS e G. v. ELBE, *Combustion, Flames and Explosions of Gases*, New York, Acad. Press, 1951.
- [6] A. BUSEMANN, p. 366 su: « Handbuch Exper. Physik », IV, 1, 1931.
- [7] G. JARRE, *Il raffreddamento evaporativo ad alta velocità*, Congr. AIDA, Bari, 1955, in pubbl. su « L'Aerotecnica ».
- [8] T. v. KÁRMÁN e S. S. PENNER, *Fundamental Approach to Laminar Flame Propagation*; Selected Combustion Problems, AGARD, London, Butterw. Sc. Publ., 1954.
- [9] F. E. MARBLE e T. C. ADAMSON, *Ignition and Combustion in a Laminar Mixing Zone*; Selected Combustion Problems, v. [8].
- [10] J. O. HIRSCHFELDER e C. F. CURTISS, *The Theory of Flame Propagation*, « J. Chem. Phys. », vol. 17, p. 1076, 1949.
- [11] S. R. DE GROOT, *Thermodynamics of Irreversible Processes*, Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., 1951.
- [12] C. F. CURTISS, Sez. J su: *Thermodynamics and Physics of Matter*, v. [2].
- [13] G. JARRE, *Elementi di gascinetica delle miscele*, « L'Aerotecnica », vol. XXXV, nn. 3 e 4, 1955.

Astronomia. — *Il sistema binario 20 Draconis (A.D.S. 10279).*

Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Oggetto della presente Nota è la ricerca dell'orbita del satellite visuale del sistema binario spettroscopico ⁽¹⁾ 20 Draconis (A. D. S. 10279; $\alpha = 16^h 56^m,2$; $\delta = 65^\circ 07'$; eq. 1950), per il quale fino ad ora nessuna orbita è stata calcolata.

Notiamo in proposito che la prima osservazione di posizione del satellite, eseguita nel 1783 da W. Herschel, è isolata; ma, dal 1830 ad oggi, le misure prese da diversi astronomi si susseguono con continuità, specie negli ultimi anni. Un primo esame dell'insieme di queste misure, mette subito in luce il fatto che l'angolo di posizione ϑ dal 1783 al 1855 è variato di poco più di 10° ; mentre dal 1855 al 1915 subisce una variazione di 160° , finché dal 1915 ad oggi si mantiene quasi costante. Invece il raggio vettore ρ , durante lo stesso periodo di tempo, diminuisce fino all'anno 1890 e dopo cresce gradatamente, onde le posizioni osservate si distribuiscono lungo un arco molto esteso, ma di debole concavità; tale però da mostrare indubbiamente, secondo le mie ricerche, la dipendenza del satellite dalla stella principale ed escludere l'ipotesi che si tratti di una doppia ottica, o pseudobinaria. La debole concavità dipende quindi dal fatto che il piano dell'orbita, descritta dal satellite, risulta quasi normale (come meglio vedremo in seguito) al piano tangente alla sfera celeste.

2. Per il calcolo dell'orbita ho usato tutte le osservazioni contenute nei Cataloghi del Burhnam e dell'Aitken; mentre le più recenti dal 1925 ad oggi — in parte ancora inedite — mi sono state fornite dal prof. P. Muller dell'Osservatorio astronomico di Strasburgo. Esse sono riportate nella Tabella I.

Ad ogni angolo ho apportato la correzione

$$\Delta\vartheta = -0^\circ,01270 (1950 - t),$$

onde ridurlo all'equinozio del 1950, e quindi ho rappresentato ciascuna posizione del satellite con un punto, assumendo come scala del disegno $1'' = 100$ mm. Ho così trovato (cfr. Fig. 1) che l'ellisse apparente, che meglio approssima le osservazioni, ha per equazione

$$(1) \quad 0,00427 x^2 - 0,00383 xy + 0,00095 y^2 - 0,04422 x + 0,01229 y = 1.$$

(*) Nella seduta del 14 aprile 1956.

(1) Cfr. R. E. WILSON, *General catalogue of Stellar Radial Velocities*, Papers of M. Wilson, vol. VIII (1953).

Col metodo analitico di Kowalsky, ho in tal modo trovato per gli elementi dell'orbita preliminare del satellite i seguenti valori:

$$(2) \quad \Omega = 66^{\circ},2 \quad ; \quad i = \pm 97^{\circ},0 \quad ; \quad \omega = 220^{\circ},3 \quad ; \quad e = 0,466 \quad ; \quad a = 1'',38;$$

essendo notoriamente Ω la posizione del nodo, i l'inclinazione del piano dell'orbita su quello tangente alla sfera celeste, ω la posizione del periastro, e l'eccentricità ed a il semiasse maggiore dell'orbita.

TABELLA I.

Osservazioni non contenute nei cataloghi del Burnham e dell'Aitken.

t	ϑ	ρ	n	Autore	t	ϑ	ρ	n	Autore
1927,38	74°,9	0'',70	4	Rabe	1942,53	77°,5	0'',90	1	De Vaucouleurs
28,57	76 ,5	,72	3	Fatou	42,59	72 ,7	,80	8	Rabe
30,49	78 ,1	,73	1	Kuiper	42,61	74 ,1	,77	5	Duruy
31,67	73 ,7	,73	3	Bonnet	43,58	72 ,9	,80	10	Rabe
31,69	75 ,2	,58	5	Simonov	45,15	73 ,2	,82	4	V. Biesbroeck.
32,70	75 ,3	,76	4	Simonov	45,68	72 ,0	,93	4	Baize
34,51	73 ,2	,77	5	Rabe	45,71	70 ,9	,74	4	Rabe
35,17	75 ,8	,80	4	Baize	46,51	72 ,7	,91	4	Muller
36,55	73 ,3	,69	6	Rabe	46,63	70 ,7	,75	7	Rabe
36,73	256 ,7	,92	3	Duruy	49,59	71 ,2	,84	10	Rabe
37,49	74 ,5	,77	3	Danjon	50,54	71 ,6	,86	9	Rabe
37,57	74 ,4	,74	4	Duruy	50,55	74 ,4	,99	2	Pretre
37,62	73 ,4	,73	7	Rabe	50,57	70 ,8	,95	3	Muller
38,60	72 ,7	,72	7	Rabe	51,56	71 ,1	,89	9	Rabe
39,59	75 ,5	,82	4	Duruy	52,77	73 ,6	,98	2	Fr. Baize
39,60	72 ,4	,73	9	Rabe	52,78	73 ,0	1 ,02	4	Baize
40,64	71 ,4	,88	4	Baize	52,99	70 ,1	0 ,95	4	Muller
40,79	72 ,8	,88	5	Rougier	53,44	72 ,2	0 ,92	3	Djurkovic
41,40	74 ,6	,84	5	Korbut	53,62	72 ,4	0 ,94	2	Wilson
41,57	72 ,6	,81	7	Rabe	55,61	72 ,3	1 ,03	3	Muller
					55,77	71 ,2	1 ,04	4	Baize

TABELLA II.

Scarti tra posizioni osservate e posizioni calcolate.

t	$(O - C)_\oplus$	$(O - C)_e$	t	$(O - C)_\oplus$	$(O - C)_e$	t	$(O - C)_\oplus$	$(O - C)_e$
1783,26	— 3°,6	—	1901,52	+ 1°,0	+ 0'',03	1938,60	— 0°,7	— 0'',08
1830,32	— 4 ,2	— 0'',14	01,62	+ 3 ,1	— ,10	39,59	+ 2 ,3	+ ,01
31,37	— 0 ,7	— ,04	03,42	— 0 ,6	— ,14	39,60	— 0 ,8	— ,08
32,30	— 0 ,2	+ ,09	03,52	+ 0 ,4	— ,04	40,64	— 1 ,6	+ ,05
34,57	+ 5 ,7	—	05,57	+ 3 ,1	+ ,05	40,79	— 0 ,2	+ ,05
36,75	+ 1 ,2	— ,02	05,89	— 1 ,6	+ ,07	41,40	+ 1 ,7	,00
40,77	— 2 ,0	—	07,57	+ 3 ,9	— ,04	41,57	— 0 ,3	— ,03
41,24	+ 0 ,5	+ ,07	08,53	+ 2 ,7	+ ,04	42,53	+ 4 ,8	+ ,05
43,32	+ 4 ,2	+ ,13	10,00	+ 2 ,2	+ ,03	42,59	0 ,0	— ,05
47,71	0 ,0	—	12,36	0 ,0	— ,04	42,61	+ 1 ,4	— ,08
47,97	+ 1 ,4	+ ,02	15,60	+ 2 ,7	+ ,03	43,58	+ 0 ,3	— ,07
54,81	+ 0 ,6	+ ,06	18,20	+ 0 ,2	— ,01	45,15	+ 0 ,9	— ,07
57,35	0 ,0	— ,14	22,25	+ 2 ,0	+ ,01	45,68	— 0 ,2	— ,04
59,67	— 3 ,1	+ ,11	23,67	— 10,5	— ,19	45,71	— 1 ,3	— ,15
72,42	+ 8 ,0	— ,02	25,62	+ 0 ,9	+ ,03	46,51	+ 0 ,6	+ ,01
74,73	— 2 ,8	—	27,38	— 0 ,8	+ ,06	46,63	— 1 ,4	— ,15
77,13	+ 6 ,9	+ ,06	28,57	+ 1 ,1	+ ,06	49,59	— 0 ,5	— ,10
80,82	— 1 ,1	+ ,03	30,49	+ 3 ,1	+ ,04	50,54	0 ,0	— ,09
89,45	— 9 ,4	+ ,01	31,67	— 1 ,0	+ ,03	50,55	+ 2 ,8	+ ,04
91,33	— 7 ,6	,00	31,69	+ 0 ,5	— ,12	50,57	— 0 ,8	,00
92,39	— 7 ,2	,00	32,70	+ 0 ,8	+ ,04	51,56	— 0 ,4	— ,07
97,34	—	,00	34,51	— 0 ,9	+ ,03	52,77	+ 2 ,2	,00
97,55	— 3 ,2	+ ,07	35,17	+ 1 ,8	+ ,05	52,78	+ 1 ,6	+ ,04
99,53	—	— ,04	36,55	— 0 ,4	— ,08	52,99	— 1 ,2	— ,03
99,57	— 1 ,6	+ ,04	36,73	—	+ ,15	53,44	+ 0 ,9	— ,07
000,73	— 0 ,7	— ,07	37,49	+ 0 ,9	— ,01	53,62	+ 1 ,2	— ,05
01,46	— 5 ,4	— ,01	37,57	+ 0 ,9	— ,05	55,61	+ 1 ,3	+ ,02
			37,62	— 0 ,1	— ,06	55,77	+ 0 ,2	+ ,03

Come avevo previsto, l'inclinazione è molto prossima a 90° (ed anzi maggiore di 90° essendo il moto retrogrado), onde il piano dell'orbita è visto da noi quasi di profilo.

Per determinare gli elementi temporali, ho calcolato a partire dagli angoli ϑ , e con gli elementi orbitali (2), le anomalie medie M , che corrispondono a ciascun tempo. Poiché i valori di M sono funzioni lineari del tempo, ho considerato la retta che li approssima e da questa ho ricavato i dati per determinare il moto medio n ed il tempo del passaggio al periastro τ . Ho ottenuto

$$(3) \quad n = 0^\circ,49359 \quad , \quad \tau = 1853,50 ,$$

onde si deduce per la durata del periodo P espresso in anni

$$P = \frac{360^\circ}{n} = 729,35.$$

3. Con le formule del moto ellittico, ho calcolato gli angoli ϑ ed i raggi vettori ρ , valendomi degli elementi (2) e (3), e li ho paragonati con quelli osservati ed ho riportato nella Tabella II gli scarti $O - C$ fra posizioni osservate e quelle calcolate.

Come si vede, l'ellisse da me trovata approssima molto bene le osservazioni esistenti; specialmente quelle degli ultimi anni, che sono certamente le migliori.

TABELLA III.

Effemeridi.

t	ϑ	ρ	t	ϑ	ρ	t	ϑ	ρ
1956,0	$71^\circ,05$	$1'',02$	1964,0	$70^\circ,33$	$1'',11$	1972,0	$69^\circ,71$	$1'',19$
58,0	$70^\circ,85$	$1,04$	66,0	$70^\circ,16$	$1,13$	74,0	$69^\circ,57$	$1,21$
60,0	$70^\circ,67$	$1,06$	68,0	$70^\circ,00$	$1,15$	76,0	$69^\circ,43$	$1,23$
62,0	$70^\circ,50$	$1,08$	70,0	$69^\circ,85$	$1,17$	78,0	$69^\circ,30$	$1,25$
						80,0	$69^\circ,17$	$1,27$

Ho poi calcolato le effemeridi per gli anni seguenti fino al 1980 e le ho riportate nella Tabella III.

Da essa risulta che l'angolo di posizione ϑ diminuirà con estrema lentezza, mentre il raggio vettore ρ sarà ancora crescente.

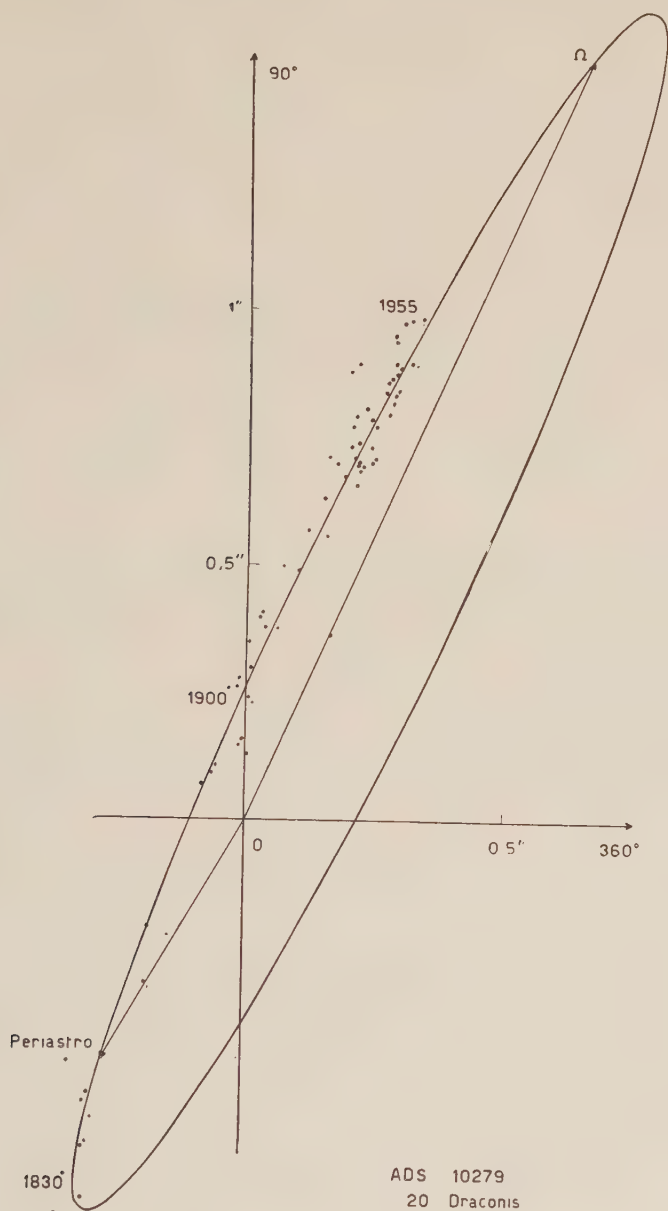


Fig. 1.

4. Ho poi determinato la parallasse dinamica π'' del sistema, usando il metodo di Russell e Moore ⁽²⁾, basato su una combinazione della legge fondamentale della teoria delle orbite con la relazione massa-luminosità.

Ora per la 20 Draconis, abbiamo i seguenti dati:

a) grandezza visuale apparente, secondo la Harvard Photometry:
 $m = 6,44$;

(2) Cfr. RUSSELL and MOORE, *The Masses of the Stars*, Chicago 1940.

b) differenza di grandezza, fra le due componenti visuali, secondo A.D.S.: $\Delta m = 0,50$;

c) tipo spettrale, secondo la classificazione di Mount Wilson: F o.

Con questi dati, tenendo presente che la stella principale è binaria spettroscopica, e ricordando che il periodo di rivoluzione è di 729 anni ed il semiasse maggiore dell'orbita è uguale ad $1'',38$, ho trovato per la parallasse dinamica il valore

$$\pi'' = 0'',009.$$

Ne segue che il semiasse maggiore ha una lunghezza di 153 unità astronomiche e la somma delle masse del sistema è 6,7 volte la massa del Sole.

Infine ho trovato per i tempi del passaggio e le velocità radiali ai nodi

$$t_1 = 1825,75 \quad ; \quad v_1 = \mp 9,55 \text{ (km/sec);}$$

$$t_2 = 2043,39 \quad ; \quad v_2 = \pm 4,54 \text{ (km/sec).}$$

Astronomia (Astrofisica solare). — *Variazione, dal centro al lembo del Sole, del profilo della linea spettrale $\lambda = 4227$ del CaI.* Nota I di TERESA FORTINI e GIUSEPPE CAPRIOLI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Nel 1949-50, durante un suo viaggio in America, il prof. M. Cimino lavorando alla Torre Solare di 50 m di M. Wilson ebbe l'opportunità di raccogliere un abbondante materiale spettroscopico per lo studio della variazione centro-lembo del profilo di alcune righe solari di particolare interesse e precisamente del tripletto infrarosso del CaII, del doppietto D del Na, del tripletto verde del Mg e della 4227,6 del CaI. Ora il prof. Cimino stesso, ha già ridotto parte delle lastre relative al tripletto del CaII nell'infrarosso ed i risultati di questa sua ricerca sono apparsi su questi « Rendiconti » in diverse Note⁽¹⁾, nelle quali sono ampiamente descritte le caratteristiche dell'apparato strumentale e i criteri adottati durante la raccolta delle osservazioni. Poiché nella presente Nota ci occupiamo della riduzione delle lastre che riguardano la 4227,6 del CaI, rimandiamo per qualsiasi informazione di carattere generale alle Note del Cimino e ci limitiamo a ripetere solo succintamente le caratteristiche e le notizie che interessano le lastre della riga in questione.

2. MATERIALE DI OSSERVAZIONE. — Come si è detto⁽²⁾ gli spettri della 4227,6 sono stati fotografati dal prof. M. Cimino al II ordine del reticolo n. 66

(*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) Cfr. M. CIMINO, *Sulla variazione del profilo di alcune righe spettrali dal centro al lembo del Sole*, « Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei », Nota I, ser. VIII, vol. IX, fasc. 3-4, pp. 177-181 (1950); Nota II, ser. VIII, vol. XIII, fasc. 3-4, pp. 120-126 (1952); Nota III, ser. VIII, vol. XIV, fasc. 2, pp. 243-250 (1953); Nota IV, ser. VIII, vol. XIV, fasc. 4, pp. 500-505 (1953); Nota V, ser. VIII, vol. XV, fasc. 1-2, pp. 33-39 (1953).

(2) Cfr. M. CIMINO, loc. cit., Nota I.

di Michelson ⁽³⁾, della Torre solare di M. Wilson, con obbiettivo di 38 cm di diametro e 43 m di distanza focale. Lo spettrografo ad autocollimazione, in pozzo verticale, ha una focale di 23 m con apertura della camera $R = 1/340$; limite risolvete in questo ordine di $0,13 \text{ cm}^{-1}$ per 500 \AA . Sono state adoperate lastre K 33 anti-alo, sviluppate con rivelatore Eastmann D 19, per 5 minuti a 65° F . Le lastre impressionate sono due, ognuna con 8 spettri corrispondenti a diverse puntate, dal centro al lembo, lungo uno stesso raggio del disco solare; e precisamente per gli angoli di posizione ⁽⁴⁾: 0° ; 40° ; 50° ; 60° ; 70° ; 75° ; 80° . L'ottavo spettro è stato impresso sulla lastra con *fenditura radiale*, allo scopo di tentare di tracciare i profili in zone ancora più prossime al bordo; ma di esso non ci occuperemo. Sono stati impiegati quattro tempi di posa, variabili da 15 a 35 secondi per la prima lastra e da 25 secondi a 60 per la seconda. In tal modo, le due lastre possono riuscire, l'una migliore per le ali, l'altra per il centro; dato che per la grande profondità della riga non era possibile con una sola esposizione, di far cadere tutte le densità nel tratto corretto della curva di calibrazione. Inoltre, per ognuna di queste due lastre sono state impressionate altre due lastre con due calibrazioni ciascuna. Si hanno così in totale quattro calibrazioni per ogni serie degli otto spettrogrammi dal centro al lembo. Per la calibrazione è stata adottata una fenditura a gradini (*step-slit*), con nove aperture in rapporto geometrico; da un controllo eseguito dal prof. Cimino ⁽⁵⁾, è risultato che, nei limiti degli errori che è lecito di attendersi in questo genere di misure, i rapporti geometrici delle fenditure dello *step-slit* corrispondono ai rapporti delle effettive intensità trasmesse alla lastra fotografica.

TABELLA I.

Numero della lastra	Data 1950	Ora T. M. P.	Tempi di posa	Cielo	Definizione dell'immagine solare	Lembo	Note
31 a	16 II	8 ^h 10 ^m - 8 ^h 35 ^m	35 ^s 25 ^s 20 ^s 15 ^s	sereno	buona	assai calmo	(1)
39 a	18 II	7 55 - 8 15	60 45 30 25	assai limpido	ottima		

(1) Spettro n. 8 appena fuori dal centro per evitare zone perturbate.

(3) $6 \times 12,5 \text{ cm}^2$, con 600 tratti al mm e 75.000 righe in totale.

(4) Ricordando che per angolo di posizione di un determinato punto della superficie solare visibile, si intende l'angolo che la normale alla superficie solare in quel punto, forma con la visuale Terra-Sole.

(5) Cfr. M. CIMINO, lavoro già citato, Nota II, pp. 124, 125, 126.

Le date, i tempi di posa e le caratteristiche che si riferiscono alle due lastre in questione sono riportati nella Tabella I.

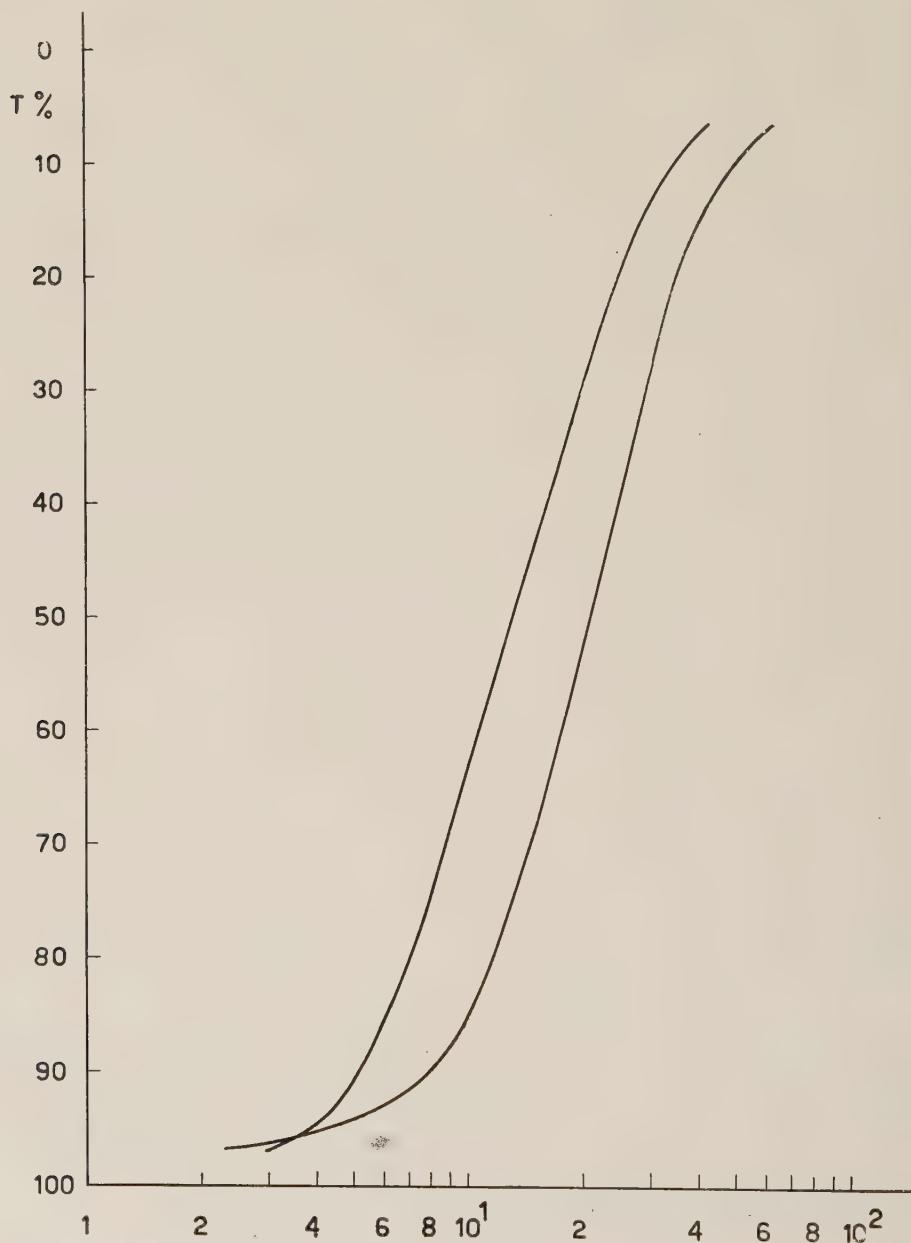


Fig. 1. - Curve di calibrazione delle lastre 31 a-39 a.

Per le quattro calibrazioni di ogni gruppo di spettrogrammi, si sono mantenuti gli stessi tempi di posa adottati per la fotografia degli spettri della lastra a cui si riferiscono.

3. RIDUZIONE. — Per ridurre gli spettrogrammi si è fatto uso del microfotometro tipo Moll della casa Kipp e Zonen, recentemente acquistato dall'Osservatorio di Roma e particolarmente adatto per registrazioni di spettro solari. Si è usato un rapporto $1/8$ per la riga $\lambda = 4227$ e rapporto $1/4$ per le calibrazioni, con larghezza e altezza della prima fenditura (proiettate sulla lastra) di 13μ e 39μ circa. Durante le registrazioni si è tenuta la velocità di trasmissione minima, con escursione tra fondo chiaro e fondo scuro di 8 cm circa.

Le curve di calibrazione sono state disegnate su scala logaritmica, riportando in ascissa i rapporti delle aperture dei diversi gradini dello « step-slit » alla apertura del I gradino, e in ordinata le trasmissioni fotografiche lette sulle registrazioni dei microfotogrammi. Le curve di calibrazione relative a ogni lastra sono state infine mediate, perché praticamente coincidenti. L'andamento delle curve adottate per la riduzione delle due lastre è disegnato nella fig. 1.

Per arrivare a registrare il continuo dello spettro da tutte e due le parti della riga considerata, si è abbracciata una zona spettrale larga complessivamente $9,79 \text{ \AA}$ circa; più precisamente ci si è spinti, a partire dal centro della riga, fino a una distanza di $5,76 \text{ \AA}$, verso il violetto e di $4,03 \text{ \AA}$ verso il rosso. Questa scelta del continuo, fatta empiricamente sul *Photometric Atlas* ⁽⁶⁾ di Minnaert, è stata ricontrollata dopo il passaggio dalle densità in intensità, secondo il metodo di Minnaert ⁽⁷⁾. Soltanto in pochi casi è stato necessario apportare al continuo una piccola correzione dell'ordine massimo del 5 %.

4. PROFILI. — Si è passati dalle densità in intensità (in percentuale del continuo) di numerosi punti dei profili registrati; e con questi punti si è cercato di disegnare i profili della riga per le diverse zone del disco solare, dal centro al lembo. Le intensità ottenute in base alle curve di calibrazione sono state poi corrette per i « fantasmi » del reticolo, secondo la formula approssimata ⁽⁸⁾:

$$(1) \quad i_c = (i_o - g) \frac{100}{100 - g}$$

essendo i_c l'intensità corretta ed i_o l'intensità osservata ed essendo in questo ordine del reticolo $g = 2,34 + 0,21 + 0,29 = 2,84$ secondo la determinazione eseguita per questo stesso strumento e reticolo dal Minnaert ⁽⁹⁾.

Le intensità così ottenute di numerosi punti del profilo, per le diverse puntate dal centro al lembo, sono riportate in Tabella II. I centri dei « blends », numerosissimi in questa regione, sono stati segnati con asterisco.

(6) Cfr. MINNAERT, HOUTGAST, MULDER, *Photometric Atlas of the solar spectrum*, Amsterdam, 1940.

(7) Cfr. M. MINNAERT, « Zs. f. Ap. », 10, 40 (1935).

(8) Cfr. A. UNSOLD, *Physik der Sternatmosphären*, S. 246.

(9) Cfr. *Phot. Atlas*, citato alla Nota ⁽⁶⁾.

TABELLA II.

Intensità osservate in percento del fondo continuo.

$\Delta\lambda \searrow \text{sen } \delta = r/R$		0,000	0,643	0,766	0,866	0,940	0,966	0,985
0,000	13,8	9,7	6,8	11,3	7,6	11,8	8,3
0,034	14,4	10,6	7,4	11,6	8,4	13,0	8,9
0,068	14,6	12,0	8,9	14,1	12,5	16,6	11,5
0,14 _v	19,1	17,2	12,9	21,8	23,9	22,8	24,9
0,14 _r	17,7	16,6	18,2	21,8	18,7	24,9	21,0
0,17 _v	20,2	19,7	16,6	24,9	26,9	26,9	29,0
0,17 _r	19,7	19,2	21,8	24,3	19,7	29,5	25,9
0,21 _v	21,2	21,2	23,9	27,5	28,5	31,3	36,1
0,21 _r	20,8	22,8	22,8	28,0	21,8	32,1	32,1
0,30 _r	28,0	25,4	24,9	28,0	25,4	32,6	35,2
[0,31 _v (*)	17,3	19,2	19,7	22,8	25,5	27,0	32,9]
0,34 _v	35,7	41,9	39,8	37,7	42,8	43,6	46,5
0,34 _r	33,6	29,3	28,6	24,8	26,7	37,2	42,4
0,38 _r	36,4	31,3	32,0	28,2	30,0	40,3	43,6
0,41 _v	35,2	36,2	35,2	26,4	33,1	30,5	36,2
0,41 _r	36,5	29,5	34,6	31,6	32,6	43,1	47,0
0,47 _v	46,2	39,3	43,1	39,3	38,9	45,5	43,4
0,51 _v	51,9	46,0	50,1	46,5	45,2	49,8	47,5
0,51 _r	46,0	40,3	42,2	40,7	44,7	48,3	53,7
[0,58 _r (*)	29,4	29,8	25,1	27,5	29,8	35,2	42,5]
0,59 _v	57,6	52,4	52,6	53,8	50,6	55,8	56,8
0,62 _v	61,6	55,8	55,8	54,8	52,7	57,0	59,4
0,68 _v	65,1	58,3	57,8	56,0	54,2	58,2	62,1
[0,70 _r (*)	13,8	14,6	8,4	18,3	18,7	20,6	19,5]
[0,78 _v (*)	26,7	29,0	27,6	30,1	31,2	27,1	43,4]
0,86 _r	60,0	54,2	55,8	49,3	53,7	57,3	58,9
0,19 _v	76,0	70,0	70,4	68,3	67,6	68,3	70,5
0,94 _r	66,2	60,3	62,5	58,9	59,0	63,1	69,2
[1,02 _v (*)	46,8	46,3	45,8	39,8	43,4	48,1	52,5]
[1,02 _r (*)	58,4	53,7	52,8	53,7	53,6	56,6	62,0]
1,10 _r	76,3	70,7	70,8	70,1	67,8	72,0	72,2
1,13 _v	75,1	71,4	72,2	70,6	69,5	72,6	72,2
[1,20 _r (*)	49,3	45,5	43,7	48,2	46,9	49,9	54,8]
[1,28 _v (*)	23,6	24,9	25,0	26,4	28,0	29,9	32,1]
1,37 _r	81,6	79,2	80,5	78,8	74,9	78,9	79,0]
1,71 _v	88,0	87,3	88,4	88,9	85,5	87,8	88,8
1,77 _r	94,0	90,4	90,5	91,6	89,8	90,3	91,3
2,41 _r	94,0	91,6	91,3	94,6	93,8	93,3	94,4

TABELLA III.

Confronto Fortini-Caprioli, Houtgast, Minnaert, per le intensità del profilo della λ 4227, 6 al centro del Sole (Intensità in percento del continuo).

	Fortini- Caprioli	Houtgast	Minnaert
0,51 _v	51,9	55,2	46,2
0,51 _r	46,0	45,4	34,8
[0,58 _r *	25,1	28,7	11,8]
0,59 _v	57,6	62,3	52,9
0,62 _v	61,6	63,6	53,2
0,68 _v	65,1	62,7	55,8
[0,70 _r *	13,8	17,7	8,1]
[0,78 _v *	26,7	31,2	18,8]
0,86 _r	60,0	65,8	53,0
0,91 _v	76,0	74,5	70,0
0,94 _r	66,2	71,4	59,1
[1,02 _v *	46,8	47,2	35,6]
[1,02 _r *	58,4	62,3	48,0]
1,10 _r	76,3	78,3	72,1
1,13 _v	75,1	78,5	72,0
[1,20 _r *	49,3	53,4	40,8]
[1,28 _v *	23,6	26,2	14,8]
1,37 _r	81,6	88,1	83,5
1,71 _v	88,0	92,5	89,2
1,77 _r	94,0	93,6	93,1
2,41 _r	94,0	97,0	95,3

A partire dal continuo, fino a una intensità dell'ordine del 30 % del continuo stesso, i valori tabellati sono la media dei risultati ottenuti in base a tutte e due le lastre (31 e 39); per intensità più deboli abbiamo riportato soltanto i valori dedotti in base alla lastra 39 *a*. Abbiamo seguito questo criterio perché, come si è detto, la lastra 31 *a* risulta necessariamente sottoesposta per la zona centrale della riga, onde i valori relativi a tale zona sono ricavati perciò, soltanto dalla lastra 39 *a* come più sicuri. Per l'angolo di posizione $\delta = 80^\circ$ i valori della tabella si riferiscono soltanto allo spettro della lastra 39 *a*; il

corrispondente spettro della lastra 31 α non è stato utilizzato perché sotto esposto.

Per renderci conto della qualità dei nostri risultati prima di passare alla discussione sulla variazione centro-lembo, abbiamo voluto confrontare il profilo *relativo al centro del Sole*, con quelli ottenuti da Houtgast⁽¹⁰⁾ e da Minnaert, per questa stessa riga. Tale confronto, eseguito fino a una distanza $\Delta\lambda = 0,51$ dal centro della riga (le zone centrali essendo necessariamente più incerte e dipendendo molto dalla tecnica usata) è riportato nella Tabella III. Risulta da questa tabella che i divari Minnaert-(Fortini-Caprioli), sono compresi nell'ordine del 5 %, che è il limite praticamente raggiungibile in questi lavori. Si osservi che i punti ove tale limite è superato (sebbene leggermente), sono quelli che corrispondono ai centri di alcune righe (ove, notoriamente, è prevalente l'influsso del profilo strumentale) e quelli a densità molto bassa, ove la curva di calibrazione è necessariamente meno sicura. In ogni modo, come si può notare dalla stessa Tabella III, il disaccordo è maggiore tra i risultati di Minnaert e quelli Houtgast, che non tra quelli di Minnaert e i nostri. Per quanto riguarda ogni deduzione che si può fare sul diverso comportamento centro-lembo dei profili della $\lambda = 4227$ rimandiamo a una prossima Nota. Notiamo però fin da ora, che in base ai nostri risultati, essendo tutte le intensità delle zone centrali affette da una certa indeterminazione a carattere strumentale, ogni considerazione relativa al comportamento dei centri delle righe va sempre fatta con le dovute cautele. Anche per le parti esterne delle ali si è riscontrata qualche difficoltà a causa dei « blends » presenti nella regione.

Fisica matematica. — *La elettrodinamica e la idrodinamica nella «teoria di relatività finale»*. Nota di GIUSEPPE ARCIDIACONO, presentata (*) dal Corrisp. L. FANTAPPIÈ.

PREMESSA. — Il passaggio dalla fisica classica alla fisica relativistica è consistito, in ultima analisi, nell'aver sostituito al gruppo di Galileo Gl_{3+1}^{10} («gruppo base» della fisica classica) il gruppo di Lorentz Lz_{3+1}^{10} (che contiene il precedente come caso limite per $c \rightarrow \infty$). Come abbiamo osservato in precedenti lavori⁽¹⁾ una delle più interessanti conseguenze del perfezionamento del «gruppo base» è stata la possibilità di unificare teorie o concetti che nella fisica classica apparivano indipendenti. Esempio tipico è la teoria del campo

(10) Cfr. J. HOUTGAST, *The variations in the profiles of the strong Fraunhofer lines along a radius of the solar disc*, Utrecht 1942, p. 56.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) G. ARCIDIACONO, *Sull'importanza del «gruppo base» nel problema della unificazione dei campi fisici; Le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di relatività finale; Sul campo elettromagnetico generalizzato*, «Rend. Lincei», ser. 8^a, vol. XVIII, fasc. 4, 5, 6, pp. 386-391; 515-519; 631-636 (1955).

elettromagnetico: il campo elettrico e quello magnetico, che nell'ambito della fisica classica apparivano come due vettori distinti, variabili nel tempo, con la teoria di relatività ristretta diventano due aspetti, dipendenti dall'osservatore, di un'unico campo fisico, rappresentato nel cronotopo di Minkowski da un bivettore F_{ik} .

Come giustamente osserva il Lichnerowicz ⁽²⁾ è questo l'esempio fondamentale di una unificazione dei campi, la cui riuscita può considerarsi perfetta.

Recentemente ⁽³⁾ il Fantappiè ha dimostrato che a sua volta il gruppo di Lorentz Lz_{3+1}^{10} risulta caso limite per $R \rightarrow \infty$ del « gruppo finale », e questo ultimo gruppo non è più caso limite di alcun altro gruppo (a 10 parametri ed operante su un cronotopo a 4 dimensioni). C'è quindi da aspettarsi che con la teoria di relatività finale sia possibile unificare teorie o concetti che nella relatività ristretta risultano ancora indipendenti.

Infatti, in tre Note Lincee del 1955 ⁽¹⁾ abbiamo fatto vedere come è possibile trasportare nella relatività finale la teoria di Maxwell. Le equazioni ottenute descrivevano un campo a 10 componenti (tante quanti sono i parametri del gruppo finale). Al limite relativistico (per $R \rightarrow \infty$), la teoria così ottenuta si spezzava nella teoria di Maxwell del campo elettromagnetico, e nella teoria di un nuovo campo a 4 componenti (che avevamo chiamato « campo $g_{\circ}g$ »):

$$(1.1) \quad \begin{cases} \text{Div } F_{ik} = J_k \\ \text{Rot } F_{ik} = 0 \end{cases} ; \quad (1.2) \quad \begin{cases} \text{Div } G_i = 0 \\ \text{Rot } G_i = J_{ik} \end{cases}$$

con le condizioni di integrabilità:

$$(1.3) \quad \text{Div } J_k = 0 ; \quad (1.4) \quad \text{Rot } J_{ik} = 0.$$

Poiché la teoria di Maxwell generalizzata risultava evidentemente una « teoria unitaria » di questi due campi, nasceva naturalmente il problema interessante di dare una interpretazione fisica del nuovo gruppo di equazioni. In questa Nota ci proponiamo di dimostrare che, per $\bar{G}_i = G_i$, la nuova teoria coincide con la ben nota idrodinamica relativistica dei fluidi perfetti incompressibili, di Eisenhart, Synge, Lichnerowicz.

2. LA TEORIA DI MAXWELL NELLA RELATIVITÀ FINALE. — Come si è visto nelle Note ⁽¹⁾, per generalizzare le equazioni di Maxwell, abbiamo sfruttato la circostanza notevole che le equazioni del campo elettromagnetico (2.2) scritte in forma quadridimensionale sono formalmente analoghe alle equazioni della elettrostatica (2.1) e quindi si scrivono immediatamente le

(2) A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris 1955, p. 149.

(3) L. FANTAPPIÈ, *Su una nuova teoria di « relatività finale »*, « Rend. Lincei », ser. 8ª, vol. XVII, fasc. 5 (1954); *Sui fondamenti gruppalì della fisica*, Memoria in corso di stampa nei « Rend. del Circ. Mat. di Palermo ».

equazioni di Maxwell generalizzate (2.3) imponendo che siano analoghe a quelle della elettrostatica e della elettrodinamica (in questa Nota ci limiteremo al caso in cui $\bar{G}_{ik} = G_{ik}$, cioè $\mathbf{D} = \mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mathbf{H}$; $\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{G}$; $\bar{G}_0 = G_0$):

$$(2.1) \quad \begin{cases} \text{Div } E_i^* = \varrho \\ \text{Rot } E_i^* = 0 \end{cases} ; \quad (2.2) \quad \begin{cases} \text{Div } F_{ik}^* = J_k \\ \text{Rot } F_{ik}^* = 0 \end{cases} ; \quad (2.3) \quad \begin{cases} \text{Div } G_{ikl}^* = J_{ikl} \\ \text{Rot } G_{ikl}^* = 0 \end{cases}.$$

Se scriviamo le equazioni duali ⁽⁴⁾, le (2.1), (2.2), (2.3) si possono sintetizzare in forma compatta nel seguente modo:

$$(2.4) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Rot } G_{ik} = J_{ikl} \\ \text{Div } G_{ik} = 0 \end{array}}$$

con le condizioni di integrabilità:

$$(2.5) \quad \boxed{\text{Rot } J_{ikl} = 0}$$

dalle quali, per $i, k, l = 1, 2, 3$ si ottengono le equazioni (2.1) della elettrostatica in S_3 ; per $i, k, l = 0, 1, 2, 3$ si ottengono le equazioni (2.2) della elettrodinamica nel cronotopo di Minkowski, e per $i, k, l = 0, 1, 2, 3, 4$ si ottengono le equazioni del campo elettromagnetico generalizzato in S_{4+1} . La teoria di Maxwell assume allora il seguente aspetto matematico:

Dalla 2^a equazione segue la esistenza di un trivettore « potenziale » U_{ikl} , che si può assoggettare ad una condizione analoga a quella di Lorentz:

$$(2.6) \quad G_{ik} = \text{Div } U_{ikl} \quad \text{con} \quad (2.7) \quad \text{Rot } U_{ikl} = 0$$

sostituendo la (2.6) nella 1^a equazione e ricordando la (2.7) si ha:

$$\text{Rot Div } U_{ikl} = \nabla^2 U_{ikl} - \text{Div Rot } U_{ikl} = J_{ikl}$$

cioè:

$$(2.8) \quad \nabla^2 U_{ikl} = J_{ikl}$$

ove abbiamo indicato con ∇^2 il quadrato dell'operatore « nabla » cioè il laplaciano Δ per lo S_3 , il d'alambertiano \square in S_{3+1} e l'operatore analogo \boxtimes in S_{4+1} . Prendendo la Div della 1^a equazione otteniamo:

$$\text{Div Rot } G_{ik} = \nabla^2 G_{ik} - \text{Rot Div } G_{ik} = \text{Div } J_{ikl},$$

cioè:

$$(2.9) \quad \nabla^2 G_{ik} = \text{Div } J_{ikl}.$$

(4) O. COSTA DE BEAUREGARD, *La théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris 1949, p. 72.

La forza ponderomotrice è data da:

$$(2.10) \quad 2f_l = G^{ik} J_{ikl},$$

mentre utilizzando le (2.4) possiamo subito dimostrare la esistenza di un tensore « impulso energia » T_{ik} . Difatti si ha:

$$\begin{aligned} 2f_l &= G^{ik} (\partial_i G_{kl} + \partial_k G_{li} + \partial_l G_{ik}) = G^{ik} \partial_l G_{ik} + (G^{ik} \partial_i G_{kl} + G^{ik} \partial_k G_{li}) = \\ &= \frac{1}{2} \partial_l (G^{ik} G_{ik}) + (G^{ik} \partial_i G_{kl} + G^{ki} \partial_i G_{lk}) = \frac{1}{2} \partial_l (G^{ik} G_{ik}) + 2 (G^{ik} \partial_i G_{kl}) = \\ &= \frac{1}{2} \partial_l (G^{ik} G_{ik}) + 2 \partial_i (G^{ik} G_{kl}) - 2 G_{kl} \partial_i G^{ik}. \end{aligned}$$

Ma: $\partial_i G^{ik} = 0$, quindi:

$$(2.11) \quad f_i = \text{Div } T_{ik} \quad \text{con} \quad T_{ik} = G_{is} G^s_k + \frac{1}{4} \delta_{ik} G_{rs} G^{rs}.$$

Se nelle formole ottenute facciamo variare gli indici da 1 a 3 in S_3 , otteniamo la teoria della elettrostatica; se li facciamo variare da 0 a 3 in S_{3+1} otteniamo la teoria elettromagnetica, mentre se li facciamo variare da 0 a 4 in S_{4+1} otteniamo la teoria del campo elettromagnetico generalizzato, da noi stabilita nelle Note ⁽¹⁾. Rimane quindi perfettamente giustificata la legittimità della estensione alla teoria di relatività finale della teoria di Maxwell.

3. LA IDRODINAMICA RELATIVISTICA DEI FLUIDI PERFETTI INCOMPRESSIBILI. -- Ci proponiamo adesso di dimostrare che il 2° gruppo di equazioni da noi ottenute nelle Note ⁽¹⁾ come limite relativistico ($R \rightarrow \infty$) delle equazioni di Maxwell generalizzate, coincide (per $\bar{C}_i = G_i$) con le equazioni della idrodinamica relativistica dei fluidi perfetti incompressibili, sviluppata indipendentemente dalla elettrodinamica, da Eisenhart ⁽⁵⁾, Synge ⁽⁶⁾, Lichnerowicz ^{(2) (7)}.

O. Costa de Beauregard ⁽⁸⁾ osserva che, mentre nella fisica classica la teoria dei fluidi perfetti presentava delle grandi analogie formali con l'elettromagnetismo, *queste analogie spariscono quando tale teoria è trasportata nella relatività ristretta*, in quanto le grandezze che erano considerate omologhe risultano *a fortiori* differenti. Ebbene, noi vogliamo qui far vedere che, pur sparendo tali analogie, ne appaiono altre ben più profonde, in quanto le equazioni della teoria dei fluidi perfetti incompressibili coincidono esattamente col secondo gruppo di equazioni ottenute al limite relativistico dalle equazioni di Maxwell da noi generalizzate. In altri termini, la teoria di Maxwell

(5) L. P. EISENHART, « Trans. Amer. Math. Soc. », 26, pp. 205-220 (1924).

(6) J. L. SYNGE, « Trans. Roy. Soc. Canada », 3, 28, pp. 127-171 (1934); « Proc. London Math. Soc. », 43, pp. 376-416 (1937).

(7) A. LICHNEROWICZ, « Bull. Sci. Math. », 65, pp. 54-72 (1941); « Ann. Ec. Nor. Sup. » (3), 58, 4, pp. 285-304 (1941); « C. R. Acad. Sci. », 219, p. 270 (1944).

(8) O. COSTA DE BEAUREGARD, op. cit., p. 151.

trasportata nella relatività finale, *sintetizza in un'unica teoria* (per $\bar{G}_{ik} = G_{ik}$ la elettrodinamica nel vuoto e la idrodinamica relativistica dei fluidi perfetti incompressibili, le quali, nella relatività ristretta si costruiscono indipendentemente. Esponiamo brevemente la idrodinamica relativistica dei fluidi perfetti incompressibili, seguendo le trattazioni di Lichnerowicz⁽²⁾, O. Costa de Beauregard⁽⁴⁾ e Synge⁽⁹⁾. Allo scopo di mettere in evidenza le analogie, scriveremo accanto alle equazioni della idrodinamica (che contrassegneremo con la lettera A), quelle della elettrodinamica (che indicheremo con B).

Dato un fluido perfetto, si introduce nella idrodinamica relativistica un « quadrivettore corrente » C_i , così definito:

$$(3.1) \quad C_i = V_i F \quad \text{con} \quad V_0 = ic/\sqrt{1-\beta^2} \quad ; \quad \mathbf{V} = \mathbf{v}/\sqrt{1-\beta^2} \quad ; \quad V_i V^i = -c^2.$$

dove F è l'indice del fluido.

Ciò premesso, le equazioni dei fluidi perfetti incompressibili, sono le (3.2 A):

$$(3.2 A) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Div } C_i = 0 \\ \text{Rot } C_i = \Omega_{ik} \end{array}} \quad ; \quad (3.2 B) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Div } F_{ik} = J_k \\ \text{Rot } F_{ik} = 0 \end{array}}$$

con le condizioni di integrabilità:

$$(3.3 A) \quad \boxed{\text{Rot } \Omega_{ik} = 0} \quad ; \quad (3.3 B) \quad \boxed{\text{Div } J_k = 0}$$

la 1^a equazione (3.3 A) esprime la incompressibilità del fluido mentre la 2^a equazione definisce il « bivettore vortice » Ω_{ik} di Lichnerowicz. In un fluido perfetto incompressibile, le onde di pressione (*onde sonore*) si propagano con la velocità c della luce.

Dalla 1^a equazione (3.2 A) segue la esistenza di un « potenziale » R_{ik} :

$$(3.4 A) \quad C_i = \text{Div } R_{ik} \quad ; \quad (3.4 B) \quad F_{ik} = \text{Rot } A_i$$

con la condizione analoga a quella di Lorentz:

$$(3.5 A) \quad \text{Rot } R_{ik} = 0 \quad ; \quad (3.5 B) \quad \text{Div } A_i = 0$$

sostituendo la (3.4 A) nella 2^a delle (3.2 A) otteniamo:

$$\text{Rot Div } R_{ik} = \square R_{ik} - \text{Div Rot } R_{ik} = \Omega_{ik},$$

cioè:

$$(3.6 A) \quad \square R_{ik} = \Omega_{ik} \quad ; \quad (3.6 B) \quad \square A_i = J_i$$

(9) J. L. SYNGE, *Relativity: the special theory*, North-Holland, 1956, Amsterdam,

se invece prendiamo la Div della 2^a equazione (3.2 A), otteniamo:

$$\text{Div Rot } C_i = \square C_i - \text{Grad Div } C_i = \text{Div } \Omega_{ik},$$

cioè:

$$(3.7 A) \quad \square C_i = \text{Div } \Omega_{ik} \quad ; \quad (3.7 B) \quad \square F_{ik} = \text{Rot } J_i$$

Come si vede subito confrontando i due gruppi di equazioni (A) e (B), la teoria dei fluidi perfetti incompressibili e la teoria elettromagnetica nel vuoto pur avendo la stessa struttura logica non sono identiche, perché le equazioni del gruppo A sono essenzialmente diverse dalle equazioni del gruppo B. Però accade un fatto interessante: se scriviamo la teoria di Maxwell nella relatività finale (svolta al n. 2, per $i, k, l = 0 \dots 4$, e nelle Note⁽¹⁾), e poi passiamo al limite relativistico ($R \rightarrow \infty$), tale teoria si spezza *esattamente* nelle equazioni A e B. Così per esempio se poniamo:

$$(3.8) \quad F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -iE_1 & -iE_2 & -iE_3 \\ iE_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ iE_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ iE_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \Omega_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -ik_1 & -ik_2 & -ik_3 \\ ik_1 & 0 & -h_3 & h_2 \\ ik_2 & h_3 & 0 & -h_1 \\ ik_3 & -h_2 & h_1 & 0 \end{bmatrix}$$

le equazioni (3.2) si scrivono così, in forma tridimensionale:

$$(3.9 A) \quad \begin{array}{l} \text{(III)} \quad \text{rot } \mathbf{C} = \mathbf{h} \\ \text{(IV)} \quad \text{grad } C_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \mathbf{k} \\ \text{(VII)} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial C_0}{\partial t} + \text{div } \mathbf{C} = 0 \end{array}$$

$$(3.9 B) \quad \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \text{div } \mathbf{E} = J_0 \\ \text{(II)} \quad \text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \\ \text{(V)} \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \\ \text{(VI)} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0 \end{array}$$

(dove i numeri romani indicano le stesse equazioni stabilite nelle Note⁽¹⁾), con le condizioni di integrabilità:

$$(3.10 A) \quad \begin{array}{l} \text{(IX)} \quad \text{rot } \mathbf{k} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0 \\ \text{(X)} \quad \text{div } \mathbf{h} = 0 \end{array} \quad (3.10 B) \quad \text{(VIII)} \quad \text{div } \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial J_0}{\partial t} = 0$$

le quali non sono altro (salvo la sostituzione $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{C}$; $G_0 \rightarrow C_0$) che le equazioni di Maxwell generalizzate (2.4), (2.5) stabilite nelle Note ⁽¹⁾ ed al limite relativistico (per $R \rightarrow \infty$).

4. CONCLUSIONE. — Ci sembra quindi lecito poter concludere, in base a quanto detto nel numero precedente, che la elettrodinamica nel vuoto e la idrodinamica relativistica dei fluidi perfetti incompressibili (che nella teoria di relatività ristretta si costruiscono su basi indipendenti), si possono considerare nell'ambito della teoria di relatività finale come la teoria di Maxwell da noi generalizzata nelle Note ⁽¹⁾ (ed esposta al n. 2 in una forma indipendente dal numero delle dimensioni dello spazio). Da ciò seguirebbe che il « bivettore elettromagnetico » F_{ik} ed il vettore « corrente idrodinamica » C_k debbono considerarsi come caso limite per $R \rightarrow \infty$ di un'unico bivettore G_{ik} di S_5 e lo stesso accade per il vettore « distribuzione elettrica » J_k ed il bivettore « vortice » Ω_{ik} che nello S_5 formano un unico trivettore J_{ikl} . Gli invarianti del campo sono:

$$(4.1) \quad I_2 = G_{rs} G^{rs} = 2 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 - C_0^2 + \mathbf{C}^2)$$

$$(4.2) \quad I_4 = (\mathbf{C} \times \mathbf{E})^2 - (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^2 - (C_0 \mathbf{E} + \mathbf{C} \wedge \mathbf{H})^2$$

cioè nella relatività finale non rimangono più separatamente invarianti $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$ e $\mathbf{C}^2 - C_0^2$, ma la (4.1) e ciò in accordo con quanto suggerito dal Fantappiè in una recente Nota ⁽¹⁰⁾. Possiamo allora affermare che su scala cosmica non si può più costruire una idrodinamica indipendente dalla elettrodinamica, cosa che è confermata dalla circostanza che nell'Universo esistono dei forti campi magnetici e la materia è costituita in gran parte da liquidi e gas conduttori, onde lo studio dei fenomeni elettromagnetici nei fluidi conduttori risulta di decisiva importanza. Ciò è stato messo in rilievo dallo Alfvén ⁽¹¹⁾ che ha fondato recentemente la magneto-idrodinamica cosmica, la quale riceve dunque la sua più naturale giustificazione logica in questa teoria di relatività finale, che è appunto la fisica delle grandi distanze nello spazio e nel tempo.

(10) L. FANTAPPIÈ, *Deduzione autonoma della equazione generalizzata di Schrödinger nella teoria di relatività finale*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XIX, 1955.

(11) H. ALFVÉN, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford, at the Clarendon Press (1953); *Electromagnetic Phenomena in the motion of Gaseous Masses of Cosmical Dimensions*, Problem of Cosmical Aerodynamics, Central Air Documents office (1951); C. AGOSTINELLI, *Magneto-idrodinamica Cosmica*, Conferenze del Sem. Mat. di Bari, Laterza (1955); per la idrodinamica classica ved., per esempio, H. LAMB, *Hydrodynamics*, 3ª edizione, Cambridge (1906).

Chimica. — *Valutazione del peso molecolare quale mezzo di identificazione di costituenti in cromatografia in fase gassosa*^(*). Nota di ARNALDO LIBERTI, LUIGI CONTI, VITTORIO CRESCENZI, presentata^(**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Il riconoscimento di sostanze isolate mediante cromatografia in fase gassosa viene ordinariamente eseguito mediante misure direttamente o indirettamente legate al volume di ritenzione. Tale valore, pur essendo, in condizioni sperimentali strettamente controllate, indicativo di una specie chimica, non fornisce alcuna indicazione nelle sue dimensioni molecolari al di fuori delle informazioni ricavabili dalla relazione tra volume di ritenzione e complessità molecolare relativa ad una serie omologa di composti. Utilizzando come sistema di rivelazione un sistema basato su misure di variazione di densità gassosa è possibile determinare su micro quantità di sostanza, dell'ordine di grandezza di qualche gamma di prodotto, il peso molecolare di questa.

A questo scopo è stato utilmente impiegato un sistema manometrico differenziale del tipo di quello sviluppato da Martin e James⁽¹⁾. Il funzionamento di un dispositivo di questo genere può essere così riassunto: un gas di eluizione penetra alla stessa pressione in due colonne cromatografiche termostatate, una di riferimento e l'altra per l'effettiva cromatografia, che sono collegate al sistema di rivelazione schematizzato nella fig. 1. Il gas di riferimento che entra in A si suddivide nei bracci BC e B'C' per fuoriuscire in E, mentre il gas del cromatogramma, suddiviso nei bracci GHLYK e G'H'L'Y'K', fuoriesce anch'esso in E. Se la densità del gas di riferimento è uguale a quella del gas di cromatogramma, in tutti i punti del sistema di rivelazione si ha la medesima densità gassosa e pertanto si può fare in modo, mediante i regolatori di resistenza di flusso N, N', Z, Z', che nel tratto YY' la tendenza del gas a fluire in una o nell'altra direzione sia la stessa. Se però la presenza di un componente nella miscela gassosa che fuoriesce dalla colonna cromatografica modifica la densità gassosa di questa, lungo il tratto YY' si avrà un flusso gassoso proporzionale alla differenza di densità fra il gas del cromatogramma e quello di riferimento. Tale variazione di flusso nel tratto YY' viene rivelata da un sistema costituito da una termocoppia e da un elemento riscaldante posto alla base di M. Nell'apparato sperimentale l'erogazione della termocoppia viene amplificata mediante un Microvoltmetro D. C. Pye e la registrazione eseguita con uno Speedomax Leeds e Northrup.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Inorganica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) A. J. P. MARTIN e A. T. JAMES, « Biochemical Journal », 63, 138 (1956).

La densità del gas di riferimento (d_i) e quella del gas del cromatogramma (d_x) possono essere espresse in base all'equazione di stato dei gas con le seguenti relazioni:

$$(1) \quad d_i = \frac{M_i P}{RT} \quad d_x = \frac{(n_i M_i + n_x M_x) P}{RT}$$

dove n_i e n_x sono le frazioni molari e M_i e M_x i rispettivi pesi molecolari del

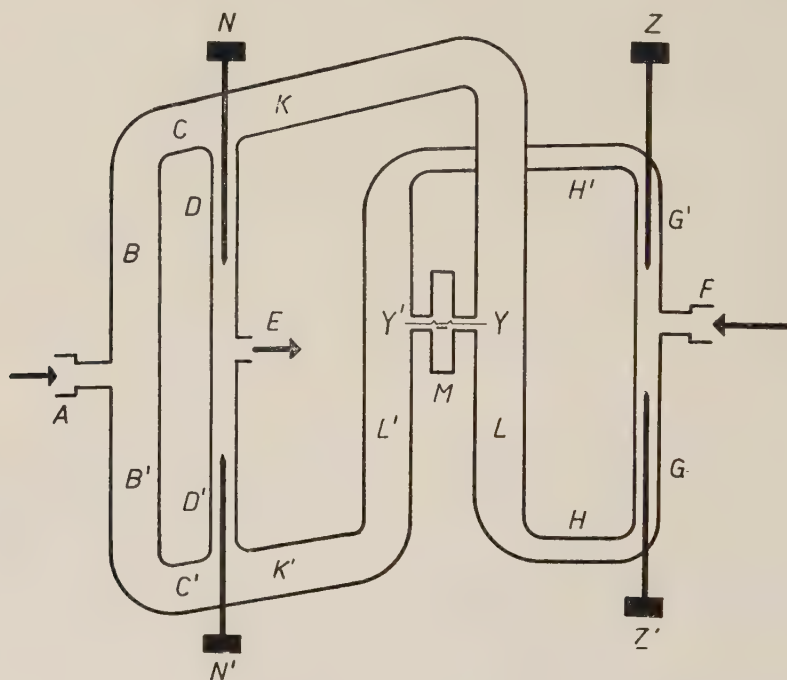


Fig. 1. - Diagramma schematico del sistema manometrico differenziale di Martin e James.

gas di eluizione, a , e del componente in esame. La differenza di densità Δd_{x-1} nel rivelatore sarà pertanto data da:

$$(2) \quad \Delta d_{x-1} = \frac{n_x (M_x - M_1) P}{RT}$$

Se la medesima operazione di eluizione viene eseguita con un altro gas, b , avente un peso molecolare pari a M_2 si ha una espressione simile alla (2):

$$(3) \quad \Delta d_{x-2} = \frac{n_x (M_x - M_2) P}{RT}$$

Se la miscela in esame, che per semplicità viene considerata limitatamente ad un solo componente x , viene addizionata di un componente a peso molecolare noto n (« standard interno ») e se la miscela così preparata viene cromatografata con due differenti gas di eluizione, si ottiene un grafico che viene schematizzato nella fig. 2.

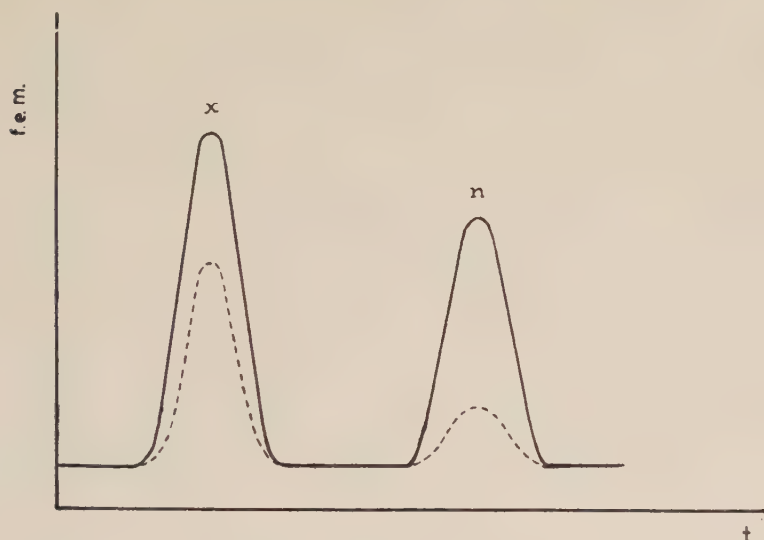


Fig. 2. - Cromatogramma schematico di una miscela costruito da un componente noto (n) e di uno incognito (x).

Curva continua: gas eluizione a . Curva tratteggiata: gas eluizione b .

La quantità del composto x che viene cromatografato quando si impiega come gas di eluizione a , e che viene indicata con Q' , è data dalla relazione:

$$Q' = \int_0^{\infty} \frac{n_x M_x P}{RT} dv$$

e sostituendo la (2) si ha:

$$(4) \quad Q' = \int_0^{\infty} \frac{M_x}{M_x - M_i} \Delta d_{x-1} dv.$$

La quantità, q' , del composto n determinato nello stesso cromatogramma, usando cioè come gas di eluizione a , è data da una espressione simile:

$$(5) \quad q' = \int_0^{\infty} \frac{M_n}{M_n - M_i} \Delta d_{n-1} dv.$$

Relazioni simili si ricavano per le quantità Q'' e q'' dei composti x ed n che vengono determinate quando il cromatogramma viene eseguito usando come gas eluente b .

Con il dispositivo sperimentale descritto è stata eseguita una numerosa serie di esperienze per determinare la relazione esistente tra il responso della termocoppia e le variazioni di densità nell'interno del rivelatore. Nei grafici della fig. 3 sono riassunti i dati sperimentali ricavati impiegando miscele di

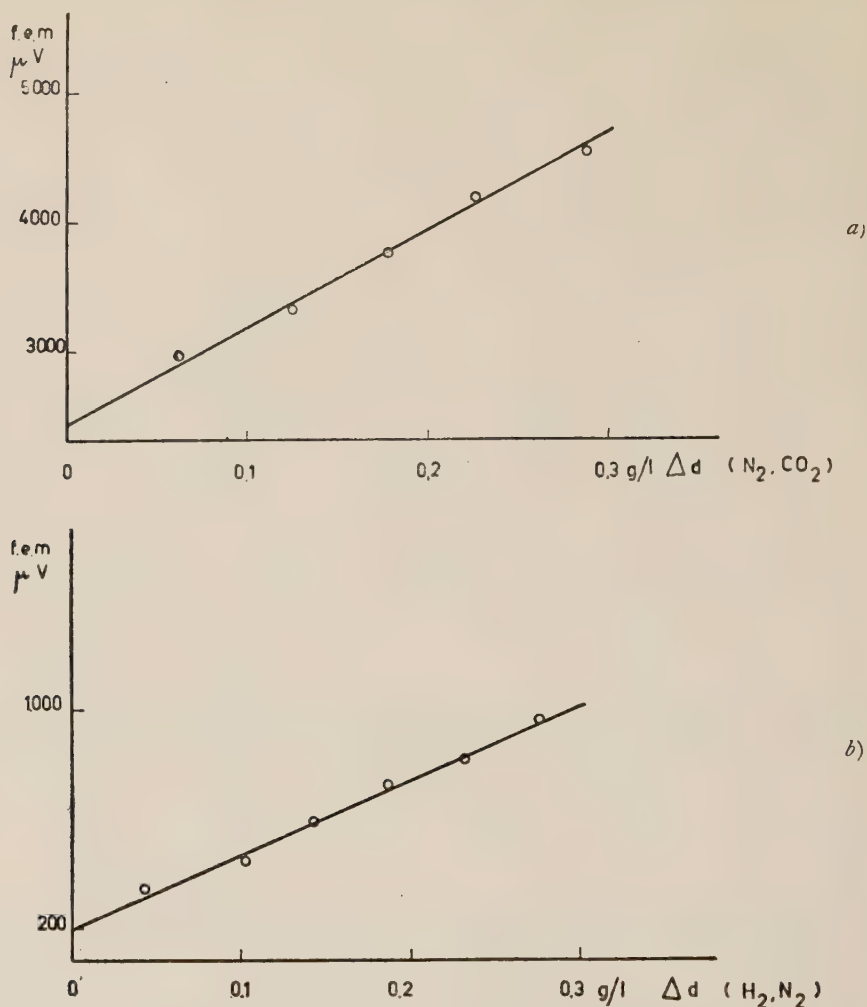


Fig. 3. - Relazione fra responso del rivelatore e differenza di densità.

a) fra N_2 e N_2+CO_2 . b) fra H_2 e H_2N_2 .

diversa densità ottenute mescolando N_2 con CO_2 (gas di riferimento N_2), e H_2 con N_2 (gas di riferimento H_2). Si osserva che per piccole variazioni di densità si ha un responso lineare della termocoppia e pertanto si può scrivere:

$$(6) \quad \int_0^{\infty} \Delta d \, dv = K \int_0^{\infty} \Delta E \, dv$$

e poiché

$$(7) \quad dv = F \, dt$$

$$(8) \quad \int_0^{\infty} \Delta d \, dv = KF \int_0^{\infty} \Delta E \, dt$$

in cui F , ΔE e K sono rispettivamente il flusso gassoso nella colonna cromatografica (costante), la variazione della forza elettromotrice della termocoppia rispetto al valore di fondo, e la costante di proporzionalità tra ΔE e Δd per il particolare gas eluente.

Sostituendo questa espressione nella (4) e indicando l'area del picco $\left(\int_0^{\infty} \Delta E dt \right)$ del componente incognito con A'_x e quella del picco del componente noto con A'_n si ha:

$$(9) \quad Q' = \frac{M_x}{M_x - M_1} KF \int_0^{\infty} \Delta E dt = \frac{M_x}{M_x - M_1} KFA'_x$$

analogamente

$$(10) \quad q' = \frac{M_n}{M_n - M_1} KF \int_0^{\infty} \Delta E dt = \frac{M_n}{M_n - M_1} KFA'_n$$

e analoghe espressioni si ottengono per Q'' e q'' .

Dividendo la (9) per la (10) infine si ha:

$$(11 a) \quad \frac{Q'}{q'} = \frac{M_x (M_n - M_1) A'_x}{M_n (M_x - M_1) A'_n}$$

analogamente

$$(11 b) \quad \frac{Q''}{q''} = \frac{M_x (M_n - M_2) A''_x}{M_n (M_x - M_2) A''_n}$$

Sperimentalmente Q , Q' , q e q' non possono essere direttamente misurate con sufficiente accuratezza, ma poiché $Q'/q' = Q''/q''$, combinando le (11 a) e (11 b) e misurando le aree dei relativi picchi (A'_x , A''_x , A'_n , A''_n) si ottiene la seguente espressione di carattere generale:

$$(12) \quad \frac{A'_x}{A'_n} \frac{(M_n - M_1)}{(M_x - M_1)} = \frac{A''_x}{A''_n} \frac{(M_n - M_2)}{(M_x - M_2)}$$

che può essere facilmente risolta rispetto a M_x .

Questo procedimento è stato applicato a diverse miscele artificiali e naturali, nelle quali si è usato come gas di eluizione H_2 , N_2 o CO_2 . La sensibilità del metodo dipende, come dalla (12), dai valori di M dei componenti, dello standard interno (componente noto), e dei gas di eluizione, oltre che dalla composizione delle miscele analizzate.

Nella tabella I vengono riportati i dati sperimentali ottenuti su tre diverse miscele binarie preparate da prodotti di peso molecolare noto, dodecano, etilbenzolo e limonene con composti supposti non noti, alcool otillico, dodecano pinene, usando come gas di eluizione idrogeno e azoto,

TABELLA I.

M_n standard interno	$\left[\frac{A'_x}{A'_n} \right]_{M_1=N_2}$	$\left[\frac{A''_x}{A''_n} \right]_{M_2=H_2}$	M_x medio	M teorico
Dodecano 170,33	1,54	1,61	138	130,23
	1,53	1,60		
	1,55	1,60		
	1,55	1,64		
Etilbenzolo 106,16	2,24	2,06	163	170,33
	2,25	2,04		
	2,28	2,04		
	2,30	2,00		
Limonene 136,23	1,06	1,10	139	136,23
	1,07	1,03		
	1,08	1,09		
	1,07	1,09		

L'errore commesso nella determinazione dei pesi molecolari non è rilevante, se si considera la natura dei gas di eluizione e l'entità dei pesi molecolari misurati. I casi illustrati, da considerare tra i meno favorevoli, possono essere meglio risolti mediante l'impiego di un secondo gas di eluizione a elevato peso molecolare.

Nella fig. 4 sono riportati i cromatogrammi di una miscela di esano, benzolo, eptano, toluolo ed ottano. Il cromatogramma A è stato ottenuto impiegando idrogeno come gas di eluizione (flusso 2,8 ml/sec.) ed il cromatogramma B impiegando azoto (flusso 2,3 ml/sec.); considerando un qualunque componente come standard si sono ottenuti i seguenti valori di peso molecolare:

rapporto	M_x	M teorico
esano/benzolo	87,9 esano	86,2
toluolo/ottano	95,9 toluolo	92,1
benzolo/eptano	78,6 benzolo	78,1

La conoscenza del peso molecolare dei vari componenti delle miscele volatili, oltre a costituire un prezioso indizio per l'identificazione, permette

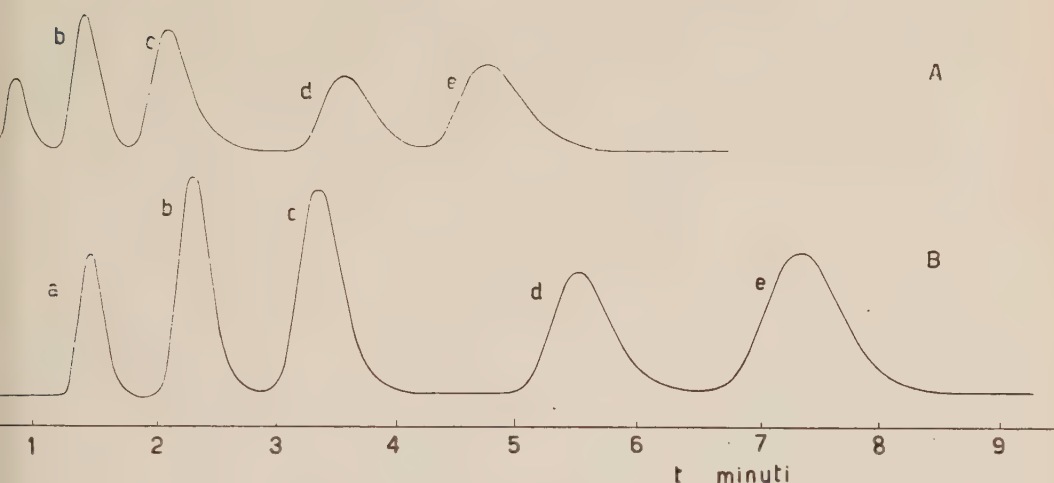


Fig. 4. - Cromatogramma di miscela di esano (a), benzolo (b), eptano (c), toluolo (d), ottano (e).
A, gas eluizione idrogeno. B, gas eluizione azoto.

di determinare quantitativamente ogni singolo componente senza dover ricorrere a calibrazioni individuali. A questo scopo si possono usare le relazioni (II a) e (II b), che danno i rapporti quantitativi tra i singoli componenti e lo standard interno. La riproducibilità media di tali determinazioni, che può essere valutata dai vari valori dei rapporti A_x/A_n riportati nella tabella I non supera in generale il 2 %.

Chimica organica. — *Sulla sintesi di Madelung: modalità della preparazione dei 2-alchil-indoli sostituiti*^(*). Nota di FRANCO PIOZZI e GIUSEPPE CASNATI, presentata ^(**) dal Socio A. QUILICO.

In una precedente comunicazione⁽¹⁾ era stata descritta la preparazione di alcuni dimetil- e trimetil-indoli, facendo anche notare come a questo scopo sia da preferire alla sintesi di Fischer una variante della sintesi di Madelung da noi proposta.

Per la necessità di disporre di una serie di indoli polisostituiti per il confronto con le proprietà di alcune sostanze provenienti dalla degradazione dell'*echinulina*⁽²⁾, abbiamo esteso la nostra variante della sintesi di Madelung alla preparazione di numerosi altri indoli, e nel frattempo abbiamo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

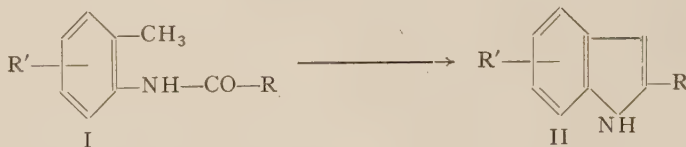
(1) C. CARDANI, F. PIOZZI e G. CASNATI, «Gazz. Chim. It.», 85, 263 (1955).

(2) Vedi A. QUILICO, C. CARDANI, e F. PIOZZI, «Gazz. Chim. It.», 85, 3 (1955).

avuto modo di ricercare le condizioni optimum per la reazione, anche operando su quantitativi di parecchie decine di grammi.

La presente comunicazione riferisce alcune osservazioni sulla sintesi indolica di Madelung e costituisce la messa a punto della tecnica di questa preparazione, che riteniamo attualmente la migliore per i 2-alchil-indoli sostituiti.

Come è noto, la sintesi di Madelung parte dall'*N*-acil-derivato di una *o*-toluidina (I) e conduce all'indolo corrispondente (II):



Tra gli agenti condensanti che si usano per la reazione (etilato sodico o potassico, butilato terziario potassico, sodioammide) la sostanza più efficace si è rivelata nelle prove preliminari la sodioammide; tale agente condensante, proposto da Verley⁽³⁾, è stato poi impiegato per questa sintesi da Casper e Burr⁽⁴⁾ e da Allen e Van Allan⁽⁵⁾.

Mentre le indicazioni di Casper e Burr, che eseguivano la reazione in sospensione di dietilanilina bollente, erano molto lacunose, quelle di Allen e Van Allan, che operavano a secco sulla miscela di acil-toluidina e sodioammide, erano molto particolareggiate: dobbiamo però lamentare di aver avuto risultati poco soddisfacenti proprio col metodo proposto dai citati Autori americani, non solo per gli indoli polisostituiti ma anche per il 2-metil-indolo che è appunto il termine descritto da Allen e Van Allan.

Le nostre critiche al loro metodo riguardano i bassi rendimenti (molto inferiori all'80% dichiarato per il 2-metil-indolo), la difficoltà di moderare la reazione a causa della sua forte esotermicità, e l'ottenimento di notevoli quantità dell'*o*-toluidina di partenza accanto a peci carboniose. Queste nostre osservazioni, frutto di una lunga serie di operazioni nelle esatte condizioni indicate, ci autorizzano ad avanzare le più ampie riserve circa la praticità dell'uso del metodo proposto da Allen e Van Allan.

Al contrario l'uso della dietilanilina come diluente, sulla traccia delle scarse indicazioni di Casper e Burr, ci ha consentito la messa a punto della preparazione con rese molto buone per tutti i termini sperimentati. La dietilanilina permette di controllare la temperatura e di avere una reazione più omogenea, evitando surriscaldamenti e perdite di prodotto.

Tra i fattori che influenzano favorevolmente i rendimenti ricordiamo ovviamente la purezza e l'anidrità dell'acilderivato, della sodioammide, della dietilanilina e dell'azoto impiegato sia per operare in atmosfera di gas inerte sia per assicurare col gorgogliamento la perfetta mescolanza della sospensione.

(3) M. A. VERLEY, «Bull. soc. chim.» (4), 35, 1039 (1924).

(4) J. CASPER e K. BURR, D.R.P. 479283 (1929); «Friedländers' Forschr. Teerfarbenfabr.», 16, 555 (1931); «Chem. Zentralb.», 1929, II, 1348.

(5) C. F. H. ALLEN e J. VAN ALLAN, «Org. Synth.», 22, 94 (1942).

Particolarmente importante è la regolazione della temperatura, poiché a temperatura inferiore a quella indicata la reazione è lentissima e a temperatura superiore si ha rapida distillazione della dietilanilina: inoltre un tempo di riscaldamento inferiore alle cinque ore deprime fortemente le rese.

I rendimenti variano dal 60% all'80% per i 2-metil-indoli sostituiti a seconda del termine preso in considerazione; rese buone anche se un po' inferiori si hanno per gli indoli recanti in posizione 2 un sostituito più complesso: ad esempio per il 2-isobutil-indolo la resa è del 41%.

Nella parte sperimentale è descritta solo la preparazione del 2, 5, 6-trimetil-indolo, in quanto non noto nella letteratura. La tecnica per la sintesi dei termini omologhi è assolutamente identica.

PARTE SPERIMENTALE.

2, 5, 6-trimetil-indolo.

In un pallone da distillazione da 1 litro si introducono 42 g di sodioammide finemente macinata, 35,4 g di acetil-pseudocumidina ⁽⁶⁾ e 500 cm³ di dietilanilina; il pallone è collegato mediante un refrigerante discendente a una beuta da filtrazione protetta da un tubo a cloruro di calcio; mentre si fa passare una lenta corrente di azoto secco mediante un tubo sottile pescante entro la sospensione, si scalda il pallone in un bagno d'olio o di metallo, portando la temperatura del bagno a 220° nel giro di un'ora e mantenendola a tale livello per cinque ore, in modo che solo una limitatissima quantità di dietilanilina riesca a distillare. Poi si porta la temperatura del bagno a 240°-250° e si distilla lentamente la dietilanilina nel volgere di un'ora, aumentando sul finire la corrente di azoto ⁽⁷⁾. Si allontana il bagno, si lascia raffreddare, poi si gocciolano con precauzione nella miscela 250 cm³ di acqua fredda. Dopo una notte la sospensione viene estratta tre-quattro volte con 200 cm³ di etere per volta; l'estratto etereo viene lavato con acido cloridrico diluito per allontanare la dietilanilina residua, poi lavato con acqua, seccato su pastiglie di potassa caustica ed evaporato. Il residuo, cristalli brunastri del peso di 22,5 g, viene distillato in corrente di vapore: dal distillato acquoso si raccolgono per filtrazione 17,5 g di 2, 5, 6-trimetil-indolo puro, aghi bianchi aventi P.F. 123°-124°, mentre altri 4,2 g sono recuperati per estrazione eterea. In totale 21,7 g, con resa 68%. Il prodotto può essere ulteriormente purificato per cristallizzazione da alcool: P.F. 124° (corr.). Con acido picrico dà un picrato, aghi rossi dendritici da esano, P. F. 152°.

(6) L'acetil-pseudocumidina, P. F. 163°, è stata preparata trattando una soluzione benzenica fredda e concentrata di pseudocumidina con eccesso di anidride acetica: per raffreddamento la sostanza cristallizza in larghe scaglie ed è sufficientemente pura per essere usata per la reazione.

(7) Una piccola quantità dell'indolo distilla in corrente di vapore con la dietilanilina e va perduta. La dietilanilina recuperata può essere purificata lavando con etere la sua soluzione in acido solforico diluito.

Citogenetica. — *Attuali conoscenze sulla citotassonomia del genere « Colchicum »* (*). Nota di FRANCESCO D'AMATO, presentata (**) dal Socio A. CHIARUGI.

Il genere *Colchicum* è, fra i generi delle Monocotiledoni, uno dei più difficili e dei meno noti dal punto di vista sistematico, come dimostrato dalla estesissima sinonimia e dal notevole disaccordo fra gli Autori circa la delimitazione delle entità sistematiche e il valore diagnostico dei vari caratteri morfologici.

L'unico tentativo di revisione monografica del genere in tempi relativamente recenti è quello dello Stefanoff (1926): con l'inclusione — per noi non giustificata — della specie di *Merendera* e di *Bulbocodium* nel genere *Colchicum*, egli distingue 65 specie, sforzandosi di sistemare la confusa sinonimia e di precisare l'area geografica delle singole specie. Come già fatto notare in altra occasione (D'Amato, 1955), i risultati poco soddisfacenti raggiunti dallo Stefanoff con la sua monografia sono essenzialmente dovuti al fatto che egli non ha preso in considerazione materiali viventi, ma si è limitato allo studio di « exsiccata », spesso di vecchie collezioni e di un ristretto numero di località, in alcuni casi semplicemente riportando diagnosi specifiche di precedenti Autori senza curarsi dello studio dei corrispondenti « exsiccata ».

Dopo lo Stefanoff, a parte la descrizione di alcune nuove specie di *Colchicum* da parte di diversi Autori, un lodevole tentativo di revisione sistematica delle specie di *Colchicum* della Siria, Palestina e Iraq su materiali viventi è quello della Feinbrun (1953), che ha portato alla scoperta di 4 nuove specie.

Pur rappresentando un notevole progresso rispetto alle ricerche di precedenti Autori, il lavoro della Feinbrun ricalca essenzialmente i criteri della sistematica tradizionale, non preoccupandosi nè della variabilità di certi caratteri morfologici né della ricerca di nuovi caratteri diagnostici — soprattutto al livello microscopico — e non chiedendo l'ausilio della Cariologia e della Genetica alla soluzione dei problemi sistematici.

Nel 1949, dando inizio ⁽¹⁾ alla revisione citotassonomica del genere *Colchicum*, io mi sono preoccupato di studiare abbondante materiale vivente di numerose località nell'ambito dell'areale delle singole specie, sia per precisare la variabilità di certi caratteri diagnostici, sia per scoprirne di nuovi allo scopo di disporre di buoni criteri validi alla riclassificazione degli « exsic-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Pisa.

Pubblicazione n. 198 del Centro di Studio per la Citogenetica Vegetale del C.N.R., Firenze.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) Il lavoro da me finora eseguito sul genere *Colchicum* è stato reso possibile dalla cordiale cooperazione di oltre 150 Studiosi in Italia e all'Estero, i quali hanno raccolto abbondante materiale spontaneo e (o) hanno messo a disposizione materiali di Erbario.

cata dei principali Erbari. Notevole cura ho anche posto nello sviluppare un metodo che potesse sormontare le ben note difficoltà frapposte all'analisi cariologica dalle specie di *Colchicum* (cfr. Levan, 1940) per la presenza nel kariogramma di non pochi cromosomi a costrizioni secondarie talora molto lunghe e a porzioni eterocromatiche più o meno estese: difficoltà superate applicando, con modificazioni, il pretrattamento con 8-ossichinolina di Tjio e Levan (1950) allo « striscio al Feulgen » (cfr. D'Amato, 1946) degli apici radicali.

Con i dati contenuti nel nostro primo Contributo alla revisione citotassonomica di *C. autumnale* L., *C. lusitanum* Brot e *C. neapolitanum* Ten. (D'Amato, 1955) e con quelli di numerose osservazioni ancora inedite, ci è possibile ora impostare una breve discussione sullo stato attuale della citotassonomia del genere *Colchicum* (ved. Tabella I). Come risulta dalla Tabella, molti dei dati citologici spettano al Levan e, data la competenza del citologo svedese, sono da riguardarsi esatti; erronea appare, invece, almeno per qualche specie, la determinazione sistematica, come indicato dalla forte divergenza dei conteggi cromosomici, mio e suo, per *C. Bivonae* e *C. neapolitanum*. Questa erronea classificazione, pur suggerendo prudenza per qualche aspetto della nostra discussione, non nuoce al problema della considerazione del possibile significato di qualche numero cromosomico nella Citotassonomia del genere.

Dai dati raccolti nella Tabella e da quelli, editi ed inediti, delle osservazioni finora da me condotte, risultano i seguenti fatti:

1° l'analisi cariologica di popolazioni da me eseguita nelle specie di cui finora mi sono occupato, basata su un numero diverso di popolazioni e seconda delle disponibilità di materiale (da 3 per *C. Biehersteinii* a 44 per *C. autumnale*), mostra una assoluta costanza del numero cromosomico tipico della specie in tutte le popolazioni, indicando trattarsi di specie perfettamente stabilizzate senza accenni a differenziazione di biotipi per fenomeni di poliploidia intraspecifica (aneuploidia, euploidia) o per lo stabilirsi di cromosomi sovranumerari nell'ambito di popolazioni. Solo in *C. Biehersteinii* sono stati trovati individui a 20 e a 21 ($20 + 1$ S) cromosomi, ma i dati a mia disposizione sono ancora insufficienti per decidere se in questa specie c'è tendenza alla stabilizzazione di cromosomi sovranumerari nell'ambito di qualche popolazione;

2° la scoperta di specie di *Colchicum* a basso numero cromosomico, quale 16, 18, 20, permette per la prima volta di rintracciare in $x = 8, 9, 10$ i numeri - o alcuni dei numeri - cromosomici base del genere *Colchicum*. Appare molto probabile che, a partire da specie iniziali a basso numero cromosomico si sia sviluppato un processo di formazione di nuove specie per allopoliploidia, e cioè attraverso il meccanismo del raddoppiamento cromosomico in ibridi interspecifici naturali (sintesi di specie). Un rapido sguardo alla Tabella mostra che la sintesi di specie deve essere stata un attivo meccanismo di speciazione nell'ambito del genere *Colchicum*, essendo chiaro che il numero cromosomico di certe specie è esattamente la somma di due altri numeri cromosomici presenti nel genere (per esempio $36 = 16 + 20$; $38 = 18 + 20$; $52 = 16 + 36$; $54 = 16 + 38$ o $18 + 36$; $106 = 52 + 54$).

Come ampiamente documentato nella estesa letteratura al riguardo, le specie sintetiche naturali, essendo ormai stabilizzate, somigliano a specie diploidi presentando un processo meiotico perfettamente normale (cfr. Stebbins, 1950). Pur mancando quasi del tutto dati sulla meiosi in specie di *Colchicum* (deficienza dovuta alla notevole difficoltà di cogliere la meiosi in queste specie e alla necessità di sacrificare alcune diecine di bulbo-tuberi per ottenere gli stadi sufficienti ad una analisi del processo meiotico), una prova indiretta della regolarità della meiosi è indubbiamente l'assoluta costanza di numero cromosomico in tutte le specie nelle quali finora ho potuto eseguire una buona analisi citogeografica. Una prova diretta è, invece, fornita dall'analisi del processo meiotico in *C. neapolitanum* Ten., specie con regolarissima meiosi a bivalenti, nonostante l'elevatissimo numero cromosomico, $2n = 140$ (D'A-mato, 1955);

3° l'ammissione di un processo di sintesi di specie come meccanismo evolutivo operante nel genere *Colchicum* pone due problemi ad esso connessi e riguardanti: a) le possibilità spaziali e temporali d'incontro di specie, e b) le possibilità d'incrocio interspecifico. Questi due problemi vanno considerati astraendo - ovviamente - dalla eventualità che, in tempi recenti e comunque successivamente al periodo di differenziazione delle specie nel genere *Colchicum*, non ci siano state variazioni di areale per alcune specie, e non si siano create barriere fisiologiche o genetiche all'incrocio interspecifico.

Nell'area geografica del genere *Colchicum*, estesa nell'Eurasia dal Portogallo all'India e Turkestan e nel Nord-Africa, esistono territori nei quali sono attualmente presenti due o più specie di *Colchicum*. La revisione critica degli « exsiccata » conservati nei principali Erbari, congiunta allo studio di materiale vivente di numerose popolazioni, permette di ritrovare località di stretta coesistenza di specie diverse. Così, per limitarci alle specie italiane, che i miei studi dimostrano essere 6, sono state precisate località nelle quali coesistono 2 e - per una località 3 - specie di *Colchicum* e precisamente: *C. Bivonae* e *C. Cupanii* presso Rossano Calabro; *C. lusitanum* e *C. neapolitanum* nei monti sopra Castellammare di Stabia e a S. Rossore (Pisa); *C. autumnale* e *C. neapolitanum* nelle colline sopra Pontremoli; *C. autumnale* e *C. alpinum* a Cogne; *C. autumnale*, *C. alpinum* e *C. lusitanum* in una località presso Prunetta nell'Appennino Pistoiese. Per specie di *Colchicum* coesistenti in una stessa località la possibilità di ibridazione interspecifica è legata ad una contemporaneità di fioritura, primaverile o autunnale; condizione che non sempre si verifica. Così per le specie italiane di *Colchicum*, sulle quali ho finora condotto diverse osservazioni fenologiche, contemporaneità di fioritura si ha per *C. autumnale* e *C. neapolitanum*, mentre *C. lusitanum* e *C. alpinum* fioriscono prima di *C. autumnale* e lo stesso può dirsi per *C. Bivonae* rispetto a *C. Cupanii*. Tuttavia, anche in questi casi di sfasamento nel periodo di fioritura di due specie diverse, ho in alcuni anni di osservazione notato che può aversi contemporaneità di fioritura fra gli individui più tardivi di una specie e i più precoci dell'altra; sicché, nelle località di coesistenza, può non mancare la possibilità di un incrocio interspecifico.

TABELLA I.

Quadro riassuntivo delle attuali conoscenze sulla cariologia del genere «*Colchicum*».

N.	SPECIE	AREA GEOGRAFICA	Numero cromosomico		AUTORE (*)
			n	2n	
1	<i>C. Ritchii</i> R. Br.	Tunisia, Tripolitania, Egitto, Palestina	16		Feinbrun ⁽¹⁾ , D'Amato (ined.)
2	<i>C. hierosolymitanum</i> Feinbr.	Palestina	18		Feinbrun ⁽¹⁾
3	<i>C. Biebersteinii</i> Rouy	Russia mer., Bulgaria, Asia minore	20, 21 ⁽²⁾		D'Amato (ined.)
4	<i>C. Sibthorpii</i> Baker	Grecia, Creta	36		Levan (1940).
5	<i>C. autumnale</i> L.	Inghilterra, Irlanda, Europa media e sett. fino alla Polonia, Romania, Bulgaria, Jugoslavia, Italia sett. e centr. p.p.	38		Levan (1940); Satô (1942); Levan e Steinegger (1947); Takenaka (1950); D'Amato (1955).
6	<i>C. arenarium</i> Wald. e Kit.	Ungheria, Serbia (?)	38		D'Amato (ined.)
7	<i>C. luteum</i> Baker	Tibet, India bor., Beluchistan, Afganistan, Turchestan russo.	38		Mehra e Khoshoo (1948).
8	<i>C. speciosum</i> Stev.	Persia bor., Caucaso, Transcaucasia, Turchia, Siria, Libano.	38		Levan (1940)
9	<i>C. byzanthinum</i> Ten.	?	40		Levan (1940)
10	<i>C. Bornmüllerii</i> Freyn.	Asia minore	42		Levan (1940)
11	<i>C. variegatum</i> L.	Grecia or., Arcipelago greco, Asia minore	44		Levan (1940); Satô (1942)

(*) La citazione si riferisce solo al dato citologico. Per varie specie l'area geografica è precisata, molto più esattamente che nella esistente letteratura, sulla scorta dei dati di osservazioni personali inedite. (1) Comunicazione personale. (2) Piccolo cromosoma sopranumerario.

Segue: TABELLA I.

N.	SPECIE	AREA GEOGRAFICA	Numero cromosomico		AUTORE (*)
			<i>n</i>	2 <i>n</i>	
12	<i>C. Bivonae</i> Guss.	Sicilia, Sardegna, Italia merid. fino Abruzzi, Dalmazia, Corfù.		52	D'Amato (ined.)
	(<i>C. Bivonae</i> Guss.)			(36)	Levan (1940)
13	<i>C. latifolium</i> S. e S.	Grecia, Creta.		54	Levan (1940)
14	<i>C. Cupanii</i> Guss.	Algeria, Tunisia, Isole Pelagie e Malta, Sicilia ed Egadi, Sardegna, Calabria, Lucania, Puglie, Liguria, Albania, Grecia e Arcipel.		54	D'Amato (ined.)
15	<i>C. alpinum</i> Lam. e DC.	Monti di Sicilia, Sardegna e Corsica, Appennini, Alpi occ. e centr., Prealpi.		54	D'Amato (ined.)
16	<i>C. lusitanum</i> Brot.	Portogallo, Spagna, Marocco, Algeria, Tunisia Tripolitania, Penis. Ital. dalla Calabria alla pianura padana.	51		Castro (1944-1945)
				106	D'Amato (1955)
17	<i>C. neapolitanum</i> Ten.	Sicilia (?), Penis. ital. specialmente lungo la costa occ. dalla Calabria alla Liguria, Francia merid. e di S.O., Sardegna, Corsica, Algeria e Marocco (?).		140	D'Amato (1955)
	(<i>C. neapolitanum</i> Ten.)			(38)	Levan (1940)
18	<i>Colchicum</i> sp. (nova?)	Dintorni di Parma, El Fedja (Tunisia), pressi di Algeri		144, 146 (?)	D'Amato (ined.)

Quanto al problema della interfertilità fra specie di *Colchicum*, le nostre conoscenze attuali si limitano ai risultati degli esperimenti di ibridazione interspecifica (in ambedue i sensi) da me condotti in questi tre anni. Ho potuto chiarire che assoluta incompatibilità esiste fra *C. Ritchii* e *C. hyerosolymitanum*, mentre negli esperimenti di ibridazione interspecifica in cui furono saggiati in tutte le possibili combinazioni *C. autumnale*, *C. lusitanum* e *C. neapolitanum*, dopo due anni di insuccesso, ho potuto ottenere due cassule, ognuna con pochi semi, una in un incrocio *autumnale* × *lusitanum* e l'altra in un incrocio *lusitanum* × *neapolitanum*. Per decidere della eventuale natura ibrida di questi semi occorrerà purtroppo attendere da 3 a 4 anni, essendo questo il tempo che intercorre, in *Colchicum*, fra la germinazione dei semi e la prima fioritura. Se l'ibrido fra *C. lusitanum* e *C. autumnale* è stato ottenuto, esso potrà fornire un buon aiuto alla definizione della natura del *Colchicum* sp. (n. 18 in Tabella I), che io ritengo essere una specie nuova. Presente in località dove predomina il *C. lusitanum*, essa possiede dei caratteri di questa specie pur differendone per qualche altro, facendo pensare alla possibilità che si tratti di una specie sintetica naturale fra *C. lusitanum* ed una specie di *Colchicum* a 38 (o a 40?) cromosomi;

4° se si esclude il *C. autumnale*, specie ad amplissimo areale, le specie orientali di *Colchicum* sono caratterizzate da numero basso o medio (non superiore a 54) di cromosomi, mentre specie del bacino mediterraneo centrale o centro-occidentale presentano numero elevato o medio (non inferiore a 52) di cromosomi. Questo fatto, insieme a varie considerazioni di natura sistematica già prospettate dallo Stefanoff (1926), fanno ritenere probabile l'esistenza, nell'area geografica del genere *Colchicum*, di due centri genetici, essenzialmente distinti, per la differenziazione delle specie: uno orientale (Mediterraneo orientale ed Eurasiatico) e l'altro del Mediterraneo centrale o centro-occidentale.

Concludendo: sulla base della letteratura esistente e sulla scorta di osservazioni personali inedite viene precisato che:

1° le specie di *Colchicum* finora studiate sono specie perfettamente stabilizzate, mancando in esse accenni a differenziazione di biotipi per poliploidia intraspecifica (aneuploidia, euploidia) o per lo stabilirsi di cromosomi sovrannumerari nell'ambito di popolazioni;

2° la scoperta dei numeri base 8, 9, 10 appoggia validamente l'ipotesi precedentemente avanzata dall'A. (D'Amato, 1955) che l'anfidiploidia abbia rappresentato un attivo meccanismo di speciazione nell'ambito del genere *Colchicum*;

3° non mancano le possibilità spaziali e temporali d'incontro di specie diverse di *Colchicum*, essendo note località di coesistenza di 2 o 3 specie del genere. Quanto al problema della interfertilità, sono in corso dal 1952 esperimenti di ibridazione interspecifica fra specie ad areali confluenti: si richiama l'attenzione su *Colchicum* sp. (n. 18 in Tabella I), che si ritiene essere probabilmente specie sintetica naturale fra *C. lusitanum* e una specie di *Colchicum* a 38 (o 40?) cromosomi;

4° appare probabile l'esistenza, nell'area geografica del genere *Colchicum*, di 2 centri, essenzialmente distinti, di differenziazione di specie, uno orientale (Mediterraneo orientale ed Eurasia) e l'altro del Mediterraneo centrale o centro-occidentale.

BIBLIOGRAFIA.

- CASTRO D., *Nota sobre o numero de cromosomas do « Colchicum lusitanum »* Brot., « Bol. Soc. Brot. », 2^a Ser. », 19, 755-57 (1944-1945).
- D'AMATO F., *Osservazioni critiche su alcuni metodi d'impiego della reazione nucleale in Citologia Vegetale*. « Nuovo Giorn. Bot. Ital. », n. s., 53, 657-668 (1946); *Revisione citosistemica del genere « Colchicum »*. - I. *C. autumnale* L., *C. lusitanum* Brot. e *C. neapolitanum* Ten., « Caryologia », 7, 292-349 (1955).
- FEINBRUN N., *The genus « Colchicum » of Palestine and neighbouring countries*, « Palest. Journ. Bot. », Jerus. Ser., 6, 71-95 (1953).
- LEVAN A., *Note on the somatic chromosomes of some Colchicum species*, « Hereditas », 26, 317-320 (1940).
- LEVAN A., e STEINEGGER E., *The resistance of Colchicum and Bulbocodium to the C-mitotic action of colchicine*, « Hereditas », 33, 552-557 (1947).
- MEHRA P. e KHOSHOO T., *Chromosome number and effect of colchicine on chromosomes of Colchicum luteum Baker*, « Curr. Sci. », 17, 242-243 (1948).
- SATÔ D., *Karyotype alteration and phylogeny in Liliaceae and allied families*, I and II, « Jap. Journ. Bot. », 12, 57-161 (1942).
- STEBBINS G. L., *Variation and evolution in plants*, Columbia Univ. Press, New York (1950).
- STEFANOFF B., *Monographie der Gattung Colchicum*, Sofia (1926).
- TAKENAKA Y., *Notes on cytological observations in Colchicum with reference to autotoxycosis and sterility*, « Cytologia », 16, 95-99 (1950).
- TJIO H. J. e LEVAN A., *The use of oxyquinoline in Chromosome analysis*, « Ann. Est. Exp. Aula Dei, 2, 21-64 (1950).

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* - XVII. *Ripercussioni della rimozione di centri produttori di auxina sul ricambio del glutatione e dell'acido ascorbico in plantule di pisello* (*). Nota di ERASMO MARRÈ e GIANNINO LAUDI, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

Abbiamo esposto, in precedenti lavori, l'ipotesi che l'azione dell'auxina sulla cellula vegetale possa, almeno in parte, ricondursi alla sua capacità di controllare il ritmo di ossidazione dell'acido ascorbico nei tessuti [1], [2]. Gli argomenti finora addotti a sostegno di tale ipotesi possono così riassumersi: a) la somministrazione di acido ascorbico a piante superiori, o a parti isolate delle stesse, determina effetti opposti (inibenti) a quelli dell'auxina (stimolanti) su manifestazioni d'ordine generale quali la crescita per distensione [3] e per moltiplicazione cellulare [4], la respirazione (come consumo di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

ossigeno) [5] e la viscosità del plasma [6]; *b*) questi effetti inibenti del trattamento con acido ascorbico risultano, almeno per quanto riguarda la crescita e la respirazione, imputabili all'aumento, nei tessuti trattati, della forma ossidata (deidroascorbico) dell'acido ascorbico, piuttosto che a quello della forma ridotta [7], [8]; *c*) l'acido deidroascorbico (e non l'acido ascorbico) inibisce energicamente *in vitro*, su preparati mitocondriali, diversi sistemi enzimatici respiratori nella loro attività sia ossidativa sia (a quanto risulta anche da esperienze condotte su mitocondri d'origine animale) fosforilativa [9, 10]; *d*) è possibile dimostrare *in vitro* una definita azione inibente delle auxine, a concentrazioni dell'ordine di quelle che *in vivo* stimolano crescita e respirazione, sull'ossidazione enzimatica dell'acido ascorbico da parte di preparati acellulari, solubili come mitocondriali, mentre tale azione inibente non compare per composti strutturalmente simili alle auxine, ma dotati di azione

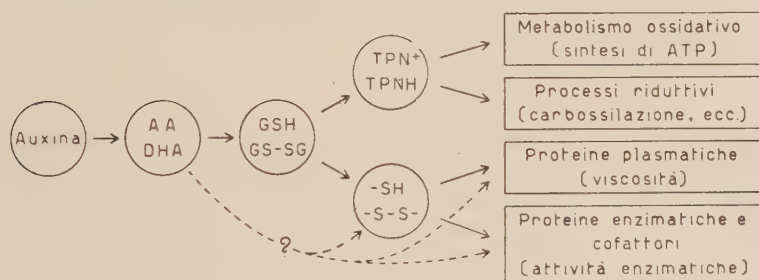


Fig. 1. — Schema dei rapporti tra auxina, sistema dell'acido ascorbico, sistema del glutatione e altri sistemi metabolici, secondo l'ipotesi delineata nel testo.

fisiologica nulla o antiauxinica [1], [11]; *e*) infine numerosi dati, nostri come di altri autori, dimostrano come il sistema ascorbico–deidroascorbico sia strettamente collegato, nella cellula, ad altri di importanza preminente, e in particolare al sistema Glutatione ridotto–Glutatione ossidato tramite la diffusissima glutatione–deidroascorbico riduttasi [12], [13]. Ora la posizione metabolicamente centrale del sistema del glutatione balza agli occhi evidente dal suo significato di coenzima della sintesi proteica [14], dai suoi rapporti col metabolismo ossidoriduttivo dei coenzimi piridinici (e quindi con la fonte più importante di idrogeno ad elevato potenziale) [15], [16] infine dalla sua importanza nella regolazione dello stato di riduzione e, rispettivamente, ossidazione dei gruppi sulfidrilici tanto delle proteine (enzimatiche o strutturali) che di diversi cofattori [14].

D'altra parte, mentre questi argomenti permettono di formulare l'ipotesi che l'auxina agisca primariamente sul sistema dell'acido ascorbico, e che l'indotta variazione del rapporto DHA/AA determini a sua volta i molteplici effetti fisiologici terminali caratteristici dell'azione dell'ormone, altre prove occorrono per dimostrarne la validità: in primo luogo, la dimostrazione di ripercussioni rapide ed evidenti a carico del ricambio dell'acido ascorbico e di

sistemi ad esso associati, quali il glutatione, in tutti quei casi in cui variazioni sperimentalmente indotte in un tessuto del tenore in auxina determinano i consueti effetti di stimolo sulla crescita e sulla respirazione.

Fine delle esperienze riferite nella presente Nota è stato lo studio delle ripercussioni precoci di una brusca diminuzione, sperimentalmente determinata, del livello dell'auxina sui sistemi dell'acido ascorbico e del glutatione. I risultati ottenuti dimostrano come la carenza auxinica indotta mediante l'asportazione dei centri naturalmente produttori di ormoni determini, nei territori a questi adiacenti, insieme al consueto arresto della crescita e alla caduta dell'attività di sistemi respiratori, anche un rapido spostamento verso le forme ossidate degli equilibri ascorbico ridotto/deidroascorbico e glutatione ridotto/glutazione ossidato. Questi risultati appaiono quindi in pieno accordo con l'ipotesi di un'azione primaria, inibente, delle auxine sull'ossidazione dell'acido ascorbico; e di una rapida ripercussione di quest'effetto primario su sistemi strettamente associati a quello dell'ascorbico, quale quello del glutatione.

MATERIALI E METODI.

Come materiale abbiamo utilizzato piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum* var. Alaska) di età di 8 giorni, coltivate su segatura in camera oscura, termoregolata a 25 gr. C. All'ottavo giorno dalla semina venivano selezionate quelle tra le piantine il cui terzo internodio appariva in piena attività di crescita, avendo raggiunto una lunghezza pari a un terzo circa di quella definitiva. Le piantine venivano quindi divise in due gruppi: quelle del primo gruppo, utilizzate come controlli, erano lasciate intatte fino al momento del prelievo, mentre quelle del secondo, in cui si voleva determinare lo stato di carenza auxinica, venivano sottoposte ad asportazione della parte apicale, lunga circa 6 mm, recidendola in corrispondenza del quarto prossimale della curvatura tra apice e porzione diritta del terzo internodio.

L'attività di crescita per i due lotti di piantine veniva determinata seguendo l'aumento, nel tempo, della distanza - inizialmente pari a mm. 10 - tra due linee segnate con inchiostro di China sulla parte distale della porzione diritta del terzo internodio. La determinazione dell'attività deidrogenasica, del glutatione ridotto (GSH) e degli acidi ascorbico (AA) e deidroascorbico (DHA) veniva eseguita sul materiale ottenuto prelevando, dalle piantine saggio come da quelle controllo, il tratto distale del terzo internodio, per una lunghezza di 10 mm. Come test dell'attività deidrogenasica abbiamo determinato l'attività della glucoso-6-fosfato deidrogenasi, assai attiva in questo materiale, e la cui sensibilità alla rimozione dei centri produttori d'auxina era già stata rilevata precedentemente [17], misurata in estratti grezzi mediante il metodo al cloruro di trifeniltetrazolio [18]. Gli acidi AA e DHA sono stati determinati secondo Roe e Kuether [19] e il glutatione mediante il metodo al nitroprussiato, applicato secondo Grunert e Philips [20].

ESPERIENZE E RISULTATI.

A) *Effetti della rimozione della parte apicale del germoglio sulla crescita e sull'attività glucoso-6-fosfato deidrogenasica.*

L'asportazione della gemma apicale e della porzione maggiore della parte curva dell'internodio distale comporta la rimozione dei centri produttori di auxina siti nella gemma apicale, nelle giovani foglioline e, presumibilmente,

anche nella porzione più giovane dell'internodio stesso, ancora sede di notevole attività meristematica. Gli effetti dell'asportazione di questi centri sulla crescita della parte residua del terzo internodio sono immediati e pressoché totali: nelle 5 ore successive all'inizio dell'esperienza, l'allungamento del tratto inizialmente segnato (1 cm), mentre risulta di circa 7 mm nei controlli intatti, appare invece quasi totalmente soppresso nei saggi decapitati dove in realtà è troppo piccolo per potersi con sicurezza misurare.

TABELLA I.

Attività glucoso-6-fosfato deidrogenasica in segmenti apicali di internodi di pisello, normali e decapitati.

Conc. in tessuto: 10 %. Tampone Tris 0,1 M; pH 7,3; TPN 20 γ /cc;
Gl. 6-P 0,02 M. Incubazione sotto vuoto. Dati come medie di tre determinazioni.

	attività deidrogenasica in γ TTC ridotto/ora
Controllo tempo 0	64
Controllo tempo 2 ore	66
Controllo tempo 5 ore	60
Decapitati da 2 ore	24
Decapitati da 5 ore	26

Ripercussioni veramente interessanti per la loro rapidità ed entità si osservano pure a carico dell'attività glucoso-6-fosfato deidrogenasica, che cade a un livello del 60 % inferiore a quello dei controlli già dopo due ore dall'asportazione della parte apicale. La rapidità del fenomeno sembra indicarne la causa piuttosto in un fatto di inibizione attiva del sistema enzimatico in questione da parte di sostanze formatesi nell'internodio decapitato, che in una diminuzione della concentrazione in enzimi, conseguente alla arrestata sintesi degli stessi.

B) *Effetti sul tenore in AA e DHA.*

Questi appaiono evidenti dai dati della Tabella II e della fig. 2, che mostrano come il livello dell'AA, due ore dopo la decapitazione, risulti inferiore del 20 % a quello dei controlli, mentre il tenore in DHA sale fino a superare i controlli di circa il 40 %, cosicché il rapporto AA/DHA si sposta da un valore di 6 ad uno di 3,4 (il fatto che la variazione percentuale del DHA sia maggiore di quella, opposta, dell'AA è evidentemente determinato dalle diverse concentrazioni di base dei due composti). Interessante appare pure il comportamento dell'AA e del DHA nel periodo successivo alle prime due ore dalla decapitazione: Tra la seconda e la quinta ora compare infatti una tendenza,

negli internodi decapitati, al ristabilimento dell'equilibrio iniziale tra le due forme ridotta e ossidata: tendenza che sarebbe suggestivo ricondurre alla neoformazione di nuovi centri produttori di auxina, in sostituzione di quelli asportati, in corrispondenza della zona ferita dell'internodio (« apice fisiologico » della prima letteratura sugli ormoni di crescita, Went e Thimann [21])

TABELLA II.

Contenuto in AA e DHA in segmenti apicali di internodi normali e decapitati. Dati come medie di due esperienze.

	AA, γ /gm p. fresco	DHA, γ /gm p. fresco	AA/DHA
Controllo tempo 0	480	80	6
Controllo tempo 2 ore	472	75	6
Decapitati da 2 ore	380	110	3,4
Decapitati da 5 ore	400	100	4

C) Effetti sul tenore in glutatione ridotto.

Una modesta ma significativa e precoce diminuzione della concentrazione in glutatione ridotto si rileva dai dati della Tabella III. Anche qui la variazione è massima nel periodo (30 min. primi) immediatamente successivo

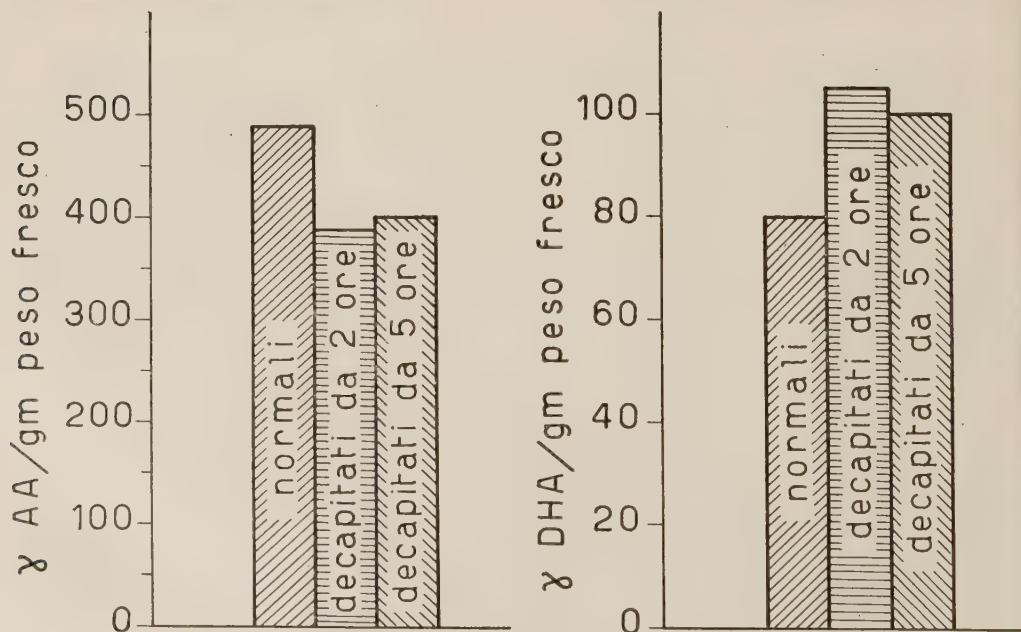


Fig. 2. - Variazioni del tenore in AA e DHA in segmenti apicali di internodi normali e decapitati da 2 a 5 ore di piantine eziolate di pisello.

alla asportazione dei tratti apicali, e successivamente tende ad attenuarsi, per un meccanismo presumibilmente analogo a quello prospettato per gli acidi AA e DHA. Le variazioni osservate del tenore in glutatione sono, in realtà, limitate; esse risultano peraltro confermate da numerose esperienze che qui, per brevità, non vengono riportate. Inoltre occorre tener presente il fatto che, di norma, il rapporto tra forma ridotta e forma ossidata del glutatione è, nei tessuti, fortemente spostato a favore della forma ridotta, per cui a variazioni anche limitate di questa devono corrispondere escursioni ben più notevoli del glutatione ossidato e, di conseguenza, anche del rapporto tra le due forme.

TABELLA III.

Contenuto in glutatione ridotto in segmenti apicali di internodi normali e decapitati.

Medie di 3 determinazioni. Materiale comparabile solo nell'ambito di ogni coppia saggi-controlli.

	Glutatione, in γ /gm p. fr.	diminuzione risp. il controllo
Controllo tempo 30 m. pr.	66	—
Decapitati da 30 m. pr.	55	16 %
Controllo tempo 60 m. pr.	74	—
Decapitati tempo 60 m. pr.	66	11 %
Controllo tempo 2 ore	57	—
Decapitati tempo 2 ore	51	10 %

CONCLUSIONI.

Riassumendo, i risultati della presente ricerca dimostrano come la rimozione dei centri produttori di auxina determini precocemente, nella zona in fase di attiva crescita dell'internodio distale di piantine eziolate di pisello, accanto all'arresto pressoché totale ed immediato della crescita:

I. — Una netta caduta dell'attività glucoso-6-fosfato deidrogenasica;

II. — Un notevole spostamento verso la forma ossidata dell'equilibrio tra AA e DHA.

III. — Una modesta ma significativa diminuzione del tenore in glutatione ridotto.

Questi risultati impostano, in sede di interpretazione, due problemi principali:

a) Se le variazioni osservate a carico dell'attività deidrogenasica, del tenore in DHA e AA, e di quello in glutatione ridotto siano realmente deter-

minate dalla carenza auxinica conseguente all'asportazione dei centri apicali ovvero derivino da altra possibile causa (come alterazioni dei tessuti siti in corrispondenza della zona ferita, interruzione delle vie circolatorie, carenza in ormoni diversi dall'auxina, ecc.).

b) Se le stesse variazioni stiano tra loro in un rapporto di interdipendenza e, in caso affermativo, quale sia l'ordine e la natura di tale interdipendenza.

Ci sembra che alla prima domanda si possa senz'altro rispondere affermativamente. Risultati precedentemente ottenuti dimostrano come il trattamento con auxina di segmenti isolati di internodi di pisello e di coleoptili d'avena determini, oltre al consueto aumento dell'attività respiratoria (compresa quella di determinati sistemi deidrogenasici) anche un aumento del tenore in AA [22]; e altri dati, recentemente ottenuti in questo laboratorio, indicano come in analoghe condizioni sperimentali l'auxina induca, accanto all'aumento dell'AA, una corrispondente diminuzione del DHA [8] ed un significativo aumento della concentrazione in glutatione ridotto [23]. Poiché d'altra parte la localizzazione di centri produttori di auxina nella parte apicale dei giovani germogli di piselli è un fatto noto e dimostrato da tempo, la conclusione più ovvia è che le variazioni osservate negli internodi decapitati, di segno opposto a quelle indotte dal trattamento con auxina, derivino direttamente dalla carenza auxinica indotta dalla rimozione dei centri apicali.

Più complesso si presenta il secondo problema, quello del rapporto di interdipendenza tra i diversi effetti della carenza auxinica. I due sistemi dell'ascorbico e del glutatione sono strettamente collegati tra loro, nella cellula, dalla deidroascorbico riduttasi che catalizza la reazione: $GSH + DHA \rightarrow GS \cdot SG + AA$; quindi lo spostamento verso la forma ossidata dell'equilibrio di uno dei due sistemi sembra doversi rapidamente tradurre in un'analoga variazione di quello dell'altro; anche se appare assai più probabile, in base alla considerazione dell'apparente irreversibilità della reazione, che siano le variazioni del rapporto AA/DHA a trascinare quelle del sistema GSH/GS·GS che viceversa. D'altra parte anche la caduta dell'attività deidrogenasica può, a sua volta, interpretarsi tanto come una causa quanto come una conseguenza dello spostamento verso la forma ossidata dei sistemi dell'ascorbico e del glutatione: infatti, da un lato, il mantenimento dell'elevato livello, in glutatione ridotto nei tessuti dipende dall'attività di deidrogenasi del tipo della glucosio-6-fosfato deidrogenasi qui studiata, tramite la glutatione riduttasi [15], [16], e, dall'altro, è noto come tanto il glutatione ossidato quanto il deidroascorbico esplicino un'azione decisamente inibente sull'attività di diversi sistemi deidrogenasici. I tre fenomeni osservati si presentano così legati tra loro in un ciclo di interrelazioni apparentemente vizioso, nel quale riesce apparentemente impossibile stabilire quale sia l'elemento primariamente sensibile all'azione dell'auxina, e quali quelli solo secondariamente interessati: e la ricerca *in vivo*, da sola, appare del tutto impotente a risolvere il problema. Senonché un valido aiuto sembra a questo punto venir offerto dalle già citate

esperienze condotte *in vitro* [1], [11], che indicano come dosi fisiologiche di auxina esplichino, anche su preparati enzimatici solubili e su preparati mitocondriali, in assenza di glutatione e di substrati attaccabili da deidrogenasi, una significativa azione inibente sull'ossidazione dell'acido ascorbico. Questi risultati impostano, con ragionevole probabilità anche se non con definitiva certezza, la soluzione del nostro problema nel senso che la ripercussione primaria della carenza auxinica consista in un'intensificazione del ritmo di ossidazione dell'ascorbico, da cui conseguirebbe direttamente l'aumento della concentrazione dell'acido deidroascorbico del tessuto. L'aumento in DHA, d'altra parte, indurrebbe a sua volta l'ossidazione di parte del glutatione ridotto, e quindi la sua diminuzione negli internodi decapitati: e la caduta dell'attività glucoso-6-fosfato deidrogenasica (e presumibilmente anche di altri enzimi, e in genere della capacità ossidativa del tessuto) verrebbe interpretata come una conseguenza dell'azione inibente dell'acido deidroascorbico da un lato, e della forma ossidata del glutatione, dall'altro, su questo sistema enzimatico.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 18, 539 (1955).
- [2] S. TONZIG e E. MARRÈ, « Rend. Istituto Lombardo », 89, 243 (1955).
- [3] S. TONZIG e F. TREZZI, « N. Giorn. Bot. It. », n. s., 57, 535 (1950).
- [4] S. TONZIG e L. BRACCI, *Ibid.*, 58, 258 (1951).
- [5] S. TONZIG, F. TREZZI, G. LAUDI e E. MARRÈ, « Memorie Acc. Naz. Lincei », sez. III, 4, 8 (1955).
- [6] S. TONZIG e F. TREZZI, « N. Giorn. Bot. It. », n. s., 57, 515 (1950).
- [7] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 20, 77 (1956).
- [8] F. TREZZI, dati non pubblicati.
- [9] E. MARRÈ, G. LAUDI e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 19, 460 (1955).
- [10] E. MARRÈ, G. FORTI e G. PECE, « Rend. Acc. Naz. Lincei », in corso di stampa.
- [11] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 19, 320 (1955).
- [12] M. YAMAGUCHI and M. A. JOSLIN, « Plant Phys. », 26, 757 (1951).
- [13] E. MARRÈ e G. LAUDI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 649 (1954).
- [14] C. S. HANES, D. H. DIXON and G. E. CONNELL, in « Glutathione », Academic Press (1954).
- [15] E. E. CONN and B. VENNESLAND, « Journ. Biol. Chem. », 192, 17 (1951).
- [16] E. RACKER, *Ibid.*, 217, 855 (1955).
- [17] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Rend. Istituto Lombardo », 87, 135 (1954).
- [18] E. MARRÈ e O. SERVETTAZ, « Giorn. Bioch. », 4, 10 (1955).
- [19] J. H. ROE and C. A. KUETHER, « Journ. Biol. Chem. », 147, 99 (1943).
- [20] R. R. GRUNERT and P. H. PHILLIPS, « Arch. Bioch. », 30, 217 (1951).
- [21] F. W. WENT and K. V. THIMANN, « Phytohormones ».
- [22] E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 16, 758 (1954).
- [23] E. MARRÈ, e O. ARRIGONI, dati non pubblicati.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — XVIII. *Inibizione da acido deidroascorbico dell'attività fosforilativa di preparati mitocondriali* (*). Nota di ERASMO MARRÈ, GIORGIO FORTI e GERARDO PECE, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

Risultati precedentemente ottenuti dimostravano come l'acido deidroascorbico, a concentrazioni relativamente modeste (tra 10^{-3} e 10^{-4} M) inibisca sensibilmente l'attività deidrogenasica a carico di diversi substrati in preparati enzimatici e mitocondriali d'origine sia vegetale che animale ([1], [2], [3]). L'interesse di questi dati deriva dalla generale diffusione dell'acido deidroascorbico (DHA) negli organismi viventi, e dalla sua spiccata azione fisiologica. Nelle piante, il sistema acido ascorbico-acido deidroascorbico occupa una posizione di importanza singolare nella regolazione della crescita e, più generalmente, dei processi metabolici di cui questa è espressione: il controllo dello stato di ossidoriduzione del sistema sembra infatti direttamente controllato dagli ormoni di crescita, o auxine; e il generico effetto di stimolo sul metabolismo cellulare spiegato dalle auxine sembra, in base ad una recente ipotesi, potersi almeno in buona parte spiegare appunto in base alla capacità di queste sostanze di mantenere su un livello ridotto la concentrazione del DHA nei tessuti ([4], [5], [6]). Di fatto, l'azione inibente del DHA su processi fisiologici quali la crescita per distensione [7] e la respirazione [8] appare ormai ben documentata: e anche l'effetto, antagonista a quello auxinico, della somministrazione di acido ascorbico (AA) ([5], [7], [8]) sembra doversi interpretare come essenzialmente determinato dalla rapida trasformazione, nei tessuti, della forma ridotta (AA) in quella ossidata (DHA) ed all'azione diretta di quest'ultima. Anche per quanto riguarda gli organismi animali, l'azione del DHA in quanto tale (e cioè non in quanto trasformabile nei tessuti in AA) sembra potersi considerare di tipo genericamente inibente: citiamo tra i dati più significativi in tal senso quelli di Patterson e Lazarow ([9], [10]) circa la capacità del DHA di indurre una forma particolare di diabete, simile a quello da allossana, e presumibilmente riconducibile all'inibita attività di particolari elementi del pancreas, e quelli di Lindan e Work [11], [12] che indicano come determinate condizioni patologiche siano contrassegnate da un deciso spostamento del rapporto AA/DHA verso la forma ossidata.

Una valutazione precisa del significato fisiologico del DHA presume ovviamente la conoscenza del suo meccanismo biochimico d'azione. I risultati delle esperienze qui riferite portano un ulteriore contributo in questo senso, in quanto dimostrano non solo come anche l'attività fosforilativa, accanto a quella ossidativa, sia marcatamente inibita dal DHA, ma come l'entità del-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

l'azione inibente a carico delle fosforilazioni sia nettamente superiore a quanto avrebbe potuto attendersi quale semplice diretta conseguenza del rallentamento del ritmo ossidativo; suggerendo così un intervento specifico dell'acido deidroascorbico sui processi di formazione e trasferimento dei legami ad alto contenuto energetico.

MATERIALI E METODI.

I mitocondri sono stati preparati dal fegato di ratti albin, dal peso di circa 200 gm., seguendo, nelle linee fondamentali, la tecnica di Kielley e Kielley [13] e di Sikievitz e Potter [14]. Tutte le operazioni, fino all'inizio dell'incubazione dei preparati mitocondriali con i substrati, sono state eseguite in camera fredda a temperatura tra 0 e 3 gradi C. Il fegato di uno o due ratti era immerso, subito dopo l'estrazione, in soluzione raffreddata di Tris 0,05M, schiacciato in mortaio, e la poltiglia risultante passata rapidamente attraverso uno strato di garza, portata poi a 20 cc. con Tris e saccarosio, ed omogeneizzata in omogeneizzatore di Potter-Elvehjem. L'omogenato veniva quindi centrifugato per 7 m. primi a 2.000 giri, e dal liquido soprannatante, raccolto per decantazione, i mitocondri precipitati centrifugando a 20.000 gravità per 20 m. primi, quindi sospesi in tris e saccarosio, riprecipitati, risospesi e aliquote della sospensione aggiunte ai mezzi di incubazione come indicato nei singoli esperimenti.

Laddove non si è misurato il consumo di ossigeno, il preparato enzimatico è stato incubato in becker da 25 cc., agitati meccanicamente al ritmo di 70 oscillazioni al minuto. Le misure dell'intensità ossidative sono state eseguite in apparecchio di Warburg di tipo convenzionale, con aria come fase gassosa. L'attività fosforilativa è stata misurata determinando la incorporazione sull'AMP (1), usato come accettore di fosfato, del fosfato inorganico radioattivo (P^{32}) aggiunto al mezzo di incubazione del preparato enzimatico. Per la separazione degli adenosinfosfati si è seguita la tecnica descritta da Crane e Lipmann [15], basata sulla proprietà della Norite A di adsorbire selettivamente e quantitativamente gli adeninnucleotidi. Il numero di micromole di fosfato inorganico incorporate nell'ATP nelle diverse condizioni sperimentali è stata determinata in base all'attività specifica del fosfato inorganico aggiunto all'incubato. La validità, ai fini quantitativi, di questa procedura ci è stata dimostrata da prove di controllo in cui la diminuzione del fosfato inorganico nel mezzo di incubazione veniva determinata dosando il fosfato con il metodo di Briggs [16]. Il rapporto tra micromole di fosfato fissato nell'ATP e microatomi di O_2 consumati è stato calcolato sottraendo al consumo di ossigeno il valore ottenuto in assenza di substrato ossidabile, in quanto alla respirazione endogena non è apparso corrispondere alcuna capacità fosforilativa.

L'AMP e l'ATP impiegati nelle esperienze qui descritte sono stati ottenuti dalla ditta «Sigma» di St. Louis. Il DHA è stato preparato al momento dell'uso, ossidando con bromo l'acido ascorbico (Merck), eliminando il bromo in eccesso in corrente d'azoto, e stabilizzando quindi la soluzione di DHA così ottenuta con l'aggiunta di 1/5 del volume di EDTA 3% e di 1/5 del volume di Tris 0,2 M; la soluzione stabilizzata veniva portata a pH 6 con NaOH solo immediatamente prima dell'aggiunta al preparato enzimatico, al fine di prevenire la trasformazione spontanea del DHA in DKG. Per la preparazione del DKG (o meglio di una miscela di prodotti di trasformazione del DHA, in cui il DKG è quantitativamente prevalente), una soluzione di DHA veniva portata per 15 minuti primi a pH 8 con NaOH, quindi addizionata di EDTA e Tris come detto sopra, e portata pH 6.

(1) Abbreviazioni usate: AMP, acido adenosin-5-fosforico; ATP, adenosintrifosfato; DHA, acido deidroascorbico; DKG, acido 2-3 dichetogulonico; EDTA, etilendiaminotetracetato; Tris, triidrossimetilaminometano.

ESPERIENZE E RISULTATI.

Abbiamo studiato l'azione del DHA, alla concentrazione di 10^{-3} M, sulla attività fosforilativa associata all'ossidazione del β -idrossibutirrato e del glutammato, controllando l'eventuale interferenza di impurità probabilmente presenti nel DHA con prove in cui il DHA era stato trasformato, come sopra descritto, in DKG, composto che precedenti ricerche [2] avevano dimostrato privo di azione su sistemi enzimatici respiratori decisamente inibiti dall'acido deidroascorbico.

L'inibizione dell'attività fosforilativa in presenza di β -idrossibutirrato (Tabella I), studiata aggiungendo il DHA al mezzo di incubazione prima dell'aggiunta del preparato mitocondriale, è risultata del 37 %; è verosimile che in queste condizioni (pH 7,3), parte del DHA si trasformi in DKG prima di poter interagire con i sistemi enzimatici ossidativi e fosforilativi. La leggera inibizione riscontrata in presenza di DKG potrebbe facilmente imputarsi a piccole quantità residue di DHA nella soluzione.

TABELLA I.

Azione del DHA e del DKG sulla fosforilazione ossidativa di mitocondri di fegato di ratto.

Mezzo di incubazione: MgCl_2 0,005 M, NaF 0,017 M, KCl 0,025 M; fosfato inorganico 50 μM , contenente P^{32} per un totale di 50.000 c.p.m.; AMP 24 μM , citocromo c 2×10^{-5} M. Sospensione di mitocondri in Tris 0,05 M, pH 7,3 e saccarosio 0,35 M, 0,4 c.c., corrispondenti a circa 0,35 grammi di fegato. Volume finale: 3 c.c. Incubazione a temperatura ambiente.

I dati sono la media di determinazioni in doppio.

Aggiunte	Tempo di incubazione	Radioattività negli adenin-nucleotidi	Fosfato incorporato negli adenin-nucleotidi μM	% Inibizione
β -idrossibutirrato 0,02 M .	40 min. pr.	4830	4,8	—
Idem + DHA 10^{-3} M . . .	40 » »	3065	3,0	37,5
Idem + DKG 10^{-3} M . . .	40 » »	4455	4,4	8,4
Nessuna aggiunta	40 » »	0	0	—
Idem + DHA 10^{-3} M . . .	40 » »	50	0	—
Idem + DKG 10^{-3} M . . .	40 » »	150	0	—
Idem —	0 » »	0	0	—

Nelle esperienze eseguite in presenza di glutammato, (anziché idrossibutirrato) quale substrato ossidabile, l'inibizione da DHA (aggiunto questa volta direttamente alla sospensione mitocondriale 5 minuti prima del substrato) è risultata del 70 % (Tabella II).

TABELLA II.

Azione del DHA sulla fosforilazione ossidativa dei mitocondri di fegato di ratto.

Mezzo di incubazione come nella tabella I. Fosfato inorganico $52 \mu\text{M}$, con 65.000 c.p.m. dovuti al P^{32} . Mitocondri incubati per 5' con DHA prima di essere aggiunti al mezzo contenente il substrato.

I dati sono la media di esperienze in doppio.

Aggiunte	Tempo di incubazione	Radioattività negli adenin-nucleotidi c.p.m.	P incorporato negli adenin-nucleotidi μM	% Inibizione
Glutammato $0,01 \text{ N}$	30 min. pr.	5461	4,37	—
Glutammato + DHA 10^{-3} M	30 » »	1620	1,29	70,5
Glutammato	0 » »	0	0	—
Nessuna aggiunta	40 » »	17	0	—

TABELLA III.

Azione del DHA sull'attività ossidativa e fosforilativa di mitocondri di ratto.

Mezzo di incubazione: MgCl_2 $15 \mu\text{M}$; NaF $9 \mu\text{M}$; KCl $75 \mu\text{M}$; AMP $25 \mu\text{M}$; ATP $4 \mu\text{M}$; Cito-cromo C a conc. 10^{-5} M ; fosfato inorganico 61 M , contenente P^{32} con 54.000 c.p.m. TRIS $0,04 \text{ M}$, pH 7,3; saccarosio $0,25 \text{ M}$. Sospensione mitocondri: 1 cc. La soluzione contenente il fosfato inorganico, l'AMP e l'ATP è stata aggiunta dal diverticolo laterale della vaschetta di Warburg, dopo 10 m. primi di equilibramento alla temperatura di 22 gradi C. Volume finale: 3,55 cc. I mitocondri erano stati incubati per 6 min. primi a temperatura ambiente con DHA $1,6 \cdot 10^{-3} \text{ M}$, oppure (controlli) con Tris e EDTA prima dell'aggiunta del substrato. Tempo di incubazione: 27 min. primi. Nelle cifre riportate è tenuta in considerazione la diluizione del P^{32} da parte del fosfato dei mitocondri e da parte dell'ATP aggiunto. L'attività specifica che ne risulta è di 761 c.p.m./ μM .

Aggiunte	O_2 consumato micromol. μM	Radioattività negli adenin-nucleotidi c.p.m.	P inorganico incorporato negli adenin-nucleotidi μM	P/O
Nessuna (1)	1,63	(tracce)	0,5	0,0
DHA (1)	2,03	»	0,7	0,0
Glutammato $0,01 \text{ M}$	6,42	12072	15,8	1,7
Glutammato $0,01 \text{ M}$	5,65	11005	14,5	1,8
Glutammato $0,01 \text{ M}$	5,29	9735	12,8	1,8
Glutammato $0,01 \text{ M}$ e DHA	2,70	(tracce)	0,7	0,0
Glutammato $0,01 \text{ M}$ e DHA	2,48	»	0,5	0,0
Glutammato $0,01 \text{ M}$ e DHA	2,44	»	0,7	0,0

(1) Dati come media di due prove.

Constatata l'azione inibente del DHA sull'attività ossidativa [3], ed accertata con le esperienze di cui sopra l'inibizione dell'attività fosforilativa ad essa associata (risultato fin qui facilmente prevedibile), ci siamo chiesti se l'azione del DHA non potesse esplicarsi anche specificamente sui meccanismi fosforilativi, nel qual caso ci sarebbe da aspettarsi una caduta del rapporto fosforilazione/ossidazione. Servendoci ancora del glutammato, e aumentando lievemente la concentrazione dell'inibitore (da 10^{-3} a $1,6 \times 10^{-3}$ M), abbiamo determinato contemporaneamente, sulle stesse prove, il consumo di ossigeno e l'incorporazione di fosfato inorganico nell'ATP (Tabella III). I dati dimostrano con evidenza che il DHA, in queste condizioni, porta ad una praticamente completa soppressione della capacità fosforilativa, mentre l'inibizione del consumo di ossigeno, anche sottratta l'attività endogena (in assenza di glutammato), risulta in media dell'ordine dell'87 %: risultato che suggerisce la probabilità che i due processi vengano colpiti dall'inibitore in modo diverso, e forse anche in qualche modo indipendentemente l'uno dall'altro.

CONCLUSIONI.

I risultati della presente ricerca, coordinati con quelli precedentemente ottenuti, mettono in sempre maggiore risalto l'azione dell'acido deidroascorbico sul metabolismo cellulare.

Innanzitutto viene esaurientemente confermato il reperto di una azione inibente del DHA su determinate reazioni ossidative. Nelle esperienze precedenti tale azione era stata infatti dedotta esclusivamente in base all'inibizione dell'attività deidrogenasica, misurata col metodo al tetrazolio, metodo non esente da critiche, mentre nel caso presente l'inibizione da DHA dell'attività ossidativa è stata determinata misurando direttamente il consumo di O_2 .

In secondo luogo, i risultati qui riferiti mettono per la prima volta in evidenza la decisa inibizione, da parte del DHA, dell'attività fosforilativa associata all'ossidazione di due substrati diversi, il β -idrossibutirrato e il glutammato. Apparentemente, questo risultato sembrava scontato *a priori*, una volta accertata l'azione dell'inibitore sull'attività ossidativa, dato il rapporto di dipendenza delle fosforilazioni rispetto le ossidazioni; e in tal senso la diminuita capacità fosforilativa non costituisce che un'ulteriore riprova dell'azione del deidroascorbico su quella ossidativa. Senonché i dati ottenuti misurando simultaneamente gli effetti del DHA sul consumo di O_2 e sulla fissazione di fosfato inorganico, e cioè sul rapporto fosforilazione/ossidazione (P/O) mettono in luce un aspetto del tutto nuovo: l'azione sulle fosforilazioni, apparendo significativamente più efficace di quella sul consumo di O_2 , non sembra potersi a questa ricondurre se non parzialmente. Il DHA sembra così assumere, accanto al carattere di inibitore delle ossidazioni, quello di composto capace di dissociare le ossidazioni dalle fosforilazioni: fatto che se confermato rivestirebbe un interesse notevole, data la natura di normale metabolita fisiologico del composto, e che ci riserviamo di studiare dettagliatamente in ulteriori ricerche.

Dal punto di vista del significato fisiologico del DHA, la constatazione apparentemente definitiva della sua azione inibente sul metabolismo ossidativo e fosforilativo appare di notevole portata. In campo animale questi dati sembrano aprire una possibile via di interpretazione biochimica del meccanismo di insorgenza del diabete da deidroascorbico [9]. Essi pongono inoltre in una luce nuova il significato dell'aumento del DHA nei tessuti in particolari condizioni patologiche: aumento che sembra così doversi considerare non solo come sintomo di un alterato ricambio dell'ascorbico o del glutatione (in quanto quest'ultimo presumibilmente presiede al mantenimento dell'acido ascorbico nello stato ridotto [17]) ma anche come causa diretta, a sua volta, di gravi conseguenze a carico del metabolismo ossidativo ed energetico.

Nel campo della fisiologia vegetale, e, più specificamente, in quello del ciclo di ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico da tempo in atto in questo Istituto, l'interesse dei risultati qui riferiti (nei limiti in cui dati ottenuti su materiale animale sono applicabili a quello vegetale) sta nel fatto che essi confermano in pieno la funzione inibente dell'acido deidroascorbico su dei processi fisiologici di base, quali respirazione e sintesi di legami ad alto contenuto energetico, e sulle loro manifestazioni ultime, morfologiche, quali la crescita. E anche l'ipotesi per cui un momento essenziale dell'azione fisiologica delle auxine consisterebbe nella loro capacità di controllare il tenore in DHA nei tessuti trova in questi risultati un nuovo argomento a favore.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. TONZIG, F. TREZZI, G. LAUDI e E. MARRÈ «*Memorie Acc. Naz. Lincei*», Sez. III, 4, 8 (1955).
- [2] E. MARRÈ, G. LAUDI e O. ARRIGONI, «*Rend. Acc. Naz. Lincei*», 19, 460 (1956).
- [3] G. PECE, G. LAUDI e E. MARRÈ, *ibid.*, in corso di stampa.
- [4] E. MARRÈ e O. ARRIGONI, *ibid.*, 18, 539 (1955).
- [5] S. TONZIG e E. MARRÈ, «*Rend. Istituto Lombardo*», 89, 243 (1955).
- [6] E. MARRÈ e G. LAUDI, «*Rend. Acc. Naz. Lincei*», in corso di stampa.
- [7] E. MARRÈ e G. LAUDI, *ibid.*, 20, 77 (1956).
- [8] F. TREZZI, dati non pubblicati.
- [9] J. PATTERSON and A. LAZAROW, «*Journ. Biol. Chem.*», 186, 141 (1950).
- [10] J. PATTERSON and A. LAZAROW, *ibid.*, 183, 81 (1950).
- [11] O. LINDAN and E. WORK, «*Bioch. Journ.*», 55, 554 (1953).
- [12] O. LINDAN and E. WORK, *ibid.*, 55, 562 (1953).
- [13] W. KIELLEY and R. K. KIELLEY, «*Journ. Biol. Chem.*», 191, 485 (1951).
- [14] P. SIEKEVITZ and VAN R. POTTER, *ibid.*, 201 (1953).
- [15] R. K. CRANE and F. LIPMANN, *ibid.*, 201, 235 (1953).
- [16] A. P. BRIGGS, *ibid.*, 56, 255 (1924).
- [17] B. VENNESLAND and E. E. CONN, in «*Glutathione*», Academic Press, 1954.

Fisiologia. — *Effetti della recisione delle connessioni nervose sui fenomeni elettrici spontanei della corteccia cerebellare* ⁽¹⁾. Nota di PAOLO CREPAX e FRANCESCO INFANTELLINA, presentata ^(**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Le indagini di Burns ⁽¹⁾ [cfr. anche Burns e Grafstein ⁽²⁾; Infantellina ⁽³⁾], hanno mostrato come un lembo di corteccia cerebrale privato di ogni connessione nervosa con le parti circostanti, di solito non manifesti attività elettrica spontanea.

Per quanto concerne la corteccia cerebellare, si ammette generalmente che l'attività elettrica che essa manifesta sia indipendente dalle connessioni del cervelletto con le altre strutture nervose e delle diverse parti dell'organo tra loro [Spiegel ⁽⁴⁾, Dow ⁽⁵⁾, Snider e Eldred ⁽⁶⁾, Brookhart, Moruzzi e Snider ⁽⁷⁾], sebbene in realtà le rispettive indagini siano state eseguite in preparati nei quali l'isolamento della corteccia cerebellare non era completo ovvero, quando lo era, veniva ottenuto in condizioni tali da consentire alla corteccia medesima una sopravvivenza solo di pochi minuti.

Ci siamo proposti di attuare il completo isolamento nervoso di un piccolo lembo di corteccia cerebellare, assicurando al lembo stesso una irrorazione sanguigna che ad esso consenta una prolungata sopravvivenza. Un preparato che risponda a requisiti siffatti può allestirsi in Gatti decerebrati a livello intercolliculare, nelle quali condizioni è agevole procedere all'isolamento della corteccia cerebellare della parte vermiana del lobulo V [Larsell ⁽⁸⁾], lasciando integri i vasi piali che irrorano tale parte dell'organo. I dettagli della tecnica da seguirsi per l'allestimento saranno esposti nel lavoro *in extenso*. La completa recisione delle connessioni nervose tra il lembo e le parti circostanti del cervelletto, è stata riscontrata nei primi esperimenti mediante l'esame istologico di sezioni seriate e in seguito con l'esame macroscopico dei pezzi fissati in formalina al 10%.

La derivazione dell'attività elettrica corticocerebellare è stata fatta con metodo monopolare e dipolare. Nella derivazione monopolare, l'elettrodo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Bologna, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXI, 50 (1950); CXII, 156 (1951).

(2) B. D. BURNS a. B. GRAFSTEIN, « J. Physiol. », CXVIII, 412 (1952).

(3) F. INFANTELLINA, « Arch. Sci. biol. », XXXIX, 209 (1955).

(4) E. H. SPIEGEL, « Amer. J. Physiol. », CXVIII, 569 (1937).

(5) R. S. DOW, « J. Physiol. », XCIV, 67 (1938).

(6) R. S. SNIDER a. E. ELDRED, « Proc. Soc. exp. Biol. Med. », LXXII, 124 (1949).

(7) J. M. BROOKHART, G. MORUZZI a. R. S. SNIDER, « J. Neurophysiol. », XIII, 465 (1953).

(8) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », XCIX, 135 (1953).

attivo era una micropipetta (diametro esterno della punta tra 50 e 150 μ ; resistenza tra 0,3–2 M Ω) riempita di una soluzione di NaCl al 0,9%; l'elettrodo indifferente, consistente in una sfera di Ag–AgCl, veniva posto su una zona necrotizzata (mediante elettrocoagulazione) del M. temporale. In derivazione dipolare, gli elettrodi erano costituiti da fili di platino del diametro di mm 2×10^{-2} , le cui estremità sferiformi distavano tra loro mm 0,5 all'incirca.

Abbiamo adoperato un preamplificatore a 4 stadi, a resistenza-capacità (Grass mod. P 4); in alcuni casi è stato usato un preamplificatore ad accoppiamento diretto [Tönnies⁽⁹⁾], le cui uscite erano collegate direttamente con le placche di deviazione dell'oscillografo (Allen Du Mont 322). La registrazione è stata fatta mediante una camera Grass.

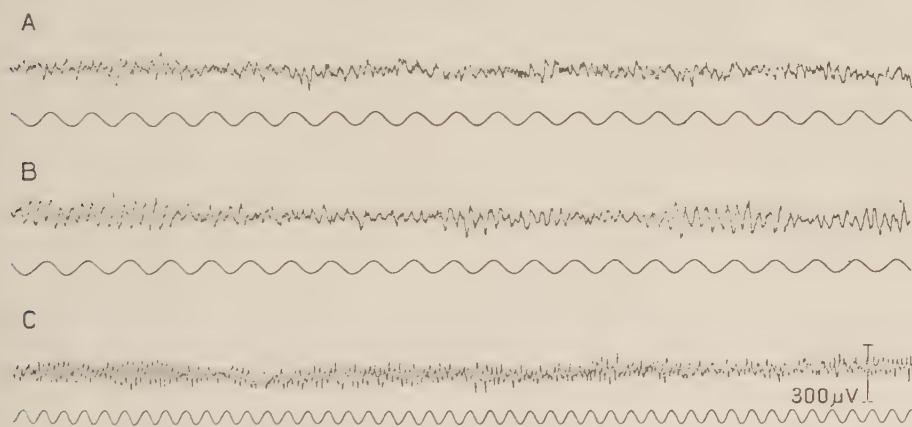


Fig. 1. – Attività elettrica spontanea derivata da una medesima lamella del lobulo V di cervelletto di Gatto, prima (A) e dopo (B e C) l'allestimento del lembo isolato.
Tempo = 20 msec.

Il lembo isolato di corteccia cerebellare di Gatto è provvisto di un'attività elettrica spontanea, che si mantiene imm modificata per parecchie ore (4–8 h) ed è costituita da onde di ampiezza all'incirca eguale (100–200 μ V) e di frequenza leggermente inferiore (del 20% ca.) all'ampiezza e rispettivamente alla frequenza delle pulsazioni del cervelletto integro: esse si presentano raggruppate in fusi assai simili a quelli propri dell'elettrogramma del preparato « cervello isolato » (fig. 1). Tale attività si può fondatamente attribuire agli aggregati neuronici del lembo: essa infatti è abolita in modo reversibile mediante cocainizzazione locale della superficie del preparato (fig. 2, 1, A–C) e in modo non reversibile mediante la recisione della pia madre e dei vasi che con questa si portano al lembo (fig. 2, 2, A–B). Infine, mediante elettrodi infissi nello spessore della corteccia del lembo (fili di platino di 20 μ , inguainati in sottile strato di vetro: resistenza 0,02–0,03 M Ω all'incirca), si registrano oscillazioni monofasiche negative (*spikes*), in tutto simili a quelle

(9) J. F. TÖNNIES, « Rev. sci. Instrum. », IX, 95 (1938).

derivabili dall'organo integro e interpretate come espressione dell'attività « tutto o nulla » delle unità corticocerebellari ⁽⁷⁾.

Le indagini da noi fatte sul lembo isolato di corteccia cerebellare di Gatto, mostrano come gli aggregati neuronici corticocerebellari manifestino un'attività elettrica spontanea anche quando tutte le connessioni tra la corteccia cerebellare e le altre parti del nevrasso siano state recise. E i concordanti risultati dei controlli eseguiti ci dispensano dal discutere se i potenziali elettrici registrabili dal preparato siano riferibili agli aggregati neuronici del lembo isolato ovvero siano diffusi dalle parti circostanti.

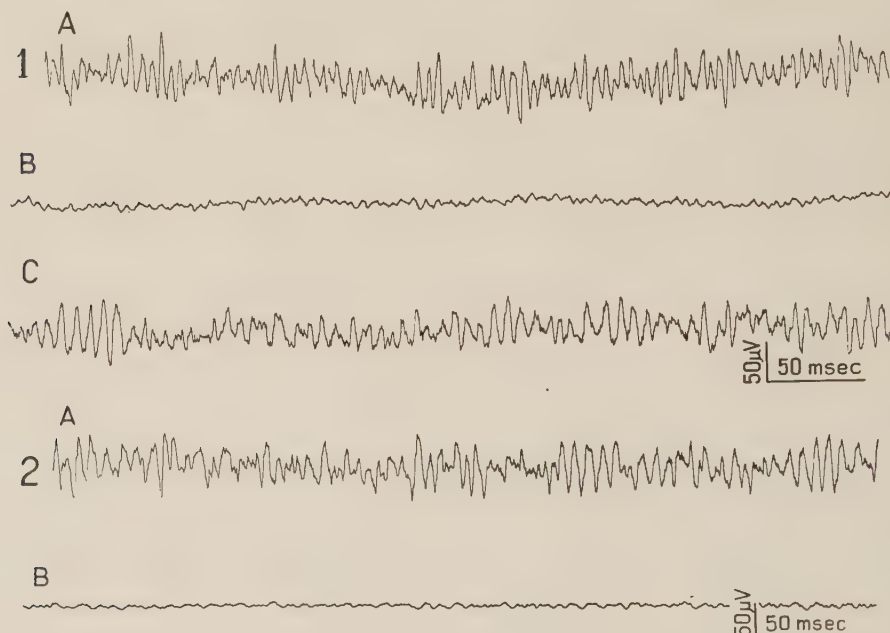


Fig. 2. - Modificazione dell'attività elettrica del lembo isolato di corteccia cerebellare di Gatto, per effetto del trattamento locale con cocaina e della recisione dei vasi piali che nutrono il preparato.

1. Tra A e B il lembo è stato trattato per la durata di 4 min con una soluzione di cocaina (cloridrato al 5 % in soluzione di NaCl al 0,9 %). A, attività elettrica spontanea del lembo registrata prima del trattamento. B, 5 min dopo l'inizio del trattamento. C, 20 min dopo B.

2. Tra A e B si recide la pia madre che connette il lembo corticocerebellare con le parti circostanti, interrompendo i vasi che si distribuiscono al lembo medesimo. A, attività elettrica spontanea del lembo prima della recisione. B, registrazione effettuata 5 min dopo la recisione dei vasi che si distribuiscono al lembo.

L'attività elettrica, ritmica e continua, che è presente in un lembo di corteccia cerebellare privato di ogni connessione nervosa estrinseca, pone un problema che s'identifica con quello più generale concernente le condizioni che determinano l'attività elettrica continua degli aggregati neuronici. Le ipotesi che sono state avanzate per spiegare i ritmi bioelettrici centrali si dividono, in sostanza, in due gruppi [cfr. Pupilli ⁽¹⁰⁾]: da una parte si è riguar-

(10) G. C. PUPILLI, *L'attività elettrica continua degli aggregati neuronici*, « Arch. Fisiol. », Suppl. II, 3 (1951).

dato l'automatismo neuronico come la conseguenza di una rieccitazione continua dei neuroni, effettuata mediante circuiti funzionali chiusi [Lorente de Nò^(11, 12, 13)], dall'altra si è data evidenza alla effettività di condizioni che consentono il mantenimento automatico di fenomeni di depolarizzazione e di ripolarizzazione alla superficie della cellula nervosa, conforme ai concetti esposti da Gesell^(14, 15).

Questa seconda teoria appare a tutta prima insufficiente a spiegare come l'isolamento di un lembo di corteccia cerebrale [Burns^(1, 2), Burns e Grafstein⁽³⁾] ovvero di corteccia cerebellare abbia conseguenze tanto diverse, rispetto all'attività elettrica continua degli aggregati neuronici, essendo l'attività abolita nel primo caso e imm modificata nel secondo; il che potrebbe invece trovare una spiegazione nelle caratteristiche dei circuiti attraverso i quali si attua nei due preparati il rieccitamento neuronico. La questione è assai complessa: i caratteri morfologici dei circuiti, formati da più neuroni ovvero mediante sinapsi asso-dendritiche di uno stesso neurone e alimentati dagli impulsi insorti in un dato neurone e a questo ritrasmessi, non consentono di prevedere con sicurezza quali effetti funzionali gl'influssi esercitano sul neurone stesso. I dati morfologici andrebbero quindi integrati coi risultati dell'analisi funzionale, la quale per altro concerne generalmente fenomeni che possono importare livelli d'integrazione diversi. Le considerazioni che qui esponiamo non si sottraggono evidentemente a tali limitazioni.

Le proprietà funzionali del lembo isolato di corteccia cerebrale dimostrano che un circuito del tipo di quello che è in atto a livello delle cellule piramidali degli strati profondi della corteccia medesima, e costituito da un certo numero di cellule del tipo B [cfr. Burns e Grafstein⁽³⁾] disposte in serie e delimitanti complessivamente circuiti della circonferenza di 2 mm ca. [Burns⁽²⁾], è inadatto al mantenimento di un ritmo bioelettrico spontaneo.

Circuiti simili per certi aspetti, ma di diversa estensione e costituzione, si hanno nella corteccia cerebellare connessa coi nuclei cerebellari. Le fibre rampicanti, le quali sono rappresentate principalmente da collaterali ricorrenti delle fibre cerebellifughe originate nei nuclei stessi ovvero da assoni primari delle piccole cellule nucleari [Carrea, Reissig e Mettler⁽¹⁶⁾], entrano in contatto coi neuroni della corteccia cerebellare [Scheibel e Scheibel⁽¹⁷⁾], tanto coi granuli e con le cellule di Purkinje, quanto con le cellule stellate e quelle dei canestri. Secondo Scheibel e Scheibel⁽¹⁷⁾, che hanno sottoposto ad

(11) R. LORENTE DE NÒ, « Cold Spring Harbor Symp. quant. Biol. », IV, 339 (1936).

(12) R. LORENTE DE NÒ, « J. Neurophysiol. », I, 207 (1938).

(13) R. LORENTE DE NÒ, « J. Neurophysiol. », II, 402 (1939).

(14) R. GESELL, « Amer. J. Physiol. », CXXVI, 500 P (1939).

(15) R. GESELL, « Ergb. Physiol. », XLIII, 477 (1940).

(16) R. M. E. CARREA, M. REISSIG and F. A. METTLER, « J. comp. Neurol. », LXXXVII,

321 (1947).

(17) M. E. SCHEIBEL and A. B. SCHEIBEL, « J. comp. Neurol. », CI, 733 (1954).

accurate indagini le terminazioni intracorticali delle fibre rampicanti, tra queste e gli elementi corticali si stabiliscono contatti sinaptici più importanti ed estesi di quanto si sia finora ammesso e mediante i contatti stessi si costituisce «a series of fed backs from various stages of the intracortical pathways», di guisa che i circuiti così formati «seem to form closed loops with collaterals so arranged that activation of efferent units may occur simultaneously with reactivation of the chain»⁽¹⁷⁾. Va rilevato come la possibilità ora prospettata sussista certamente nella corteccia cerebellare connessa coi nuclei; ma quando la corteccia venga da questi separata, gli impulsi condotti dalle fibre rampicanti vengono a mancare e quindi una riattivazione intracorticale dei circuiti anzidetti appare possibile solo nell'ipotesi che le collaterali ricorrenti degli assoni delle cellule di Purkinje, descritte da Golgi^(18, 19) e Cajal⁽²⁰⁾, alimentino i circuiti stessi. In realtà, mentre l'effettività di tali connessioni deve ritenersi tuttora insufficientemente documentata [Scheibel e Scheibel⁽¹⁷⁾], sono ben dimostrati i contatti sinaptici tra le collaterali anzidette e le cellule di Purkinje; ed i circuiti intracorticali, che in tal modo si costituiscono, hanno senza dubbio caratteristiche tali da poter essere riguardati come lo strumento della rieccitazione continua delle cellule medesime.

Rispetto alle loro probabili funzioni, le collaterali assoniche ricorrenti delle cellule di Purkinje e degli altri elementi nervosi in cui esse sono presenti (motoneuroni spinali, cellule di Müller, neuroni reticolari, cellule piramidali della corteccia cerebrale, cellule di Mauthner) vengono distinte in rinforzanti, reclutanti e inibitorie [Retzlaff⁽²¹⁾]. Le collaterali rinforzanti e reclutanti si portano dall'assone di un neurone al pericario ovvero ai dendriti, rispettivamente dello stesso neurone o di un neurone adiacente: la loro funzione consisterebbe nell'accrescere, nel neurone a contatto del quale terminano, la differenza di potenziale tra i dendriti e il punto di origine del neurite, con l'effetto d'intensificare il ritmo di scarica del neurone stesso. Le collaterali inibitorie vanno dall'assone di una cellula al punto di origine dell'assone della cellula contigua e la loro funzione consisterebbe nell'inibire la scarica neuronica: esse diminuirebbero nel neurone, sul quale terminano, la differenza di potenziale tra i dendriti e il punto di origine del neurite.

Secondo Retzlaff⁽²¹⁾ i tre tipi di collaterali assoniche ora descritti sono presenti nelle cellule di Purkinje della corteccia cerebellare di Cane e di Gatto, mentre solo collaterali di tipo inibitorio sono dimostrabili nelle cellule piramidali della corteccia cerebrale di Cane. Tale A. si limita a segnalare l'esistenza

(18) C. GOLGI, «Arch. it. Mal. nerv.», 1874. In *Opera omnia*, Milano, Hoepli, I, 99 (1903).

(19) C. GOLGI, «Riv. speriment. Fren.», 1882-83. In *Opera omnia*, Milano, Hoepli, I, 295 (1903).

(20) S. R. CAJAL, *Histologie du système nerveux de l'homme et des vertébrés*, Paris, Maloine (1909-1911).

(21) E. RETZLAFF, «J. comp. Neurol.», CI, 407 (1954).

dei diversi tipi di collaterali assoniche e non fornisce ragguagli circa alle loro percentuali rispettive: questo è certamente un aspetto morfologico del problema che occorrerà chiarire. Si può a ogni modo rilevare che la differenza di potenziale tra dendriti e punto di origine del neurite dipende dalla superficie dei dendriti [cfr. Gesell, Brassfield e Lillie ⁽²²⁾]; lo sviluppo dei quali è d'altra parte assai maggiore nelle cellule di Purkinje che nelle cellule piramidali [cfr. Retzlaff ⁽²¹⁾]. Il che potrebbe rendere ragione, nel caso delle cellule di Purkinje, della efficienza relativamente minore delle collaterali assoniche inibitorie e quindi della elevata frequenza e dell'autonomia del ritmo di scarica nelle unità corticocerebellari ⁽⁷⁾.

Morfologia comparata. — *Istogenesi del grande osso cardiaco dei bovini e sue trasformazioni strutturali durante l'accrescimento e la senescenza* ^(*). Nota riassuntiva di ANTONIO BARASA e ARMANDO GOBETTO, presentata ^(**) dal Socio G. LEVI.

Ci siamo proposti di studiare l'istogenesi del grande osso cardiaco dei bovini, il modo di svolgersi dei processi del suo accrescimento e le trasformazioni strutturali alle quali esso va incontro durante la vita. I dati che si rinvenivano nella letteratura su tali argomenti (Vaerst, 1888; Lech, 1910; Compagnoni, 1910; Favaro, 1912; Retterer e Lelièvre, 1912; Zannini, 1917) sono scarsi e spesso contraddittori.

Le nostre ricerche furono condotte su materiale prelevato da 8 feti di lunghezza compresa tra 25 e 85 cm. e da 20 soggetti di età variabile da pochi giorni di vita postnatale a 17 anni.

Risulta dalle nostre osservazioni che il grande osso cardiaco dei bovini è sempre preceduto durante la vita fetale da un modello cartilagineo, il quale si sviluppa in seno al tessuto fibroso aortico e si accresce rapidamente per assimilazione del tessuto fibroso stesso.

In periodi precoci (feti di 25-30 cm.) l'abbozzo è costituito da vari piccoli centri cartilaginei, separati da zone di connettivo fibroso; soltanto più tardi, per condificazione del connettivo interposto, i vari centri confluiscono in un'unica formazione cartilaginea, la quale assume la forma di una laminetta allungata cranio-caudalmente, situata nell'anello fibroso aortico, nella regione corrispondente alla zona di attacco della base della valvola semilunare posteriore destra.

(22) R. GESELL, C. R. BRASSFIELD a. R. H. LILLIE, « J. comp. Neurol. », CI, 331 (1954).

(*) Ricerche compiute con un contributo del C.N.R. presso il centro di Studi sull'accrescimento e presso l'Istituto di Anatomia degli animali domestici dell'Università di Torino.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

La struttura della cartilagine è alquanto insolita e non uniforme nelle sue varie parti. In certe regioni essa è tipicamente ialina, mentre in altre sono contenute nella sostanza fondamentale numerose fibre elastiche. Alla periferia poi l'abbozzo cartilagineo trapassa nel connettivo fibroso circostante attraverso una estesa zona di transizione ricca di cellule, nella quale, sparsi tra fasci grossolani di fibre collagene non mascherate, maturano via via che procede lo sviluppo, sempre nuovi piccoli nuclei di cartilagine, i quali vengono progressivamente assimilati.

L'accrescimento espansionale dell'abbozzo ha luogo da un lato per accrescimento interstiziale e progressiva differenziazione della cartilagine già costituita, dall'altro per attiva assimilazione del tessuto fibroso circostante.

Soltanto tardivamente, verso l'epoca della nascita, si organizza in corrispondenza delle due faccie della cartilagine un vero pericondrio; in corrispondenza dei margini e specialmente a livello delle due estremità - regioni nelle quali l'accrescimento permane molto più attivo - persiste invece una estesa zona di transizione con i caratteri di una fibro-cartilagine giovanile.

I processi di ossificazione dell'abbozzo cartilagineo iniziano durante il secondo mese di vita postnatale e si svolgono con ritmo estremamente rapido ed in modo tumultuario. L'ossificazione, dapprima esclusivamente encondrale, si manifesta con la formazione contemporanea o quasi in seno alla cartilagine, di vari centri di ossificazione, i quali finiscono ben presto per confluire. Soltanto quando la cartilagine della maggior parte del primitivo abbozzo è stata sostituita con trabecole ossee (durante il 3°-4° mese) iniziano i processi di ossificazione periostale.

Per più lungo tempo, fin verso i 15-18 mesi, permangono cartilaginee le due estremità, in corrispondenza delle quali l'accrescimento in lunghezza dell'abbozzo, per assimilazione del tessuto fibroso circostante, persiste attivo.

L'apposizione di osso primario periostale continua, con ritmo progressivamente più lento, fino verso la fine del secondo anno di vita; nel frattempo le trabecole ossee di origine encondrale vanno incontro ad intensi processi distruttivi per riassorbimento osteoclastico. Gli spazi ripieni dapprima di midollo rosso, sostituito successivamente da grasso, che esse delimitano, finiscono così per confluire in un'ampia cavità unica.

La compatta che circonda la cavità midollare dell'osso cardiaco risulta pertanto dopo i due anni esclusivamente di osso di origine periostale. L'osso primario compatto, a fibre intrecciate, che il periostio depone, viene successivamente sostituito per processi di rimaneggiamento con osteoni secondari a struttura lamellare.

Il rimaneggiamento inizia nelle parti profonde dell'osso primario e si estende via via a quelle più superficiali, di formazione più recente. Nella maggior parte degli individui di 4-5 anni, la compatta risulta quasi totalmente costituita da sistemi concentrici secondari; il materiale primario è a tale epoca di solito (esistono variazioni individuali) ridotto ad un esile strato superficiale, discontinuo, ed a piccole isole che permangono tra gli osteoni secondari.

Il rinnovamento del materiale osseo continua per tutta la vita, pur svolgendosi con il progredire dell'età con intensità minore e ritmo più lento. Gli osteoni secondari, precedentemente depositi, vengono a poco a poco sostituiti da nuovi sistemi concentrici più piccoli e più regolari; la compatta assume così la caratteristica « struttura a breccia ».

Inoltre con il progredire dell'età, la compatta dell'osso del cuore va incontro ad un considerevole grado di assottigliamento.

Ciò dipende da un lato dal perdurare sulla superficie interna della compatta, prospiciente il cavo midollare, di processi di riassorbimento, soltanto parzialmente compensati dalla deposizione di nuovo materiale sotto forma di sistemi discontinui di lamelle fondamentali interne; dall'altro dall'istituirsi più tardivamente anche di fenomeni di erosione sottoperiostale. In conseguenza di quest'ultimo fenomeno le faccie del grande osso cardiaco divengono scabre ed i margini frastagliati.

Da quanto è stato detto risulta pertanto che anche l'osso del cuore, il quale si forma tardivamente ed in una sede del tutto particolare, va soggetto durante tutta la vita a mutamenti strutturali dello stesso ordine di quelli che si manifestano nelle ossa scheletriche, pur differendo da queste sia morfologicamente, sia funzionalmente.

Embriologia. — « *Situs inversus viscerum* » provocato sperimentalmente in « *Botryllus schlosseri* » (Pallas) [*Ascidacea*] (*). Nota di ARMANDO SABBADIN, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Nei Botrilli, come negli altri Stolidobranchiati e in buona parte dei Flebobranchiati, in seguito al forte sviluppo della branchia, il tubo digerente viene rigettato a sinistra della stessa, lateralmente al suo tratto posteriore (figg. 1-2). Il cuore, in *Botryllus*, è situato ventralmente, al fondo della cavità branchiale, poco a destra della linea mediana segnata dal decorso dell'endostilo.

Nel corso di numerose osservazioni sulle colonie di *Botryllus* dei miei allevamenti, mi sono imbattuto in una giovane colonia ancora costituita da un solo blastozooide, nel quale il « situs viscerum » era invertito: il tubo digerente decorreva a destra della cavità branchiale, e il cuore era posto a sinistra della linea mediana, in una situazione dunque speculare rispetto alla normale. A quanto mi risulta, questo caso di inversione individuale della posizione dei visceri è il primo segnalato in *Botryllus* e nelle Ascidie in genere. Al fine di accertarmi della frequenza del fenomeno in *Botryllus*, ho controllato il *situs viscerum* in circa 1500 individui appartenenti ad alcune decine

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata dell'Università di Padova con l'aiuto finanziario del Consiglio Nazionale delle Ricerche e della « New York Zoological Society ».

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

di colonie seguite per più generazioni: una tale inversione non fu più riscontrata. L'anomalia è dunque del tutto eccezionale, del tipo « individuale monostrofo estremo » secondo la classificazione di Ludwig ⁽¹⁾ (frequenza $< 0,1\%$ dei casi), come quella che spontaneamente si manifesta anche nei Vertebrati.

Le colonie esaminate appartenevano in massima parte ad allevamenti di controllo. In piccola parte erano colonie sottoposte per più generazioni



Fig. 1. - *Situs viscerum* normale in un blastozoide di 1^a generazione, provvisto ai 2 lati di una gemma allo stadio 8. Colonia del lotto di controllo, dalla superficie centrale.



Fig. 2. - *Situs viscerum* normale in un blastozoide di 3^a generazione, provvisto di un'unica gemma a destra allo stadio 8. Colonia del lotto di controllo, dalla superficie centrale.

all'ablazione precoce di una parte delle gemme, allo scopo di studiarne gli effetti sull'intensità della gemmazione e sull'accrescimento negli individui superstiti.

Un'alta percentuale di casi di *situs inversus viscerum* ho invece ottenuto in un recente esperimento di asportazione tardiva di gemme (figg. 3-4). L'esperimento, che verrà descritto e discusso più dettagliatamente in altro lavoro, era stato eseguito allo scopo di saggiare le capacità di ripresa di gemme rimaste bloccate per più giorni ad uno stadio iniziale di sviluppo o di frammenti di gemme rimasti in sede dopo una precedente operazione di estirpazione. Era infatti già noto, ed io stesso avevo eseguito uno studio quantitativo del fenomeno ⁽²⁾, che non solo negli oozoidi, ma anche nei blastozooidi delle successive generazioni, si manifesta spesso una minore vitalità delle gemme di sinistra rispetto a quelle di destra, e delle eventuali

(1) W. LUDWIG, *Rechts-Links-Problem im Tierreich und beim Menschen*. J. Springer, Berlin 1932.

(2) A. SABBADIN, 1955. *Osservazioni sullo sviluppo, l'accrescimento e la riproduzione di « Botryllus schlosseri » (Pallas), in condizioni di laboratorio*, « Boll. Zool. », 22, 243.

gemme posteriori rispetto a quelle anteriori. Tali gemme appaiono in leggero ritardo di sviluppo, il quale spesso non riesce a superare un determinato stadio e le gemme successivamente degenerano (fig. 2). Gli esperimenti precedenti avevano già dimostrato ⁽³⁾ la capacità di ripresa di gemme a sviluppo bloccato, dopo l'asportazione, agli stadi 3-7 ⁽⁴⁾, delle gemme maggiori e anche una certa capacità di ricostituzione, di gemme precedentemente asportate, da frammenti rimasti *in situ*.

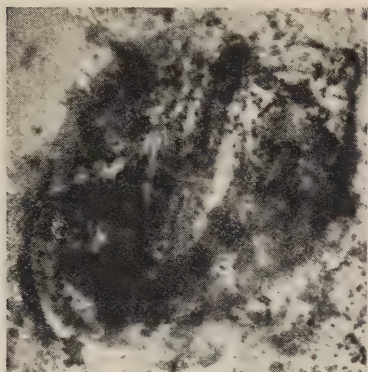


Fig. 3. — *Situs inversus viscerum* in un blastozoide di 6^a generazione, provvisto di una sola gemma a sinistra allo stadio 8. Colonia del lotto sperimentale, dalla superficie ventrale.



Fig. 4. — *Situs inversus viscerum* in un blastozoide di 3^a generazione, provvisto della sola gemma sinistra allo stadio 8. Colonia del lotto sperimentale, dalla superficie ventrale.

Nell'esperimento in questione le gemme di destra dei singoli blastozoidi, che sono quelle che si sviluppano maggiormente, venivano estirpate quando avevano raggiunto lo stadio 8', cioè al momento in cui cominciavano a presentare le prime pulsazioni cardiache ed erano a loro volta provviste di gemme allo stadio di semisfera (stadio 2). A questo stesso momento le gemme di sinistra e le eventuali gemme posteriori erano spontaneamente bloccate allo stadio 3, od erano state asportate 48 h dopo che avevano superato questo stadio.

In un gran numero di casi dopo l'estirpazione della gemma destra, la gemma sinistra abortita riprendeva il suo sviluppo e giungeva alla maturazione. Se anch'essa era stata asportata in precedenza e l'asportazione non era stata totale, poteva riprendere lo sviluppo il frammento di essa residuo. Altrimenti poteva riprendere lo sviluppo una gemma posteriore, o in assenza

(3) A. SABBADIN, 1956. *Studio sperimentale della gemmazione in « Botryllus schlosseri » (Pallas) [Ascidacea]*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 20, 379.

(4) Per la seriazione degli stadi di sviluppo dei blastozoidi, il metodo di allevamento delle colonie e le modalità di asportazione delle gemme cfr. Nota citata (« Rend. Acc. Naz. Lincei »).

di essa, si poteva verificare una ricostituzione e una ripresa dello sviluppo della stessa gemma destra asportata per ultima.

L'esperimento fu compiuto su una trentina di colonie, a partire dalle gemme destre di 2^a generazione, e fu continuato per alcune di esse fino alla 10^a generazione, mentre parecchie morirono per via prima della fine dell'esperimento. Le condizioni sperimentali erano tali da consentire la maturazione di un solo blastozooide per generazione in ciascuna colonia.

Nella presente Nota vengono analizzati i numerosi casi di *situs inversus viscerum* che si sono manifestati nel corso dell'esperimento e le conseguenze di tale fenomeno sulla gemmazione, e viene discusso il problema della determinazione del *situs viscerum* nei blastozoidi dei Botrilli.

TABELLA I.

« *Situs viscerum* » normale e invertito nelle gemme di differenti categorie.

Genitori	Gemme a <i>situs viscerum</i> normale				Gemme a <i>situs inversus viscerum</i>			
	A sviluppo normale	Ricostruite	A sviluppo tardivo	TOTALE	A sviluppo normale	Ricostruite	A sviluppo tardivo	TOTALE
A <i>situs viscerum</i> normale	28	5	28	61	3	—	5	8
A <i>situs viscerum</i> invertito	2	—	2	4	15	2	4	21
TOTALE	30	5	30	65	18	2	9	29

Il controllo del sito dei visceri veniva eseguito su tutti gli individui quando essi raggiungevano lo stadio 8' (primi battiti cardiaci), e riguardava sia la posizione del tubo digerente che del cuore. Le inversioni hanno sempre interessato entrambe le strutture contemporaneamente.

Nella Tabella I sono raccolti tutti gli individui dei quali fu osservato il *situs viscerum*, che è raffrontato a quello dei genitori. Non vi figurano 18 gemme, che non furono esaminate, delle quali 14 avevano genitore a *situs* normale e 4 genitore a *situs inversus*. Si può ritenere con sufficiente approssimazione che la loro inclusione nella Tabella non avrebbe determinato un sostanziale spostamento delle percentuali dei casi a *situs* normale e di quelli a *situs inversus*. Nella Tabella le gemme sono distinte nelle 3 categorie: a) gemme sviluppatesi normalmente; b) gemme rimaste per lungo tempo bloccate nello sviluppo, che riprese solo dopo l'asportazione delle gemma mag-

giore; c) gemme ricostituitesi da frammenti rimasti aderenti al genitore dopo una precedente asportazione. Poiché prima dell'inizio dell'esperimento tutte le gemme presentavano *situs* normale come i genitori, nella Tabella le gemme della 1^a categoria figurano solo a partire dalla 3^a generazione, e quelle delle altre 2 categorie a partire dalla 2^a generazione.

Gli individui a *situs inversus* hanno rappresentato complessivamente oltre il 30% dei casi. È tuttavia evidente dalla Tabella che nella maggior parte di essi l'inversione non è un fatto di nuova acquisizione delle gemme, ma che si tratta molto spesso della conservazione, nelle successive generazioni, del *situs inversus* comparso in una data generazione precedente.

TABELLA II.

Il « situs viscerum » delle gemme delle differenti categorie in confronto con quello dei genitori.

Genitori	Gemme con <i>situs viscerum</i> diverso da quello dei genitori				Gemme con <i>situs viscerum</i> uguale a quello dei genitori			
	A sviluppo normale	Rico- stituite	A sviluppo tardivo	TOTALE	A sviluppo normale	Rico- stituite	A sviluppo tardivo	TOTALE
A <i>situs viscerum</i> normale	3	—	5	8	28	5	28	61
A <i>situs viscerum</i> invertito	2	—	2	4	15	2	4	21
TOTALE	5	—	7	12	43	7	32	82

Le gemme infatti tendono a conservare, nella grande maggioranza dei casi, il *situs viscerum* del genitore, e le gemme ricostituitesi dopo una precedente asportazione presentano il *situs* che avevano prima dell'operazione. Ciò appare chiaramente dalla Tabella II: presentano *situs viscerum* diverso da quello del genitore (prima comparsa del *situs inversus* in gemme con genitore a *situs* normale, o ritorno al *situs* normale in gemme con genitore a *situs inversus*) poche gemme sviluppatasi senza interventi sperimentali o sviluppatasi tardivamente in seguito all'ablazione della gemma che aveva preso il sopravvento. Una volta comparso il *situs inversus* tende a conservarsi nelle successive generazioni.

Le eccezioni a questa regola trovano una spiegazione abbastanza semplice, che si può leggere nella Tabella III. In essa sia le gemme a *situs inversus* che quelle a *situs* normale sono distinte in 2 categorie: a) quelle che

al momento della formazione del tubo digerente e del cuore (approssimativamente stadi 4-6 di sviluppo) possedevano ancora il genitore in condizioni di funzionalità e *b*) quelle il cui genitore era già in dissoluzione. Come è noto nei Botrilli le gemme restano costantemente connesse al genitore tramite un peduncolo ectodermico che rappresenta la via di passaggio del nutrimento. Come si può vedere dalla Tabella, tutte le gemme con *situs viscerum* diverso da quello del genitore si sono sviluppate quando il genitore era già in regressione, e cioè verosimilmente al di fuori della sua influenza. Molte altre gemme, sviluppatesi in analoghe condizioni, presentano lo stesso *situs* del genitore.

TABELLA III.

Il « situs viscerum » delle gemme in rapporto alle condizioni di funzionalità dei genitori al momento della differenziazione.

Genitori	Genitori funzionanti		Genitori in regressione	
	Gemme a <i>situs viscerum</i> normale	Gemme a <i>situs viscerum</i> invertito	Gemme a <i>situs viscerum</i> normale	Gemme a <i>situs viscerum</i> invertito
A <i>situs viscerum</i> normale	37	—	24	8
A <i>situs viscerum</i> invertito	—	17	4	4
TOTALE	37	17	28	12

TABELLA IV.

Gemme delle differenti categorie differenziate in presenza di genitore funzionante o in regressione.

Genitori	Gemme a sviluppo normale	Gemme ricostituite	Gemme a sviluppo tardivo
Funzionanti	41	4	9
In regressione	7	3	30

La dissoluzione del genitore prima che la sua gemma abbia sviluppato i visceri è un fatto eccezionale se ci si riferisce a gemme sviluppatesi spontaneamente, mentre è assai frequente nel caso di gemme che si ricostituiscono dopo una prima asportazione o che prendono a svilupparsi solo dopo l'estirpazione della gemma maggiore, in un momento cioè in cui il genitore non è molto lontano dalla fine del suo ciclo vitale (Tabella IV). In tutti questi casi la colonia può sopravvivere in una gemma che usufruisce come nutrimento dei prodotti della degradazione del genitore.

Da quanto abbiamo detto sembra dunque che circa la determinazione del *situs viscerum* nelle gemme dei Botrilli si possa concludere nel seguente modo:

1° il *situs viscerum* delle gemme è rigidamente condizionato dal *situs viscerum* del genitore in tutti i casi in cui questo è funzionante. Il genitore agirebbe nei confronti delle sue gemme da centro organizzatore. Già Berrill⁽⁵⁾ aveva sottolineato l'importanza del genitore nel determinare gli assi della gemma che risultano sempre paralleli ai suoi propri;

2° quando lo sviluppo della gemma avviene durante la disintegrazione del genitore, e quindi è verosimilmente sottratto all'influenza del genitore, la gemma mostra un notevole grado di bipotenzialità nei confronti delle 2 condizioni possibili del sito dei visceri, *situs* normale e *situs inversus*, sebbene tenda a realizzare più frequentemente la condizione *situs* normale.

Ci troviamo forse di fronte ad un esempio di determinazione di un carattere attraverso ad un meccanismo di « doppia assicurazione » in cui solo il primo fattore, l'influenza del genitore, ha un valore assoluto.

L'inversione del *situs viscerum* ha una importante conseguenza sulla gemmazione. Negli individui a *situs inversus* la gemma di sinistra è costantemente più vitale di quella di destra (figg. 3-4). Le eventuali gemme posteriori compaiono più frequentemente a sinistra che non a destra. Negli individui a *situs* normale, come abbiamo ricordato, si verifica esattamente la condizione opposta (fig. 2). Nei casi di *situs inversus* pertanto si è dovuto eseguire l'asportazione tardiva della gemma sinistra anziché della destra.

La differenza di vitalità fra le gemme portate dallo stesso individuo, nei Botrilli, è difficilmente spiegabile. Secondo Pizon⁽⁶⁾, nella larva la gemma che si abbozza a sinistra sulla parete peribranchiale si trova in condizioni precarie perché il tubo digerente la schiaccia contro l'epidermide del genitore, ed essa non riesce mai a proseguire lo sviluppo. Secondo lo stesso A., il tubo digerente non sembra invece danneggiare la gemma sinistra nei blastozoidi. Può darsi comunque che la sua presenza possa limitare la quantità di nutri-

(5) N. J. BERRILL, 1935. *Cell division and differentiation in asexual and sexual development*, « J. Morph. », 57, 353;

1941. *The development of the bud in « Botryllus »*, « Biol. Bull. », 80, 169.

(6) A. PIZON, 1893. *Histoire de la blastogénèse chez les « Botryllidés »*, « Ann. Sc. Nat. », ser. 7, Zool., 14, 1.

mento che può affluire alle gemme del lato sinistro. Se ciò avviene effettivamente, allora la maggiore vitalità della gemma sinistra rispetto a quella destra nei casi di *situs inversus viscerum* è una logica conseguenza del passaggio a destra del tubo digerente.

Può anche darsi tuttavia che in *Botryllus* le capacità blastogenetiche del lato sinistro siano in partenza minori di quelle del lato destro. È interessante ricordare, sotto questo punto di vista, che mentre in forme sistematicamente vicine ai Botrilli, come *Stolonica*, *Distomus*, *Metandrocarpa*, la parete peribranchiale dei due lati nella porzione basale è in grado di gemmare in tutta la sua estensione⁽⁷⁾, in *Botryllus* i poteri blastogenetici sono confinati in un tratto ridotto della stessa, e non si può escludere che questo sia avvenuto in scala diversa per i due lati. Se ciò ha un fondamento, si dovrebbe allora concludere che l'inversione del *situs viscerum* interessa non solo i visceri in senso stretto ma anche i poteri blastogenetici dei due lati.

Biologia. — *Trapianti embrionali di midollo spinale e genesi dei corni motori in «Bufo vulgaris»*^(*). Nota di TEODORO PERRI, presentata^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Il trapianto del midollo spinale fu già eseguito da vari Autori per chiarire la genesi dei suoi differenziamenti regionali. Per gli Urodeli se ne occuparono soprattutto il Detwiler⁽¹⁾ ed i suoi allievi; per il pollo, Hamburger⁽²⁾ e la sua Scuola. Per quanto riguarda gli Anuri, ricordo che il May⁽³⁾, in giovanissimi embrioni di *Discoglossus pictus*, trapiantò un ampio tratto di midollo spinale insieme con i corrispondenti somiti, corda dorsale e cute, fissando gli operati in metamorfosi: ebbe lo sviluppo del trapianto, ma non osservò la presenza di corni motori.

Espongo in questa Nota i risultati che ho finora ottenuti, in *Bufo vulgaris*, in trapianti embrionali di un'ampia parte di midollo spinale insieme con la corrispondente porzione di corda dorsale, somiti e cute. Quest'esperienze si riconnettono direttamente con altre mie ricerche⁽⁴⁾, che debbo qui ricordare

(7) D. P. ABBOTT, 1953, *Asexual reproduction in the colonial ascidian Metandrocarpa Taylora Huntsman*, «Univ. Calif. Publ. Zool.», 61, 1.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia-comparata dell'Università di Perugia, con un contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) S. R. DETWILER, in «J. exper. Zool.», vol. 37, p. 339 (1923) e vol. 38, p. 239 (1923).

(2) Ved. specialmente i due lavori riassuntivi: V. HAMBURGER, in «Annals of the New-York Acad. of Sciences», vol. 55, p. 117 (1952); e V. HAMBURGER e R. LEVI-MONTALCINI in «Genetic Neurology», edited by P. Weiss, Chicago 1950, p. 128.

(3) R. M. MAY, in «Bull. biol. de la France et de la Belg.», vol. 64, p. 355 (1930).

(4) T. PERRI, in questi «Rendiconti», vol. 20 (ser. 8^a), p. 136 (1956).

nella loro parte essenziale, nelle quali ho voluto esaminare come si instaurino quelle deficienze che si hanno nelle intumescenze brachiale o lombo-sacrale degli Anuri quando manchi un arto. Asportai perciò a giovanissimi embrioni di *Bufo vulgaris* l'abbozzo di un arto posteriore sacrificandoli poi a distanza varia di tempo dall'operazione. Riferii che il risultato più interessante fu che i corni della corrispondente intumescenza si formano, in una loro prima fase evolutiva, non solo sul lato normale ma anche su quello operato, concludendo che le prime fasi evolutive dei corni motori sono indipendenti dalla presenza dell'arto. Osservai inoltre che il corno motore formatosi sul lato senz'arto si arresta poi nel suo sviluppo e finisce con il non essere più riconoscibile, mentre in quello sul lato normale vi sono le grosse cellule motorie. È quindi in una seconda fase dello sviluppo dei corni motori che ha importanza l'arto, e che si verifica la legge del Levi sulla correlazione di grandezza tra pirenoforo ed estensione del suo neurite.

L'esperienze di trapianto di midollo spinale, delle quali mi occupo in questa Nota, sono una continuazione ed un ampliamento di quelle ora dette di asportazione di un arto. I trapianti di midollo spinale corrispondono, per un certo aspetto, all'asportazione di ambedue gli arti; inoltre escludono ogni eventuale influenza delle altre parti del neurasse. Delle intumescenze prendo in esame i corni motori, che ne sono la parte più caratteristica.

Quest'esperienze di trapianto di midollo spinale le ho eseguite su *Bufo vulgaris* allo stadio di bottone codale piccolo o piccolissimo. Il midollo spinale trapiantato (insieme con i corrispondenti somiti, corda dorsale, ecc.) comprendeva la futura intumescenza lombo-sacrale e un buon tratto di midollo spinale intermedio alle due intumescenze. Il trapianto venne eseguito vicino e parallelamente agli organi assili del portatore. Le larve finora prese in considerazione furono fissate allo stadio di arti posteriori cilindro-conici fino al primo inizio della digitazione, ossia proprio negli stadi in cui nelle ricerche di asportazione di un arto si ha sul lato operato il corno motore bene evidente e pressoché normale. Come si vede, ho cercato di avere condizioni comparabili a quelle che si verificano nei casi di asportazione di un arto. E questo perché, ribadisco, lo scopo essenziale di queste prime esperienze di trapianto di midollo spinale è stato quello di avere una conferma o meno, in queste nuove condizioni, della formazione dei primi stadi evolutivi dei corni motori indipendentemente dalla presenza degli arti.

L'esame istologico dei casi esaminati ha mostrato lo sviluppo delle varie parti del trapiantato: midollo spinale, gangli spinali, somiti, corda dorsale e cute. Nel midollo spinale, che è la parte che qui interessa, sono assai chiari bilateralmente, i corni motori che si riconoscono per la caratteristica disposizione delle cellule e per il loro sporgere nella sostanza bianca. Come si osserva bene nella Tavola annessa (figg. 1 e 2), essi sono sviluppati come quelli del midollo spinale (normale) del portatore. Ovviamente non vi sono ancora le grosse cellule motorie che sono caratteristiche di una fase successiva di sviluppo dei corni motori. La formazione di questi è avvenuta in corrispondenza della futura intumescenza lombo-sacrale (la futura intumescenza brachiale

non fu compresa nei trapianti finora esaminati), mentre mancano nel tratto di midollo compreso tra le intumescenze. In questo è una nuova e chiara conferma dei risultati ottenuti nell'esperienze di asportazione di un arto, ove sia sul lato normale che su quello senz'arto il differenziamento dei corni motori è limitato alla normale futura intumescenza.

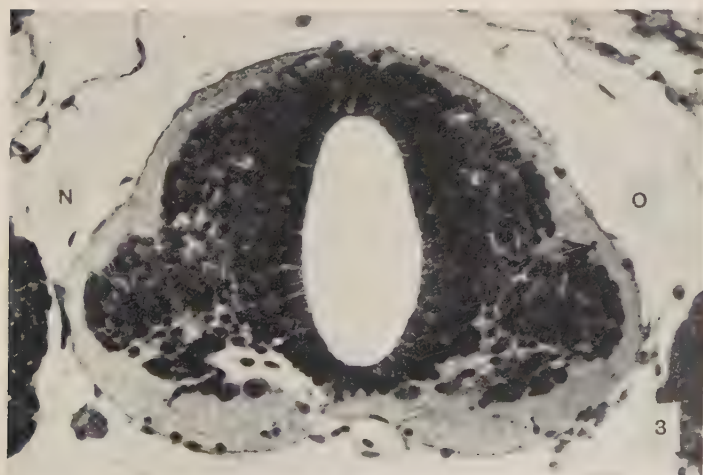
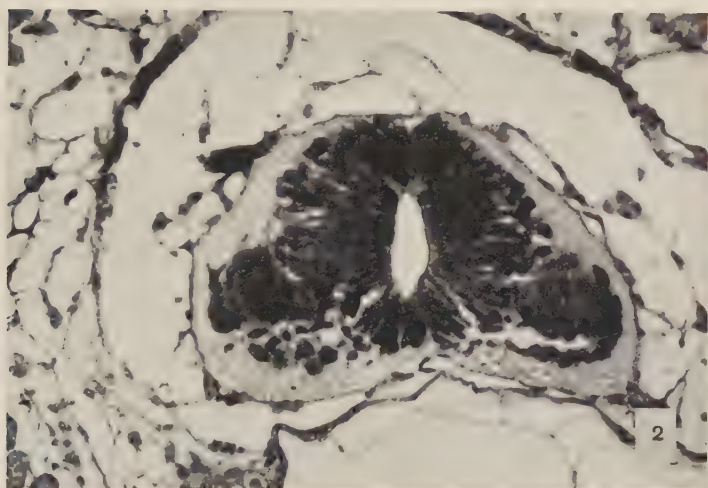
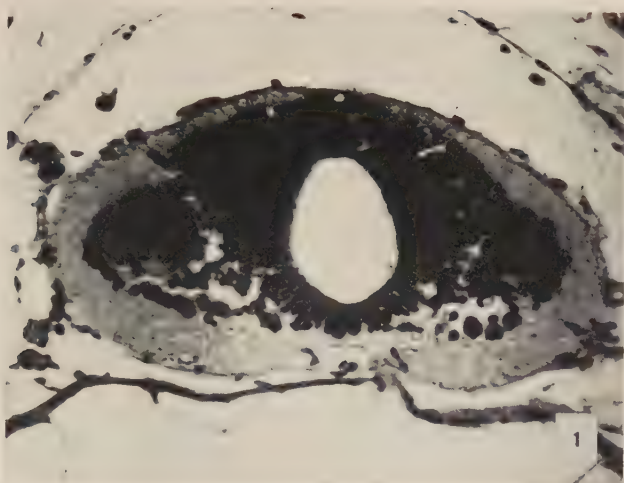
Quest'esperienze di trapianto di midollo spinale vanno ovviamente continuate (e sono esperienze già in corso) per l'esame degli stadi più avanzati, ed anche nei riguardi dei gangli spinali: per ora m'interessava, come sopra ho detto, una conferma o meno dello sviluppo indipendente dei corni motori, e come si è visto questa conferma è stata chiarissima. Per confronto ho posto, nella Tavola, una microfotografia (fig. 3) di un caso di asportazione di un arto.

CONSIDERAZIONI. - I risultati finora raggiunti, anche se vanno completati particolarmente estendendo l'esame ad altre specie, tuttavia per la loro chiarezza già consentono alcune considerazioni. Lo scopo delle mie ricerche, giova ribadire, è d'indagare la morfologia causale delle intumescenze brachiale e lombo-sacrale degli Anuri: tale studio corrisponde all'indagare il meccanismo con cui si stabiliscono le differenze regionali nel midollo spinale. Già precedentemente⁽⁵⁾ avevo avuto occasione di occuparmi di esse a proposito dell'innervazione degli arti soprannumerari da induzione abnorme negli Anuri e dell'innervazione degli arti trapiantati; le ricerche dell'anno scorso mostrandomi che in *Bufo vulgaris* una prima fase dello sviluppo dei corni motori è indipendente dalla presenza dell'arto, mi hanno portato nel vivo della questione: cioè distinguere, nella genesi dei corni motori, i fattori intrinseci da quelli estrinseci o periferici.

Le intumescenze, negli Anuri, sono essenzialmente caratterizzate dalla presenza dei corni motori, che a loro volta sono riconoscibili per la loro forma, ossia per la disposizione delle cellule, per il loro sporgere nella sostanza bianca, e per essere costituiti da grosse cellule motorie. Nel normale sviluppo si osserva che fino ad un certo stadio non vi sono ancora queste grosse cellule motorie, le quali compaiono successivamente, ossia in una seconda fase dello sviluppo dei corni motori.

Osservo anzitutto che le mie ricerche di trapianto del midollo spinale concordano pienamente con quelle di asportazione di un arto nel mostrare che la prima fase di sviluppo dei corni motori è indipendente, ossia è dovuta solo a fattori intrinseci al midollo spinale, al di fuori di ogni influenza dell'arto. Si ricordi infatti che l'esperienze di trapianto di midollo spinale, come quelle di asportazione di un arto, furono eseguite allo stadio di embrione a bottone codale piccolo o piccolissimo, ossia quando era ancora lontano l'inizio del differenziamento istologico dell'arto e quindi molto prima che questo, come tutto lascia presumere, potesse esercitare la sua influenza sul midollo spinale.

(5) T. PERRI, in questi « Rendiconti », vol. 15 (ser. 8^a), p. 463 (1953); vol. 16, p. 118 (1954 a); vol. 16, p. 291 (1954 b); « Rivista di Biologia », vol. 47 (1955).



La seconda fase dello sviluppo dei corni motori — che essenzialmente porta al costituirsi delle grosse cellule motorie — è invece dipendente dalla periferia, ossia dalla presenza dell'arto; infatti, come è mostrato dalle già ricordate esperienze di asportazione di un arto, il corno motore più non si sviluppa, e successivamente non è più riconoscibile. La scomparsa di ogni sua traccia concorda con il risultato di vari Autori (Braus, Dürken, May), che in varie specie di Anuri in metamorfosi osservarono la mancanza del corno motore sul lato ove era stato asportato un arto.

Quello che ancora non risulta è se, scomparso il corno motore per la mancanza di un arto, le cellule dell'intumescenza conservino ancora la capacità di darne un altro: per chiarire questo punto vado facendo eseguire trapianti ortotopici di arto posteriore in casi in cui l'arto proprio era stato asportato da tempo.

L'esperienze di trapianto di midollo spinale mostrano inoltre che per avere una prima fase di sviluppo dei corni motori non ha importanza che l'intumescenza sia in connessione con altre parti del neurasse. Ricordo a questo proposito che tali connessioni non sono necessarie neanche in seguito: infatti, in trapianti di una futura intumescenza lombo-sacrale insieme con gli abbozzi degli arti posteriori ottenni (1953) ⁽⁵⁾ il differenziamento dei corni motori con le loro grosse cellule motorie, nonché la mobilità degli arti.

Ho già posto in chiara evidenza, sia nell'esperienze di asportazione di un arto, sia in quelle di trapianto di midollo spinale, che il costituirsi delle prime fasi evolutive dei corni motori avviene solo in corrispondenza della normale futura intumescenza lombo-sacrale (e probabilmente sarà lo stesso per quella brachiale) ma non avviene nel tratto di midollo spinale intermedio alle intumescenti. Questo fatto mostra chiaramente che anche nel midollo spinale trapiantato si manifestano precoci differenziamenti regionali.

Adunque per la morfogenesi dei corni motori con grosse cellule motorie occorre la cooperazione di più fattori. Occorrono fattori intrinseci e fattori estrinseci. I fattori intrinseci portano sino al costituirsi delle prime fasi evolutive dei corni motori. Le cellule dei corni motori in queste loro prime fasi di sviluppo hanno la competenza a divenire grosse cellule motorie; tale competenza si estrinseca, dando così i corni motori definitivi, se vi è uno stimolo adeguato. Questo è dato dalla periferia (nel nostro caso concreto costituita essenzialmente dagli arti), conformemente alla legge del Levi sulla correlazione tra volume del pirenoforo ed estensione del suo neurite. Lo stimolo periferico è indispensabile non solo per il costituirsi di grosse cellule motorie, ma anche, come ho già detto, per il mantenimento stesso del differenziamento già raggiunto dai corni motori nella fase a sviluppo indipendente. Siamo quindi dinanzi a un caso di necessaria cooperazione di più fattori ⁽⁶⁾; concetto biologico assai vasto in cui rientrano il « principio sinergico dello sviluppo » dello Spemann; le « potenze unitarie combinate » del Lehmann; lo stesso con-

(6) T. PERRI, in « La Ricerca Scientifica », a. 22, p. 864 (1952).

cetto del complesso induttore-competenza, e per alcuni aspetti quello della « doppia assicurazione » dello Spemann. Spero di ritornare su questo argomento quando avrò portato più avanti le ricerche sulla genesi delle intumescenze: qui ho cercato di delineare come i vari fattori intrinseci ed estrinseci cooperino nella formazione dei corni motori negli Anuri.

CONCLUSIONI: 1. Trapiantando ampie parti di midollo spinale, compresa la normale futura intumescenza lombo-sacrale, si ha che in quest'ultima si formano le prime fasi di sviluppo dei corni motori indipendentemente dalla presenza degli arti.

2. Queste esperienze mostrano, da un nuovo punto di vista, l'esistenza di precoci differenze regionali nel midollo spinale degli Anuri.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA I

Figg. 1 e 2. - Trapianto di un ampio tratto di midollo spinale insieme con i corrispondenti somiti, corda dorsale, ecc. Nella fig. 1, il midollo spinale del portatore, a livello dei corni motori. Nella fig. 2, il midollo spinale trapiantato: si osservi la formazione indipendente dagli arti, dei corni motori, pressoché uguali a quelli del portatore. (Ingr. di 230 diam.).

Fig. 3. - Un caso (qui riportato per confronto) di asportazione di un arto. I corni motori sono sviluppati pressoché ugualmente sia sul lato normale (N) che su quello operato (O). (Uguale ingrandimento).

Biologia. - *Sull'origine delle cisti epiteliali esito di trapianto nel tessuto sottocutaneo di muccosa gastrica fetale, dopo trattamento con bleu-trypan, nel coniglio* (*). Nota di L. CANDIOLLO, presentata (**) dal Socio G. LEVI.

Sulla base di ricerche sperimentali, il Levander⁽¹⁾ ha recentemente (1953) riferito che la riparazione dell'epitelio della muccosa gastrica, conseguente a processi ulcerativi, non si effettua per neoformazione e migrazione di cellule epiteliali di rivestimento dai margini della lesione, ma per processi di metaplasia da cellule giovani del connettivo. Queste cellule acquisterebbero caratteri di elementi epiteliali di rivestimento.

A tali conclusioni il Levander è pervenuto dall'esame dei risultati ottenuti mediante innesto, nel cellulare sottocutaneo di coniglio adulto, di frammenti di muccosa gastrica prelevati asetticamente da feti di coniglio, 4-5 giorni prima della nascita, e immersi, prima dell'innesto stesso, per h 24-48

(*) Dall'Istituto di Anatomia Umana Normale ed Istologia della Università di Torino diretto dal prof. F. Loreti.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) G. LEVANDER, *Über die Regeneration der Magenschleimhaut*, « Lagenb. Arch. u. Deutsch. z. Chir. », Bd. 27, s. 255-267, 1953.

in soluzione di bleu-trypan all'1 % in acqua distillata. Con relativa frequenza, in sede di innesto compare una cavità cistica la cui parete è rivestita da epitelio prismatico semplice di varia altezza. A spese di tale epitelio, osserva il Levander, si dipartono cripte che si approfondano nello stroma sottostante e le cui caratteristiche strutturali non sono dissimili da quelle proprie della muccosa dello stomaco. Le cellule epiteliali che tappezzano la parete della cisti, limitandone la cavità, non assumono il bleu-trypan. Esse aderiscono ad un connettivo ricco in fibroblasti e in cellule a funzione macrofagica, ricolme di frammenti cellulari, i quali hanno invece assunto il colore vitale acido.

Secondo il Levander, l'epitelio di rivestimento della formazione cistica origina per metaplasia da elementi giovani del connettivo dell'ospite, a conseguenza di un processo induttivo esercitato da sostanze, chimicamente non definite, che si liberano dagli elementi del trapianto uccisi dal trattamento con il colore vitale acido.

La morte delle cellule dell'innesto, determinata dal bleu-trypan, sarebbe dimostrata, secondo l'A., dalla intensa colorazione del nucleo e dal fatto che i frammenti di muccosa gastrica, a partire da h 11-20 di soggiorno nella soluzione colorante, non consumano ossigeno (metodo diretto di Warburg).

Sino ad oggi si ritiene che il fenomeno dell'induzione si manifesti solo durante l'ontogenesi, da parte di un determinato abbozzo sovra un abbozzo contiguo: in condizioni sperimentali, un tessuto dell'embrione evolve in modo diverso da quello secondo il quale è destinato. È noto come il concetto di induzione risalga alla scoperta di H. Spemann e di H. Mangold: induzione del labbro superiore del blastoporo sull'ectoderma, che ne determina la trasformazione in placca midollare; induzione della vescicola oculare sovra una regione qualsiasi dell'ectoderma, per effetto della quale questo ultimo si trasforma in cristallino (W. Lewis).

Nell'organismo pervenuto a pieno sviluppo, l'induzione di un tessuto sovra un altro, in modo da determinarne la trasformazione in un tessuto avente caratteristiche diverse da quelle che ne sono primitivamente proprie, non fu mai dimostrata: perciò l'osservazione del Levander, se confermata, verrebbe ad avere importanza biologica grandissima.

La lettura della Memoria del Levander lascia invero perplessi; rimane il dubbio che le cellule epiteliali della muccosa gastrica, innestate nel cellulare sottocutaneo, non fossero morte; e pertanto che l'epitelio, che riveste le cisti neoformate nel connettivo sottocutaneo dell'animale portatore, derivi, anziché da induzione esercitata da prodotti di disintegrazione dell'epitelio innestato sovra i fibrociti dell'ospite, da elementi epiteliali sopravvivenuti del trapianto stesso.

Ho ripetuto gli esperimenti del Levander; e, allo scopo di determinare se le cellule epiteliali, conservate per h 24-48 nella soluzione di bleu-trypan, risultino morte, o non, sono ricorso al metodo che mi poteva dimostrare con sicurezza la sopravvivenza delle cellule: alla coltura *in vitro* dei frammenti della muccosa gastrica trattata con la soluzione colorante.

Le colture furono allestite, in goccia pendente, in plasma sanguigno e succo di embrione di pollo a parti eguali. Per controllo, ho eseguito innesti e colture di muccosa gastrica fresca, non trattata con bleu-trypan.

Nel maggior numero (13 su 14) degli innesti nel cellulare sottocutaneo della parete anteriore dell'addome, in coniglie adulte, di frammenti di muccosa gastrica fetale di coniglio, immersi per h 24 in soluzione di bleu-trypan all'1 %, secondo la tecnica proposta dal Levander ⁽²⁾, ho ottenuto neoformazioni cistiche (vedi fig. 1). La parete delle cisti è rivestita da epitelio



Fig. 1. - Cisti epiteliale conseguente all'innesto nel tessuto sottocutaneo di coniglio adulto (♀) di frammenti di muccosa gastrica fetale trattata per h 24 con la soluzione di bleu-trypan.

A destra è riconoscibile la zona di attecchimento dell'innesto.

Ingr. 14 × (ob. Zeiss Microplanar F. 35; Sof. cm. 55).

Colorazione: Emallume Mayer-eosina.

monostratificato; le cavità cistiche raggiungono la massima capacità dopo 8-10 giorni dell'intervento.

L'epitelio di rivestimento è, in alcune aree, rappresentato da cellule piatte, in altre da cellule batiprismatiche. In queste ultime, come dimostra la

(2) Il LEVANDER riferisce di aver immerso i frammenti di muccosa gastrica nella soluzione di bleu-trypan all'1 % in acqua distillata.

Io ho ritenuto opportuno eseguire indagini sia con frammenti immersi in soluzione di bleu-trypan all'1 % in acqua distillata, sia con frammenti immersi in soluzione di bleu-trypan all'1 % in liquido di Ringer; i risultati furono concordanti.

microfotografia riportata nella fig. 2, il nucleo è spostato verso la base, mentre le aree citoplasmatiche apicali sono occupate da una voluminosa goccia PAS positiva (metodo di Hotchkiss-Mc Manus, per i mucopolisaccaridi) (fig. 3) e non metacromatica con bleu di toluidina. È noto come tali caratteristiche istochimiche siano dimostrabili nelle cellule epiteliali di rivestimento della mucosa gastrica normale (Lison ⁽³⁾, Zanotti ⁽⁴⁾).

L'epitelio batiprismatico può presentare invaginazioni che si affondano nel connettivo. La transizione tra epitelio batiprismatico ed epitelio piatto si effettua per gradi.

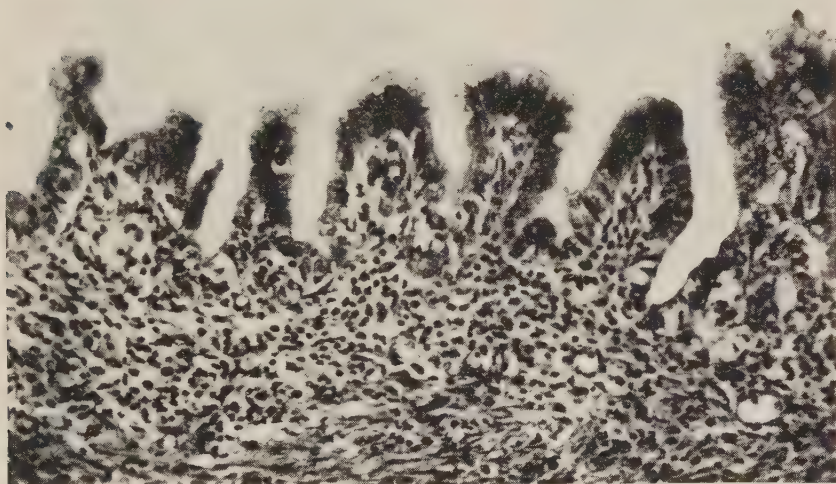


Fig. 2. — Particolare corrispondente all'area delimitata nella fig. 1. Nella sede di attecchimento dell'innesto la parete della cisti è rivestita da epitelio batiprismatico monostratificato. Si noti la configurazione a pieghe dell'epitelio e dello stroma connettivale della parete cistica.

Ingr. 205× (ob. Zeiss 20, Hom. 2, Sof. cm. 70).
Colorazione: Emallume Mayer-eosina.

Le colture ottenute da frammenti di mucosa gastrica conservati in bleu-trypan per h 24 hanno dato risultato positivo; l'espianto, infatti, è circondato da lamine epiteliali, costituite da cellule a mutuo contatto, appiattite, trasparenti, molto espanse in superficie (vedi fig. 4).

(3) L. LISON, *Histochimie et cytochimie animales*, XII Ed., Ed. Gauthiers-Villars, Paris, 1953.

(4) B. ZANOTTI, *Cellule mucose e mucoidi dell'epitelio gastrico nei Mammiferi*, «Zeitsch. f. Anat. u. Entwickl.», Bd. 111, H. 3, 1941.

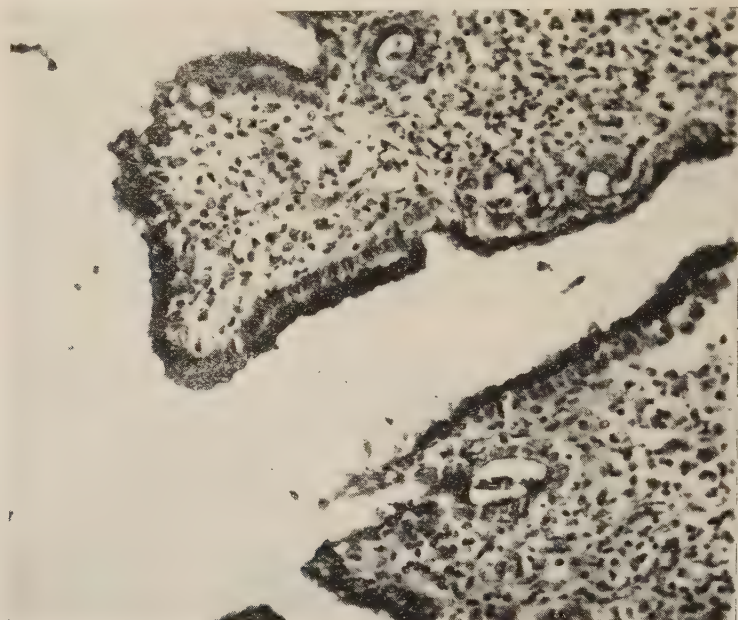


Fig. 3. - Particolare della parete di una cisti epiteliale formata a seguito di innesto nel tessuto sottocutaneo di frammenti di mucosa gastrica fetale trattata per h 24 con bleu-trypan.

La colorazione con il metodo Hotchkiss-Mc Manus rivela che l'area citoplasmatica apicale delle cellule dell'epitelio di rivestimento della cisti è occupata da una goccia di secreto PAS positivo.
Ingr. 205× (ob. Zeiss 20, Hom. 2, Sof. cm. 70).

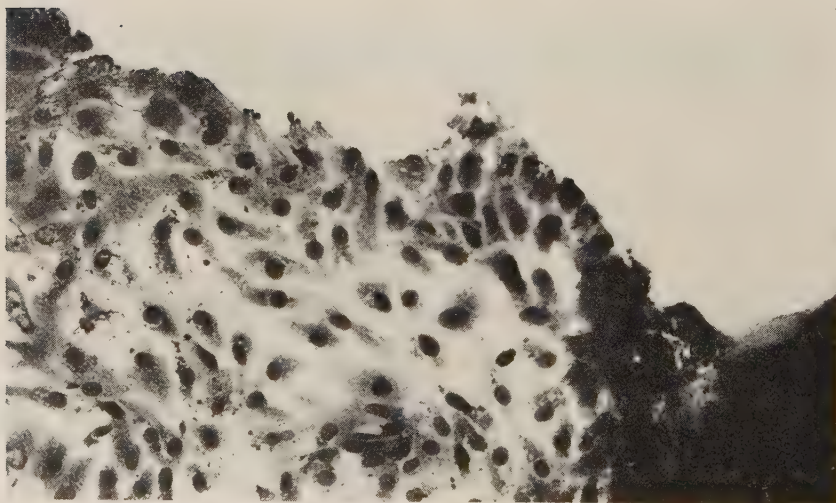


Fig. 4. - Coltura *in vitro* di frammento di mucosa gastrica fetale trattata per h 24 con bleu-trypan.

Lamina epiteliale di accrescimento costituita da cellule appiattite ed espanse in superficie.
Ingr. 205× (ob. Zeiss 20, Hom. 2, Sof. cm. 70).
Colorazione: Ematossilina ferrica sec. Heidenhain.

Le cellule epiteliali contigue all'espianto presentano particelle di colore, risultanti dalla flocculazione intracitoplasmatica del bleu-trypan; le periferiche, in atto di migrazione, ne sono prive.

Invece i frammenti di muccosa gastrica mantenuti nella soluzione di bleu-trypan per un periodo di h 48 hanno dato risultati negativi, nel confronto sia dell'innesto sia delle colture *in vitro*.

Mi sono proposto, inoltre, di stabilire se l'innesto nel tessuto sottocutaneo attecchisca anche senza trattamento preliminare con bleu-trypan; il risultato è stato positivo soltanto in 2 prove su 9: eppure gli espianti relativi erano vitali, in quanto in coltura hanno costantemente dato luogo a migrazione di cellule.

Il reperto, nelle colture allestite con espianti di muccosa gastrica fetale trattata per h 24 con soluzione di bleu-trypan all'1%, di migrazione di cellule epiteliali e della loro associazione in lamine, perimetralmente ai margini dell'espianto, è prova di sopravvivenza di parte del predetto componente della muccosa all'azione del colore vitale acido. E poiché in sede di innesto, nel sottocutaneo, di frammenti di muccosa gastrica trattata con bleu-trypan per h 24, ho ottenuto costantemente neoformazione cistica (o microcistica) la cui cavità è limitata da una parete rivestita da epitelio monostratificato, non dissimile dall'epitelio di rivestimento della muccosa gastrica normale; ritengo, con fondatezza, che tale epitelio derivi da elementi epiteliali propri all'innesto. Questa interpretazione è avvalorata indirettamente dal fatto che innesti di muccosa gastrica trattata con il colore vitale acido per un periodo più lungo (h 48), non presentano segni di attecchimento. L'immersione protratta nel colore vitale causa la morte dei vari componenti contestuali dell'innesto.

Per quanto riguarda la genesi della cavità cistica, o dell'architettura microcistica, è presumibile che le cellule del materiale innestato sopravvivententi al trattamento con il bleu-trypan, attecchiscano nel tessuto reattivo dell'ospite in aree ove le condizioni ambientali sono particolarmente favorevoli, conservando la loro attitudine secretoria. È allora verosimile che le cavità cistiche siano correlative all'accumulo del secreto, accumulo che può contribuire all'appiattimento di parte dell'epitelio.

In definitiva, pur confermando, secondo i risultati di Levander, che innesti nel cellulare sottocutaneo di coniglio (♀) di frammenti di muccosa gastrica fetale, trattati con soluzione di bleu-trypan per h 24, hanno esito positivo con neoformazione di un tessuto ad organizzazione cistica, il cui epitelio presenta strette analogie istochimiche e morfologiche, con l'epitelio di rivestimento della muccosa gastrica normale; ritengo tuttavia erronea l'interpretazione del Levander, che cioè detto epitelio consegua ad un processo metaplastico di cellule del connettivo dell'ospite, e che precisamente derivi da fibroblasti a seguito dello stimolo da parte di sostanze, non definite, resesi libere dal disfacimento del materiale innestato.

RIASSUNTO. - I risultati delle esperienze citate concordano con quelli del Levander, secondo il quale, in seguito ad innesto di frammenti di mucosa gastrica di feto di coniglio nel tessuto sottocutaneo di coniglio adulto, si formano ampie cisti tappezzate da epitelio prismatico monostratificato i cui caratteri sono simili a quelli dell'epitelio della mucosa gastrica normale. Le cellule epiteliali presentano una grossa goccia di sostanza mucoide che si colora con il metodo di Hotchkiss-Mc Manus, specifico per i mucopolisaccaridi; e che, come la sostanza mucoide della mucosa gastrica normale, non dà la colorazione metacromatica con bleu di toluidina. Ho tuttavia dimostrato che non ha fondamento l'interpretazione del Levander, secondo il quale l'epitelio che tappezza la parete delle cisti ha origine metaplastica da fibrociti per un processo di induzione esercitatovi da sostanze, chimicamente non definite, prodotte dal disfacimento delle cellule epiteliali innestate e uccise dal bleu-trypan. In colture *in vitro* di frammenti di mucosa gastrica, mantenuti per h 24 in soluzione di bleu-trypan, le cellule epiteliali migrano attivamente costituendo estese lamine epiteliali.

Le cellule epiteliali che tappezzano le cavità cistiche provengono adunque dalle cellule epiteliali sopravvivenenti della mucosa innestata: ne è indiretta conferma la negatività sia degli innesti sia delle colture *in vitro*, eseguite con mucosa gastrica mantenuta in soluzione di bleu-trypan per periodi superiori a h 24.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Ramiro Fabiani

Tenuta (*) dal Socio GIORGIO DAL PIAZ

Allorché il nostro Presidente mi conferì l'incarico di commemorare il compianto collega Fabiani, confesso che si ridestò in me un cumulo di ricordi e di preoccupazioni, che anche ora mi commuovono e mi turbano profondamente.

Ormai carico d'anni, io non so se riuscirò a rendervi in tutta la sua integrità d'uomo e di studioso la bella figura di Ramiro Fabiani.

Mi sorregga ad ogni modo in questo onorifico e pietoso compito la vostra benevola comprensione, interpreti dello stato d'animo di chi si accinge a parlarvi del suo migliore allievo ed amico, che gli fu caro come un fratello minore.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

Ramiro Fabiani nacque a Barbarano, ameno paese ai piedi del lato orientale dei Colli Berici, il 15 maggio del 1879. Aveva appena sette anni, quando gli toccò la disgrazia di perdere il padre, che era segretario del locale comune.

Dopo una tale sventura i due figlioli (Ramiro e Clelia) furono spesso ospiti del nonno paterno, che dal natio paese di Castel Tesino, all'estremo orientale della provincia di Trento, s'era da vari anni trasferito a Nanto non lungi da Barbarano.

L'ambiente quanto mai lieto e suggestivo, per l'originale bellezza dei vicinissimi colli, cui fa seguito la verde distesa dei prati, certamente concorse a destare nell'animo di Fabiani fanciullo, quel senso di ammirazione per la Natura, che doveva farlo diventare poi un appassionato ricercatore delle vicende geologiche attraversate dai Colli Berici.

Appena Fabiani ebbe conseguita la licenza elementare, la madre, donna di non comuni virtù, provvide a trasferirsi con la famigliola a Vicenza, dove il figliolo poté seguire gli studi classici nel civico Ginnasio-Liceo.

Il mio primo incontro con Fabiani ebbe luogo a Padova nell'ottobre del 1896. In tale epoca, io ero assistente del professore Giovanni Omboni e per le ristrettezze ambientali dell'Istituto geologico d'allora, avevo la mia sede di lavoro nella stessa stanza da studio del professore.

Stavamo conversando su argomenti di carattere scolastico quando, provvisto di un biglietto dell'archeologo e naturalista vicentino Paolo Lioy, Ramiro Fabiani si presentò al mio vecchio Maestro. L'accoglienza fu piuttosto fredda e il colloquio assai breve.

Chi conobbe intimamente Giovanni Omboni sa però che le sue forme burbere e sbrigative nascondevano delle qualità profondamente umane e generose, ch'egli amava dissimulare sotto un'apparente rustichezza. Così era il suo stile e nulla poteva mutarlo.

Quando Fabiani uscì dallo studio del professore, io lo seguii e, con quella spontaneità che è propria dei giovani, ci scambiammo reciproche notizie sui nostri studi prediletti e sulle nostre aspirazioni. Egli mi disse che per necessità familiari si sarebbe iscritto al corso di laurea in Matematica, ma che si sentiva però particolarmente attratto dagli studi naturalistici e specialmente da quelli geologici.

Data la sua natura piuttosto timida e rispettosa, non accennò mai al fatto che l'accoglienza avuta dal professore non lo aveva incoraggiato, ma un certo iniziale imbarazzo nell'espormi le sue preferenze di studio tradiva l'impressione provata.

Quando ci lasciammo, mi parve rianimato e mi disse che se avesse potuto frequentare l'Istituto di Geologia, sarebbe stato molto lieto. Anche se giovane, nel suo parlare dimostrava fin da allora la saggezza e la moderazione di persona anziana e riguardosa.

Passarono alcuni giorni, dopo i quali stabilitosi definitivamente a Padova con la famiglia, fece ritorno all'Istituto geologico portando con sé alcuni fossili che aveva raccolto sui Colli Berici. Ricordo che, valendoci delle vecchie

ma classiche opere del Bronn e del Lapparent sui fossili caratteristici dei vari terreni, procedemmo alla determinazione di alcune specie-guida e quindi a stabilire l'età relativa delle rocce dalle quali vennero estratti. Erano questi i primi passi necessari per prendere possesso del metodo paleontologico applicato alla cronologia della crosta terrestre, nel quale campo egli divenne poi autorevole e rinomato Maestro.

Da allora ebbero inizio i nostri rapporti e la nostra vicendevole attività di studi e di ricerche che, sia sul terreno, sia nel laboratorio, si svolsero ininterrottamente per quasi un trentennio.

Già da ragazzo, quando dimorava a Nanto presso il nonno paterno, egli fu attratto dalla curiosità di visitare le vicine grotte di Lumignano, delle quali parlava volentieri.

Nel marzo del 1898, ormai studente universitario, incoraggiato dal dottor Giorgio Caneva medico ed appassionato cultore di studi zoologici, riprese le sue esplorazioni cavernicole, nel corso delle quali ebbe la ventura di scoprire e raccogliere dei crostacei ciechi, viventi in ambiente acqueo, che descrisse poi in due opuscoli pubblicati rispettivamente nel 1901 e nel 1903.

Dopo questo primo esordio biologico, che denota d'altro canto la sua versatilità nel vasto campo delle Scienze Naturali, egli si diede esclusivamente allo studio di argomenti di carattere geologico e specialmente all'esplorazione fisica delle grotte del Vicentino, alla raccolta e descrizione degli avanzi fossili in esse rinvenuti ed ai rapporti dell'idrografia sotterranea coi fenomeni carsici della superficie del terreno.

Col ritorno della primavera, quando gli impegni scolastici ci consentivano di allontanarci da Padova, non di rado seguiti da qualche volonteroso studente, noi riprendevamo le nostre peregrinazioni soffermandoci di preferenza in quelle località delle Venezie, che erano rese classiche dagli studi di geologi italiani e stranieri. Era questa la più efficace scuola che noi potevamo seguire e che indirizzò il nostro spirito a quella ricerca essenzialmente positiva, a cui il nostro venerato Maestro, Giovanni Omboni, ormai troppo vecchio per poterci guidare anche sul terreno, non cessava mai di esortarci nel suo insegnamento scolastico.

Fabiani, dotato già di seria preparazione naturalistica e di eccezionale spirito d'osservazione, seppe trarre ben presto notevole vantaggio da queste favorevoli circostanze che gli consentirono di affrontare via via i più svariati argomenti della ricerca geologica.

Conseguita prima la laurea in Matematica, e poi, con pieni voti e lode, quella in Scienze Naturali, diede alle stampe un gruppo di pubblicazioni geologiche sul Vicentino. Per una di queste, e precisamente per lo Studio geopaleontologico dei Colli Berici, che rappresenta la sua dissertazione di laurea, gli venne conferito il premio della Fondazione Omboni, riconoscimento dell'intrinseco valore del lavoro compiuto e sprone per il proseguimento verso nuove indagini nel campo degli studi geologici.

Libero ormai da ogni impegno scolastico, egli stava preparando il piano di altri lavori, quando, di ritorno da un'ultima esplorazione cavernicola nei

Colli Berici, fu colpito da una grave infermità tifoidea per la quale venne ricoverato nell'ospedale di Vicenza.

La dolorosa notizia, trasmessami dalla madre mentre mi trovavo sui monti del Bellunese, mi allarmò assai, e, quando accorsi a visitarlo, le sue condizioni mi destarono un'impressione quanto mai penosa e preoccupante.

Superata la fase acuta del male, quando pareva ormai vicina la convalescenza, all'infezione tifoidea subentrò una forma pleuritica che lo sottopose a nuove e non minori tribolazioni.

Ho voluto accennare alle dolorose vicende che turbarono gli anni migliori della sua giovinezza per porre in rilievo la commovente rassegnazione, specchio della profonda bontà dell'animo suo, con la quale egli seppe sopportare tali sofferenze, che lo martoriarono durante un lungo periodo sottoponendolo a dure prove.

Fortunatamente, sorretto e confortato dalle amorevoli cure della madre e della sorella, egli poté superare ogni male e ritornare ai suoi studi prediletti, che in alcuni anni di indefessa ed ammirevole attività, gli consentirono di pubblicare un ragguardevole complesso di lavori, in prevalenza di carattere paleontologico e stratigrafico, per i quali gli venne conferita la medaglia d'oro dell'Accademia Nazionale delle Scienze detta dei Quaranta.

L'anno dopo, provvisto ormai di un ragguardevole corredo di pubblicazioni scientifiche, ottenne la Libera docenza in Geologia, in seguito al quale titolo la Facoltà di Scienze dell'Università di Padova gli assegnò l'incarico dell'insegnamento della Paleontologia, che tenne per quindici anni.

Fu durante questo periodo, in cui impartiva le lezioni del suo corso, che ebbe l'occasione di conoscere la gentile Signorina Maria Caffaratti, che divenne poi la diletta compagna della sua vita.

Fra l'ingente complesso di Memorie e Note date alle stampe da Ramiro Fabiani nel periodo della sua residenza patavina non possiamo fare a meno di ricordare, per la loro fondamentale importanza scientifica, gli studi e le pubblicazioni sull'Era terziaria del Trentino e del Veneto, i quali, specialmente sulla base delle documentazioni paleontologiche, hanno reso possibili delle comparazioni cronologiche fra livello e livello di località diverse, anche se assai discoste fra loro, che prima non risultavano sempre chiare e convincenti.

La monografia sui terreni terziari del Veneto, ch'egli pubblicò con la collaborazione del professore Stefanini, fu presa a modello e guida da quanti in Italia e all'Estero ebbero ad occuparsi dell'Era Cenozoica, e agli autori di quest'opera venne conferito il premio di fondazione Querini Stampalia dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti per l'anno 1913.

In seguito alle sue numerose ed apprezzate pubblicazioni, Fabiani venne riconosciuto come uno dei più autorevoli cultori della stratigrafia e paleontologia dell'Era Terziaria, tanto che il professore Parona di Torino lo volle a collaboratore nella preparazione del suo apprezzatissimo trattato di Geologia.

Non meno feconda di interessanti risultati è stata la sua attività in altri campi della ricerca geologica, quali il rilevamento di carte geologiche e

l'illustrazione tettonica, sempre accompagnata da documentazioni paleontologiche e stratigrafiche, e da accurati disegni ch'egli eseguiva con particolare senso d'arte.

Appartengono a questo gruppo, per ricordare le principali, la Memoria sulla struttura del massiccio del Pasubio; quella sulla regione montuosa fra Thiene, Conco e Bassano; la illustrazione geologica dei dintorni di S. Severino Marche; la descrizione dei rapporti tettonici fra il massiccio di Cima d'Asta e l'altipiano dei Sette Comuni; le pubblicazioni sulla costituzione e struttura dei gruppi montuosi del Bondone, della Paganella e dell'Altipiano di Roen nelle Alpi Trentine; ai quali lavori si devono aggiungere i rilevamenti geologici dei fogli Verona, Schio, e parte dei fogli Bassano, Trento, Tolmino e Bolzano.

Altrettanto degni di particolare considerazione sono i suoi studi sui vertebrati fossili, nel quale campo, oltre a varie Note preliminari, pubblicò una bella illustrazione di un coccodrillo dell'Eocene veronese e una poderosa monografia sui mammiferi quaternari delle Venezie, lavori che, unitamente a quelli sugli invertebrati, dimostrano la sua vasta preparazione nei più svariati argomenti della Paleontologia.

Nel campo dello studio dei fenomeni inerenti alla giacitura di rocce eruttive di tipo tufaceo, dobbiamo far menzione ad un breve, ma assai interessante lavoro, riguardante i Colli Berici.

Nelle località di Zovencedo e di Lumignano egli scoprì e descrisse la presenza dei così detti *necks*. Trattasi di camini vulcanici di esplosione, riempiti di materiali tufacei, che attraversano le stratificazioni calcaree dell'Eocene e non le ricoprono, come erroneamente si riteneva in precedenza.

Le acute osservazioni del Fabiani, che paragona il fenomeno a quelli analoghi della Scozia, descritti dal celebre geologo Geikie, vennero apprezzate ed integralmente accolte da Ettore Artini nel suo ben noto trattato petrografico intitolato *Le Rocce*, ed aprirono la via a numerose altre constatazioni di questo tipo di giacitura dei materiali tufacei nel Veneto occidentale e nel Trentino.

La lunga sospensione dei concorsi universitari che seguì alla prima guerra mondiale, fu la causa dell'ingiusto ritardo subito da Ramiro Fabiani nel conseguimento di una cattedra di ruolo, ch'egli per il suo valore scientifico e per l'esperienza didattica aveva i titoli per poter degnamente coprire già da tempo.

Banditi finalmente nel 1925 due contemporanei concorsi di Geologia (uno per la cattedra di Palermo e l'altro per quella di Cagliari) Fabiani li vinse entrambi.

La scelta della sua sede cadde sull'Università di Palermo, dove riprese la sua feconda attività con incessante fervore.

Nel 1928 venne chiamato a Milano per reggere l'Istituto geologico di quella nuova Università, ma, dopo un anno scolastico fece ritorno a Palermo, dove, nel ventennio della sua residenza siciliana, riportò la cattedra di Geologia e Paleontologia dell'Università Palermitana a quelle gloriose tradizioni che aveva raggiunto con Gemmellaro e Di Stefano.

Nello stesso anno (a riconoscimento dei suoi alti meriti nel campo degli studi geologici) gli veniva conferito il premio dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

Poco dopo il suo arrivo in Sicilia, fatte alcune escursioni di orientamento e pubblicate delle comunicazioni preliminari sul territorio di Bivona, sul Permiano della valle del Sosio e di altre località, segnalò la presenza di vaste aree di Flysch ladinico, specialmente nella parte occidentale dell'isola, che Di Stefano aveva avvertito nei dintorni di Palermo. La presenza di questi materiali, che, per i fossili in essi contenuti risultavano di età triassica e non eocenica come appariva dalle vecchie carte geologiche dell'ing. Baldacci, veniva ad infirmare, con elementi di fatto, le nuove concezioni di studiosi stranieri sulla struttura a grandi falde di ricoprimento; le quali tanto per il Palermitano, quanto per la Sicilia occidentale dovevano essere ridotte invece a proporzioni più modeste, come egli ebbe modo di precisare nel 1940 in un importante studio pubblicato assieme al prof. Livio Trevisan sull'esistenza di uno stile tettonico a falde di ricoprimento nei monti di Palermo.

Ma il grande spirito di osservazione e il pieno possesso del metodo stratigrafico, dovevano condurre ben presto il Fabiani ad altre e non meno brillanti conquiste. Sempre nei primi tempi della sua residenza in Sicilia, non lungi dalla stazione ferroviaria di Roccapalumba, egli scopriva un antico apparato vulcanico, nei materiali tufacei del quale rinveniva i resti fossili di una ricca fauna marina appartenente al Giurese medio, che descrisse poi in un'interessante Memoria.

In occasione di un suo passaggio a Padova qualche anno dopo, si parlò dei felici risultati dei suoi recenti studi, ed egli, fino da allora, a proposito della tettonica dell'isola, faceva cenno alle grandi analogie fra la struttura della Sicilia e quella della Tunisia; concetto che trovò poi generale conferma.

Col passare degli anni, pressato da richieste di pareri e consulenze da parte di Enti agrari ed industriali, Fabiani andò dedicandosi con intensità via via sempre maggiore a ricerche e studi di carattere applicativo.

L'approvvigionamento di acqua potabile per città e paesi; l'urgenza di provvedere ad una sistemazione idraulica che consentisse una razionale irrigazione, dalla quale l'agricoltura siciliana attendeva ed attende tuttora la propria risorsa economica; l'esame di svariate regioni per la scelta delle zone adatte alla ricerca di idrocarburi liquidi e gassosi; l'assiduo interessamento per una maggiore intensità di lavoro ed estensione topografica delle prospezioni geofisiche regionali, allo scopo di svelare la struttura profonda della crosta terrestre e trarne utili deduzioni per l'ubicazione dei sondaggi da eseguire; l'annoso problema dell'entità e giacitura dei giacimenti di solfo ed altre fortuite occasioni che si univano agli impegni scolastici ed accademici (ch'egli curava con esemplare senso del dovere) assorbivano completamente l'attività di Ramiro Fabiani.

Specialmente nel campo delle ricerche di idrocarburi si può dire ch'egli non ebbe mai sosta. Autorevole consulente dell'Agip, dopo avere esteso le sue indagini in ogni angolo della Sicilia ed in parecchie altre regioni del resto d'Italia, ebbe l'occasione favorevole di visitare numerose località classiche pei giacimenti di petrolio, di metano e di altri prodotti minerali. Fece perciò viaggi ed ispezioni nelle isole del Mar Rosso, nell'Iraq, nell'Eritrea, nella Tunisia, nell'Austria, nella Cecoslovacchia e negli Stati Uniti, dove partecipò al sedicesimo Congresso Geologico Internazionale e poté visitare i ben noti e celebri campi petroliferi del Texas, dell'Oklahoma, e della Louisiana.

Fatto ritorno in patria, riprese con fervore d'apostolo la già più volte affermata necessità di ricorrere a perforazioni profonde per la ricerca di idrocarburi, ciò che, per l'insufficiente disponibilità di mezzi esplorativi, non era stato mai possibile realizzare prima.

Sono ben noti i successi ottenuti dall'Agip durante quest'ultimo decennio con le prospezioni e lo sfruttamento dei ricchi giacimenti metaniferi della Valle Padana. È poi di data assai recente la segnalazione che un sondaggio eseguito dalla Società Gulf Italia Company, spinto alla profondità di poco inferiore a 2000 metri nel territorio di Ragusa, ha raggiunto un giacimento di petrolio, senza però che Fabiani abbia avuto il conforto di assistere al trionfo delle sue geniali intuizioni.

Nel 1946 Ramiro Fabiani fu chiamato a coprire la cattedra di Geologia dell'Università di Roma, coll'incarico della direzione dell'annesso Museo di Geologia e Paleontologia.

Purtroppo egli vi giunse in un momento poco fortunato, giacché i bombardamenti della recente guerra avevano devastato locali e collezioni dell'Istituto. Il salvataggio dalle macerie del materiale scientifico travolto dal crollo di una parte del tetto dell'edificio e il successivo riordino delle recuperate collezioni, gli furono fonte di non lievi fatiche, ch'egli sopportò con tenace volontà anche se lamentava già qualche sofferenza.

Il cumulo degli impegni tecnici (direttamente legati d'altro canto alla economia nazionale) non gli faceva dimenticare però i vecchi studi di scienza pura, ai quali ritornava tratto tratto come ad un'oasi di pace.

Anche nel periodo della sua residenza romana egli non conobbe riposo e, per quanto assorbito dall'insegnamento e da numerose altre occupazioni, trovò il tempo da dedicare alla pubblicazione di svariati lavori. Fra essi meritano particolare ricordo un'importante monografia sugli odontoceti del Miocene della Sicilia e un trattato di Geologia, che può dirsi il suo testamento scientifico, il quale ai molti suoi pregi unisce quello, non piccolo, di riferimenti ed illustrazioni in buona parte personali, riguardanti località e problemi geologici che interessano il nostro paese.

A Roma, fino dal 1950, egli si occupava delle nuove ricerche indirizzate ai rilevamenti sottomarini e nel 1952 aveva ottenuto dall'Istituto Idrografico della Marina che un suo allievo, assistente volontario, fosse imbarcato sulla nave Staffetta per svolgere, a mezzo di strumenti ecometrici,

delle indagini sui rilievi subacquei del basso Tirreno. Il grande interesse dei risultati ottenuti lo aveva indotto a promuovere una seconda crociera, quando la morte troncò l'inesauribile fonte del suo eccezionale e multiforme amore per la ricerca scientifica.

Se pensiamo che (per quanto assillato da occupazioni e da impegni di non lieve peso) egli diede alle stampe duecentotrenta pubblicazioni, si potrà avere un'idea della prodigiosa attività svolta da Ramiro Fabiani nei più svariati campi che si connettono alle scienze geologiche e geofisiche.

Per i grandi servigi da lui resi alla Scienza e alle sue pratiche applicazioni, e per l'alta stima e notorietà raggiunta fra gli studiosi della storia e costituzione della Terra, Ramiro Fabiani ebbe svariati riconoscimenti e venne chiamato a far parte di Enti pubblici, Commissioni, Accademie, Società scientifiche nazionali e straniere. Egli era infatti Socio dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Socio dell'Accademia d'Italia, uno dei Quaranta dell'Accademia Italiana delle Scienze, Socio delle Accademie di Padova, dell'Accademia di Verona, dell'Accademia di Torino, dell'Istituto Veneto di Venezia, dell'Istituto Lombardo di Milano, dell'Accademia Gioenia di Catania, dell'Accademia Pontaniana di Napoli, dell'Accademia Olimpica di Vicenza, dell'Accademia di Palermo, Presidente della Società di Scienze economiche e naturali di Palermo, Presidente della Società Geologica Italiana, Vicepresidente per la Geografia, Geologia e Talassografia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, membro dell'Istituto Italiano di Paleontologia umana, dell'Istituto di Studi Etruschi, della Commissione del Servizio geologico d'Italia e del Consiglio Superiore delle Miniere; già presidente del Consiglio delle Miniere della Regione Siciliana e del Comitato tecnico per la nuova carta geologica dell'Isola, membro della Société géologique de France, dell'American Association of Petroleum, e della Geological Society di Londra.

Le eccezionali doti scientifiche di Ramiro Fabiani, riconosciute da tanti Enti Accademici Nazionali e stranieri, erano accompagnate dalle non meno elette virtù del suo spirito. L'innata nobiltà dell'animo suo traspariva attraverso la mitezza del carattere, la cortesia delle forme e la spontanea umanità dei sentimenti.

In poco meno di trent'anni trascorsi assieme e dedicati quasi esclusivamente al magistero della scuola, allo studio, e all'incremento e riordino dell'Istituto Geologico di Padova, egli mi fu sempre vicino, prezioso collaboratore e incomparabile amico.

Ovunque egli visse ed operò, raccolse dimostrazioni di simpatia e di alta considerazione. Nella scuola Ramiro Fabiani era circondato da una numerosa schiera di allievi, che si stringevano attorno al Maestro con sensi di ammirazione e di devoto affetto.

La sua vita si spense nelle prime ore del mattino del 29 aprile 1954, ma il ricordo di Lui vive caro e benedetto nella memoria e nell'anima di quanti conobbero l'alto valore del Suo sapere e la profonda bontà del Suo cuore.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI.

1. - *Di un nuovo Crostaceo isopodo delle grotte dei Colli Berici nel Vicentino*, «Bull. Soc. Entom. Ital.», vol. XXXIII, pp. 169-176, 1 tav. Firenze 1901.
2. - *Le grotte dei Colli Berici nel Vicentino*, «Antologia Veneta», Anno III, n. 2, pp. 14, fig. 3, Feltre 1902.
3. - *I fenomeni carsici dei Colli Berici nel Vicentino*, Ibid., n. 5, pp. 11, fig. 9, Feltre 1902.
4. - *Nota sul «Caecosphaeroma bericum» Fabiani*, «Atti del R. Ist. Ven. di Sc. Lett. ed Arti», LXII parte II, pp. 177-181, fig. 1 Venezia 1903.
5. - *La fauna fossile della grotta di S. Bernardino nei Berici*, Ibid., pp. 657-671, Venezia 1903.
6. - *Cenni preliminari sui fenomeni carsici della regione posta fra Priabana, Ceréda e Valdagno*, Ibid., LXIII, pp. 727-731, Venezia 1904.
7. - *Contributo alla conoscenza della fauna delle grotte di Monte di Malo, Priabana e Ceréda nel Vicentino*, «Riv. Ital. di Speleologia», A. II, fasc. I, pp. 6, Bologna 1904.
8. - *I Molluschi eocenici del Monte Postale conservati nel Museo di Geologia della R. Università di Padova*, «Atti Acc. Ven.-Trent.-Istr.», A. II, pp. 145-158, tav. 1, Padova 1905.
9. - *Studio geopaleontologico dei Colli Berici* (Nota preventiva), «Atti R. Ist. Veneto», LXIV, pp. 1797-1839, Venezia 1905.
10. - *Sulla costituzione geologica delle colline di Sarcedo nel Vicentino*, Ibid., XLVI, pp. 407-424, fig. 1, Venezia 1907.
11. - *Sulla presenza della fauna luteziana del Gazzo di Zovencedo e in un'altra località dei Colli Berici*, «Atti Acc. Ven.-Trent.-Istr.», A. IV, pp. 35-42, Padova 1907.
12. - *Escursione geologica nell'Agordino*. (In collaborazione con G. PALATINI). Rivista «Cadore», nn. 10-12, pp. 7, fig. 6, Padova 1907.
13. - *Sulla probabile origine del caolino del Tretto in Provincia di Vicenza*, «Atti dell'Acc. Ven.-Trent.-Istr.», A. IV, pp. 7, Padova 1907.
14. - *Anomalie negli ambulacri di un «Echinolampas»*, Ibid., pp. 4, fig. 2, Padova 1907.
15. - *Paleontologia dei Colli Berici*, «Mem. Soc. Ital. di Scienze detta dei XL», ser. 3^a, XV, pp. 45-248, 6 tav., Roma 1908.
16. - *Nuovi giacimenti a «Lepidocyclina elephantina» nel Vicentino e osservazioni sui cosiddetti strati di Schio*, «Atti del R. Ist. Ven. di Sc. Lett. ed Arti», LXVIII, pp. 821-828, Venezia 1909.
17. - *Carta della permeabilità delle rocce del Bacino dell'Agno e brevi note illustrative*, Pubbl. n. 6 dell'Ufficio Idrog. del R. Magistrato alle Acque, pp. 6, 2 tav., Venezia 1909.
18. - *I Crostacei terziari del Vicentino*, «Boll. del Museo di Vicenza», I, fasc. 1 e 2, pp. 40, 2 tav., Vicenza 1910.
19. - *Sulle specie di Ranina finora note ed in particolare sulla «Ranina Aldrovandii»*, «Atti dell'Acc. Ven.-Trent.-Istr.», IV, pp. 18, 1 tav. Padova 1910.
20. - *Di una nuova specie di «Phlyctenodes» («Phl. Dalpiazii») dell'Oligocene dei Berici*, «Boll. del Museo di Vicenza», A. I, fasc. 3, pp. 4, 1 tav., Vicenza 1910.
21. - *La regione dei Berici. Morfologia, idrografia e geologia e carta della permeabilità delle rocce*, Pubbl. nn. 28 e 29 dell'Uff. Idrogr. del R. Magistrato delle Acque, pp. 84, 7 fig., 7 tav., Venezia 1910.
22. - *La sezione di Storia Naturale del Museo Civico di Vicenza. Notizie e piano di riordinamento*, «Boll. del Museo di Vicenza», A. I, fasc. 3, pp. 9, fig. 2, Vicenza 1910.
23. - *Sulle rocce eruttive e piroclastiche dei Colli Berici*, «Atti Acc. Ven.-Trent.-Istr.», IV, pp. 51, fig. 5, 2 tav., Padova 1911.
24. - *Il basalto dei Panarotti presso S. Giovanni Ilarione nei Lessini*, «Atti e Mem. R. Acc. di Padova», A. XXII, disp. II, pp. 4, 1 tav., Padova 1911.
25. - *Fauna dei calcari grigi della valle del Chiampo (Vicenza)*, «Atti del R. Ist. Ven. di Sc. Lett. e Arti», A. LXX, parte II, pp. 1445-1470, 9 fig., Venezia 1911.

26. - *Formes singulières d'érosion dans les breccioles basaltiques des monts Lessini*, « La Géographie », A. XXV, pp. 173-178, 2 fig., Paris 1912.
27. - *Gita Lecco - Novate - Como*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », XXX, pp. 7, 2 fig., Roma 1912.
28. - *Nuovi resti di vertebrati scoperti nella « Velika Jama » in Friuli*, « Mondo Sotterraneo », A. VIII, nn. 1-2, pp. 10, 2 fig. 1 tav., Udine 1912.
29. - *La regione montuosa compresa fra Thiene, Conco e Bassano nel Vicentino*, Pubbl. n. 41 e 42 dell'Uff. Idrogr. del R. Magistrato alle Acque, pp. 81, 4 fig., 7 tav., Venezia 1912.
30. - *Nuove osservazioni sul Terziario fra il Brenta e l'Astico*, « Atti dell'Acc. Ven.-Trent.-Istr. », V, Fasc. I, pp. 32, 1 tav., Padova 1912.
31. - *Contributi alla conoscenza dei vertebrati Terziari e Quaternari del Veneto. - I. Il tipo del « Crocodilus vicetinus Lioy »*, « Mem. Dell'Ist. Geol. dell'Università di Padova », I, pp. 197-214, 1 tav. Padova 1912.
32. - *Relazione preliminare di nuovi rilievi geologici compiuti nei Lessini Vicentini e Veronesi*, « Atti Acc. Ven.-Trent.-Istr. », V, fasc. 2, pp. 3, Padova 1912.
33. - *I bacini dell'Alpone, del Tramigna e del Progno di Illasi nei Lessini medi*, Pubbl. n. 44 e 45 dell'Uff. Idrogr. del R. Magistrato delle Acque di Venezia, pp. 60, 1 fig., 10 tav., Venezia 1913.
34. - *Cenni geologici e geografici sulla montagna di Marana (Vicenza)*, in: *Inaugurandosi una nuova croce sulla cima Marana*, pp. 2, Vicenza 1913.
35. - *Relazione sulla costruzione di un acquedotto per fornire di acqua potabile i centri di Isola e Castelnuovo*, pp. 3, 1 fig., Vicenza 1913.
36. - *La « Conchiglia fossile »*, in: « Nel XXV anniversario della morte di G. Zanella », p. 1, fig. 1, Vicenza 1913.
37. - *Sopra alcuni fossili di Derna e sull'età dei calcari di Slonta*, « Atti dell'Acc. Ven.-Trent.-Istr. », VI, pp. 8, Padova 1913. (In collaborazione con G. STEFANINI).
38. - *I Brachiopodi del Terziario Veneto. Notizie sommarie*, Ibid., pp. 4, Padova 1913.
39. - *I Brachiopodi terziari del Veneto. Caratteri della fauna, distribuzione stratigrafica e studio paleontologico*, « Mem. dell'Ist. Geol. dell'Università di Padova », II, pp. 40, 4 tav., Padova 1913.
40. - *Sulla posizione degli strati con « Nummulites Brongniarti » di Roncà nella serie sedimentaria del Veronese e deduzioni cronologiche che ne derivano*, « Atti dell'Acc. d'Agr., Sc. e Lett. di Verona », ser. 4^a, XV, pp. 4, Verona 1914.
41. - *La serie stratigrafica del Monte Bolca e dei suoi dintorni*, « Mem. dell'Ist. Geol. dell'Università di Padova », II, pp. 13, 1 tav. e 1 carta geol., Padova 1914.
42. - *Nota preventiva sui Mammiferi Quaternari della Regione Veneta*, « Atti dell'Acc. Ven.-Trent.-Istr. », VII, pp. 272-279, Padova 1914.
43. - *Cenni sugli avanzi di Mammiferi quaternari posseduti dal Museo Civico di Verona « Madonna Verona »*, A. VIII, pp. 140-144, 2 tav., Verona 1914.
44. - *Sul Miocene delle colline di Verona*, « Atti dell'Acc. Ven.-Trent.-Istr. », VII, pp. 282-287, 1 tav., Padova 1914.
45. - *Il Paleogene Veneto*, « Mem. dell'Ist. Geol. della R. Università di Padova », III, pp. XII-336, 37 fig., 9 tav., 1 carta geol., Padova 1915.
46. - *Sopra la natura e la distribuzione delle rocce terziarie della Venezia*, Pubbl. n. 66 dell'Uff. Idrogr. del Magistrato alle Acque, pp. 10, 1 carta geol., Venezia 1916.
47. - *Relazione dello studio geologico compiuto per una grande derivazione d'acqua nell'Appennino Modenese*, pp. 25, 2 fig., 5 tav., Modena 1917.
48. - *I Mammiferi Quaternari della Regione Veneta*, « Mem. dell'Ist. Geol. della R. Università di Padova », vol. V, pp. 173, 16 fig., 30 tav., Padova 1919.
49. - *Guida Geologica delle colline di Verona*, « Atti Acc. di Agric. Sc. e Lett. di Verona », ser. 4^a, vol. XXI, pp. 13, 5 tav., 1 carta geol., Verona 1919.
50. - *Sul Terziario dell'alta Val di Non (Trentino)*, « Atti Acc. Ven.-Trent.-Istr. », X, pp. 7, 1 fig., Padova 1919.
51. - *Studio geologico della Regione di S. Severino Marche*, Ibid., XI, pp. 26-41, 3 fig., 1 tav., Padova 1920.

52. — *Idrografia del Bacino dell'Agno-Guà*. Parte I. *Struttura geologica*, Pubbl. n. 78 dell'Uff. Idrogr. del Magistrato alle Acque, pp. 9, Venezia 1920.
53. — *La Regione del Pasubio (Bacini del Leogra, del Timonchio e del Posina e parti superiori del Leno di Vallarsa e del Leno di Terragnolo)*, Pubbl. n. 110 dell'Uff. Idrogr. del R. Magistrato alle Acque, pp. 100, 9 fig., 12 tav., Venezia 1920.
54. — *Idrografia del Bacino del Bacchiglione*. Parte I. *Cenni geologici e struttura tettonica*, Ibid., Pubbl., n. 77, pp. 11, Venezia 1920.
55. — *Resti di Mammiferi Quaternari della «Buca del Tasso» nelle Alpi Apuane*, «Atti del R. Ist. Ven. di Sc., Lett. ed Arti», T. 80, pp. 295-302, 1 fig., Venezia 1921.
56. — *Sopra un cranio di «Ursus priscus» della caverna del Pastore o Livrea in Liguria*, pp. 14, 4 fig., 1 tav., Padova 1921.
57. — *I Bacini idrografici della Regione Lessinea*. Parte I. *Struttura geologica*, Pubbl. n. 79 del R. Magistrato alle Acque, pp. 21, Venezia 1921.
58. — *Il Vicentino e la Geologia*. Guida Rossi, pp. 5, 10 figg. Vicenza 1922.
59. — *Continuità della serie fra l'Oligocene e il Miocene nel Trentino meridionale*, «Atti Acc. Ven.-Trent.-Istr.», XII-XIII, pp. 119-122, Padova 1922.
60. — *I Bacini del Terragnolo, della Vallarsa, di S. Valentino e di Ronchi (Trentino)*. *Geologia e morfologia*, Pubbl. n. 118 dell'Uff. Idrogr. del R. Magistrato alle Acque, pp. 18, 2 fig., 3 tav., Venezia 1922.
61. — *Il Terziario del Trentino*, «Mem. dell'Ist. Geol. della Università di Padova», VI, pp. 60, 15 fig., Padova 1922.
62. — *Rapporti tettonici tra il massiccio cristallino di Cima d'Asta e gli Altipiani Vicentini*. Nota preventiva, «Atti della R. Acc. Naz. dei Lincei», XXXII, fasc. 2, pp. 92-94, Roma 1923.
63. — *La fauna mammologica quaternaria della «Buca del Tasso»*, «Archivio per l'Antr. e l'Etn.», vol. LXX (1922), fasc. 1-4, pp. 232-242, 2 fig., 1 tav., Firenze 1923.
64. — *Giacitura ed età degli scisti bituminosi di Mollaro in Val di Non (Trentino)*, «Natura», vol. XIV, pp. 33-41, 3 fig., Pavia 1923.
65. — *Sulle condizioni geoidrologiche della conoide dell'Adige. Comune di Verona. La derivazione Adige-Garda*, Relazione della Commissione tecnica per ecc., pp. 45-50, Padova 1923.
66. — *Relazione geoidrologica in rapporto al progetto di acquedotto per il Comune d'Arzignano*, pp. 3, Arzignano 1924.
67. — *La legge dell'irradiazione adattativo nell'evoluzione dei Vertebrati*, «Natura», vol. XV, pp. 22, 12 fig., Pavia 1924.
68. — *Osservazioni sulla stratigrafia e sulla tettonica dei massicci montuosi del Bondone e del Roen (Alpi Tridentine)*, «Atti dell'Acc. Ven.-Trent.-Istr.», vol. XV, pp. 9, 1 fig., Padova 1924.
69. — *Cenni preliminari sulla geotettonica dei massicci montuosi del Roen e della Paganella (Alpi Tridentine)*, «Boll. Soc. Geol. Ital.», vol. XLII, fasc. 2, pp. 200-204, Roma 1924.
70. — *Cenni su alcune particolarità della struttura geologica del territorio di Bivona (Girgenti) in rapporto alla presenza di affioramenti petroliferi*, «Boll. Ass. Min. Sic.», n. 7, pp. 4, Palermo 1925.
71. — *Osservazioni preliminari sulle condizioni di giacitura del Permiano della Valle del Sosio*, «Boll. della Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo», N. S., A. VII, n. 3, pp. 37-43, Palermo 1925.
72. — *Carta geologica del foglio 38 (Schio) della Carta d'Italia al 100.000 dell'Ist. Geogr. Mil. Ufficio Idrogr. del R. Magistero alle Acque di Venezia*, Firenze 1925.
73. — *Carta geologica del foglio 49 (Verona) della Carta d'Italia al 100.000 dell'Ist. Geogr. Mil.* Ibid., Firenze 1925.
74. — *Questioni pregiudiziali per l'orientamento delle ricerche di petrolio in Sicilia*, «La Min. Ital.», n. 4, aprile, pp. 3, Roma 1926.
75. — *Importanza pratica del problema tettonico della Sicilia*, «Boll. Ass. Min. Sic.», nn. 3-4, marzo-aprile, pp. 8, Palermo 1926.
76. — *Primi risultati di nuove ricerche negli affioramenti permiani del bacino del Sosio (Palermo)*, «Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei», vol. III, fasc. 10, pp. 612-615, Roma 1926.

77. - *Risultati delle escursioni geologiche da me fatte in Sicilia durante il 1925 e il 1926*, « Boll. della Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo », N. S., vol. VIII, pp. 21, Palermo 1926.
78. - *Scoperta di un apparato eruttivo del Giurese medio in Sicilia*, « Boll. Ass. Sic. », Anno II n. 9, pp. 10, 1 fig., 1 tav., Palermo 1926.
79. - *Resti di un apparato eruttivo di età giurese scoperti in Sicilia*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », seduta del 7 novembre 1926, pp. 467-470, Roma 1926.
80. - *Sulla geologia degli idrocarburi della Sicilia anche in rapporto colla formazione degli zolfi*, « La Min. Ital. », n. 8, agosto, Roma 1927, (con 4 fig.) e « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno III, pp. 22, Palermo 1927.
81. - *Perché si ritiene necessaria una revisione della Carta geologica della Sicilia*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno III, pp. 6, Palermo 1927.
82. - *Notizie sulla geologia del M. Inici (Trapani)*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno III, n. 5 pp. 8, novembre-dicembre 1927, Palermo.
83. - *Resti di Mammiferi del Terziario e del Quaternario di Ragusa in Sicilia*, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », ser. 6^a, vol. IV, fasc. 2, pp. 521-524, 1 fig., Roma 1927.
84. - *Luigi Baldacci*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno III, pp. 6, 1 fig., dicembre 1927, Palermo.
85. - *Rilevamenti geologici nei fogli Trento e Bolzano*, Ibid., Anno IV, n. 1, pp. 11, Palermo 1928.
86. - *Aggiunte alla conoscenza dei Mammiferi fossili del Ragusano in Sicilia*, pp. 6, 1 fig., Palermo 1928.
87. - *Per nuove ricerche geofisiche in Sicilia coordinate coi problemi geologici e minerari*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno IV, n. 3, pp. 7, 1 fig., Palermo 1928. (Ristampato in « La Min. Ital. », maggio 1928, Roma).
88. - *Cenni sulle raccolte di Mammiferi Quaternari del Museo Geologico della R. Università di Palermo e sui risultati di nuovi saggi esplorativi*, Ibid., pp. 10, 4 fig., Palermo 1928.
89. - *Vestigia di vulcanismo e di movimenti tettonici nel Giurese di Sicilia*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XLVII, fasc. 2, pp. 295-299, 2 fig., Roma 1929.
90. - *A proposito d'una ricerca del Carbonifero in Sicilia*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno V, n. 4, pp. 10, Palermo 1929.
91. - *Programma e scopi di nuove ricerche geofisiche in Sicilia*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno V, n. 4, pp. 5, 1 fig., Palermo 1929.
92. - *Comunicazione all'Ass. Min. Sic. su alcune impressioni tratte da una visita alla miniera di salgemma di Cammarata*, Estr. del Verbale della adunanza del 1^o giugno 1929, pp. 1, Palermo 1929.
93. - *Carta geologica del foglio XXII (Trento) della Carta d'Italia al 100.000 parte a destra dell'Adige*, Min. LL. PP., Uff. Idrogr. R. Magistrato alle Acque di Venezia. Firenze 1929.
94. - *I giacimenti asfaltiferi del Ragusano*, Relazione a S. E. il Ministro dell'Econ. Naz. Estratto da « Nuovi Annali dell'Agricoltura », pp. 15, 3 fig., 5 tav., Roma 1929.
95. - *La parte della geologia nella Bonifica integrale con uno sguardo alla Sicilia*, pp. 4, Palermo 1929.
96. - *Brevi notizie geologiche sulla « Pietra tenera » del Vicentino*. In: *La Pietra tenera, sue applicazioni artistiche ed edilizie*, pp. 5, 4 fig., Consiglio Provinc. dell'Econ., Vicenza 1929.
97. - *Esplorazione geofisica regionale in Sicilia, Campagna 1929*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno V, n. 8, pp. 8, Palermo 1929.
98. - *Programma e inizio di nuove ricerche geofisiche in Sicilia*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XLVIII, fasc. 2, pp. 322-326, 1 fig. Roma 1930.
99. - *Sulla convenienza che l'esplorazione gravimetrica regionale della Sicilia venga integrata da osservazioni di gravità nel mare circostante*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno VI, nn. 4-5, pp. 7, Palermo 1930.
100. - *Le risorse del sottosuolo della Provincia di Vicenza*, a cura del Cons. Provinc. dell'Economia di Vicenza, pp. 150, 44 fig., 1 carta, Vicenza 1930.

101. - *Esplorazione geofisica regionale della Sicilia. Campagna 1930*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno VI, n. 8, pp. 4, Palermo 1930.
102. - *Idee sulla provenienza degli idrocarburi di Sicilia*. (Con riassunto in inglese) « Compte Rendu of XV Inter. Geol. Congr. », vol. II, pp. 303-305, Pretoria 1930.
103. - *Eruzioni sottomarine in Sicilia durante il Giurese*. (Con riassunto in inglese), Ibid., vol. II, pp. 504-506, Pretoria 1930.
104. - *Analogie tettoniche fra la Sicilia e la Tunisia*. (Con riassunto in inglese), Ibidem vol. II, pp. 507-510, Pretoria 1930.
105. - *Note illustrative del foglio Verona. Carta Geologica delle Tre Venezie*, Uff. idrogr. del R. Magistrato alle Acque; pp. 37, 1 tav., Padova 1930.
106. - *Colli Berici. Enciclopedia Ital. Treccani*, vol. VI, pp. 713, Roma 1930.
107. - *Sviluppi e caratteri del Terziario nel Trentino*, « Atti della Soc. Ital. Progr. Sc. », XIX Riun., vol. II (1930), pp. 14, 12 fig., Milano 1931.
108. - *Nuove ricerche geofisiche in Sicilia*. In « L'Industria Miner. Solfif. Sic. », Congr. Intern. des Mines, Metall. et Géol. Appl., VI Sess. (1930), pp. 3, Liège 1941.
109. - *Esplorazione regionale in Sicilia. Campagna 1930*. Ristampa con aggiunte, « La Min. Ital. », n. 2, febbraio 1931, pp. 2, Roma.
110. - *L'Istituto e il Museo di Geologia della R. Università di Palermo*, pp. 37, 12 fig., Palermo 1931 (I.R.E.S.).
111. - *Guida sommaria delle escursioni tenutesi in occasione del 1° Cinquantenario e del XLIV Congresso della Società Geologica Italiana (aprile-maggio 1931)*, pp. 31, fig. 14, Palermo 1931 (I.R.E.S.).
112. - *Cenni geologici sui giacimenti asfaltiferi del Ragusano*. In: *Distillazione del calcare bituminoso per la produzione di olio minerale italiano*, pp. 2, 2 fig., Società A.B.C.D., Roma 1931.
113. - *Idee sulla provenienza degli idrocarburi di Sicilia*. (Ristampa con aggiunte), « La Min. Ital. », n. 6, pp. 2, giugno 1931, Roma.
114. - *L'industria dei marmi in provincia di Vicenza*, « Rass. Uff. Feder. Naz. Marmi, Pietre, Graniti, ecc. », pp. 9, 10 fig., Roma 1931.
115. - *Considerazioni geologiche a proposito dell'alluvione del 21-22 febbraio 1931*, « Atti R. Acc. Sc., Lett. e Arti di Palermo », vol. XVI, fasc. III, pp. 10, fig. 1, Palermo 1931.
116. - *Appunti per la revisione della Geologia del Trapanese*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno VII, nn. 5-8, pp. 4, Palermo 1931.
117. - *Esplorazione geofisica regionale della Sicilia con brevi cenni sui metodi e sugli strumenti di ricerca*, « L'Universo », Anno XII, n. 10, pp. 27, 7 fig., Firenze 1931.
118. - *Cenni sulla «Grotta da Za Minica» (Capaci-Palermo). Le Montagne della Conca d'Oro*, « C.A.I. », Sez. di Palermo, nn. 9-10, pp. 4, 6 fig., Palermo 1931.
119. - *Discorsi inaugurali e di chiusura tenuti per il 1° Cinquantenario e per il XLIV Congresso della Società Geologica Italiana (Sicilia 29 aprile-5 maggio 1931)*, « Boll. della Soc. Geol. Ital. », vol. L, fasc. 2 pp. 6, Roma 1931.
120. - *Il XLIV Congresso della Società Geologica Italiana in Sicilia (29 aprile-5 maggio 1931)*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. L, fasc. 2, Roma 1931.
121. - *Esplorazione geofisica regionale della Sicilia. Cenzo preliminare su un'anomalia geomagnetica riscontrata in territorio di Pachino*. Parte I, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno VII, nn. 1-4, pp. 2, Palermo 1931. Idem., « La Min. Ital. », n. 7, luglio 1931, Roma.
122. - *Risultati di alcuni scavi nella «Grotta della Za Minica» presso Capaci (Palermo)*, « Atti R. Acc. Sc. Lett. e Arti di Palermo », vol. XVII, fasc. I, pp. 5, 4 fig., 1 tav., Palermo 1931.
123. - *Giacitura e fauna dei tufi vulcanici giuresi di Roccapalumba (Palermo)*. Parte I, « Mem. Soc. Geol. Ital. », vol. I, pp. 5, 1 fig., 1 tav., Roma 1932.
124. - *Sui giacimenti permiani del Sosio (Palermo) e sugli Strofomenidi in essi trovati*. Parte I, « Mem. Soc. Geol. Ital. », vol. I, pp. 5, 4 fig., Roma 1932.
125. - *Per lo sviluppo della speleologia in Sicilia*, « Il Naturalista Siciliano », Anno XXVIII, N. S., vol. 8, pp. 15, 4 fig., 1 tav., Palermo 1932.

126. — *Esplorazione geofisica regionale della Sicilia. Cenni sullo stato dei lavori alla fine del 1931*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno VIII, nn. 1-2, pp. 7, Palermo 1932.
127. — *Relazione sull'esplorazione geofisica regionale della Sicilia eseguita nel triennio 1929-1931*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno VIII, nn. 5-8, pp. 12, 3 tav., Palermo 1932.
128. — *Risultati delle ricerche geologiche in Sicilia nel periodo 1925-1932*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno VIII, n. 9-12, pp. 9, Palermo 1932.
129. — *Giacimento a resti di Elefanti scoperto presso Via Libertà a Palermo*, « Il Naturalista Siciliano », Anno XXVIII N.S., vol. 8, pp. 1, Palermo 1932.
130. — *Il Generale Nicola Vacchelli per una nuova esplorazione geofisica regionale della Sicilia*, « L'Universo », Anno XIV, n. 2, pp. 4, Firenze 1933.
131. — *L'opera del Generale Nicola Vacchelli per la Sicilia*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno IX, nn. 1-3, pp. 6, 1 fig., Palermo 1933.
132. — *Primo centenario della nascita di Gaetano Giorgio Gemmellaro*, « Il Naturalista Siciliano », Anno XXVIII, N.S., vol. 8, pp. 97-99, Palermo 1933.
133. — *Costituzione geologica della Montagna delle Pietre Cadute o di Regalmisi (Palermo)*. Nota preliminare, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno IX, nn. 1-4, pp. 4, Palermo 1933.
134. — *Particolarità geologiche e geomagnetiche delle colline di Dattilo nel Trapanese*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno IX, nn. 1-4, pp. 3, Palermo 1933.
135. — *Nuova esplorazione geofisica della Sicilia. Risultati generali e cenni particolari sulle determinazioni geomagnetiche*. Parte I, « Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XVII, 1 sem., fasc. 9, pp. 686-689, Roma 1933.
136. — *Prima campagna di esplorazioni geoidrologiche in Sicilia. Istituto V. E. III per il Bonificazione della Sicilia. Studi, Monografie, Rapporti*, n. 1, pp. 15-31, Palermo 1933.
137. — *A proposito di una pubblicazione dell'American Association of Petroleum Geologist sul rinvenimento dei petroli nelle rocce eruttive*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno IX, nn. 5-8, pp. 2, Palermo 1933.
138. — *Pel centenario della nascita di Giuseppe Seguenza. Parole del Presidente Prof. R. Fabiani pronunciate nella seduta del 26 dicembre 1933 della Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo*, « Boll. della Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo », vol. XVI, pp. 3, Palermo 1934.
139. — *Sulle correlazioni stratifiche mediante il metodo dei residui insolubili*, « Boll. Ass. Min. Sic. », Anno X, n. 4, pp. 5, Palermo 1934.
140. — *Notizie preliminari sui risultati di uno scavo paleontologico nella Grotta della Cannita (Palermo)*, « Boll. della Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo », Anno XVI, pp. 4, Palermo 1934.
141. — *Ne paese del petrolio e dello zolfo*, « L'Universo », Anno XV, n. 8, pp. 29, 21, fig., 4 tav., Firenze 1934.
142. — *Malta (Geologia)*, in *Enciclopedia Italiana Treccani*, vol. XXII, pp. 34, Roma 1934.
143. — *La partecipazione dell'Italia alla XVI Sessione del Congresso Geologico Internazionale*, Relazione in collaborazione con il prof. STEFANINI, « La Ricerca Scientifica », Anno VI, vol. I, n. 2, pp. 14, Roma 1935.
144. — *Costituzione e struttura geologica della Sicilia in rapporto ad alcuni aspetti della bonifica*. Comunicazione presentata al Convegno Naz. dei Gruppi d'ing. Applicata all'Agricoltura, pp. 6, Palermo 8-11 aprile 1935.
145. — *In memoria del Socio Sen. Emanuele Paternò*, « Boll. della Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo », vol. XVII, pp. 2, Palermo 1935.
146. — *Raffronto preliminare fra le caratteristiche geologiche e geofisiche in Sicilia*, Report of XVI Inter. Geolog. Congress, pp. 6, 1 tav., Washington 1933, December 1935.
147. — *Voce Sicilia (Geologia)*, in *Enciclopedia Italiana Treccani*, vol. XXXI, pp. 657, Roma 1936.
148. — *Voci diverse sui Rettili fossili*, in *Enciclopedia Italiana Treccani*, voll. XXXII-XXXV, Roma 1936.
149. — *Geologia e risorse minerarie dell'Africa Orientale*. Conferenza riassunta nel « Giornale di Sicilia » del 19 aprile 1936, Palermo.

150. - *La Geologia della Sicilia ed alcuni suoi problemi*. «Atti della Soc. Ital. per il Progresso delle Sc.», vol. III, pp. 18, Pavia 1936.
151. - *Le ricerche petrolifere alle isole Daalac (Mar Rosso)*, «L'Industria Min.», Fasc. 11 novembre 1936, pp. 3, 2 fig., Faenza 1937.
152. - *Di alcune novità geologiche in territorio di Termini Imerese (Palermo)*. In collaborazione con L. TREVISAN, «Boll. Soc. Sc. Nat. ed Ec. di Palermo», vol. XIX, pp. 8, 2 tav., Palermo 1937.
153. - *C'è il petrolio in Sicilia?*, «Giornale d'Italia», 26 agosto 1937, Roma.
154. - *Il problema del petrolio in Sicilia*, «Realtà» del 1° dicembre 1937, pp. 9, Milano.
155. - *La prospezione geologica e geofisica del petrolio in Italia*. Parte I. *Prospezione geologica*, «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, Problemi e Discussioni», I, pp. 77-122, 1 carta, Roma 1937.
156. - *Presenza di blocchi di calcare del Carbonifero nel Permiano della Sicilia occidentale*, «Boll. Soc. Geol. Ital.», vol. LVI, fasc. 3, Adunanza 8 settembre 1937, Roma.
157. - *Sulle segnalazioni di indizi petroliferi nella regione di Dessi in A. O. I.* In collaborazione con A. BELLUIGI, «L'Ind. Min. d'Ital. e d'Oltremare», fasc. 11, pp. 2, 4 fig., novembre 1937, Faenza.
158. - *Carta geologica del foglio XXVI (Tolmino) della Carta d'Italia al 100.000. Quadrante III*, Uff. Idrogr. del R. Magistrato alle Acque, Venezia 1937.
159. - *In tema d'autarchia: I gas naturali in Sicilia*, «Giornale di Sicilia», 10 febbraio 1938, Palermo.
160. - *Sulla tettonica dei monti di Palermo*, «Boll. Soc. Sc. Nat. ed Ec. di Palermo», vol. XX, pp. 1, Palermo 1938.
161. - *La Sicilia e le sue industrie estrattive*, «Realtà» del 1° giugno 1938, pp. 9, Milano.
162. - *La Sicilia nel quadro delle risorse del sottosuolo nazionale*, «Atti R. Acc. Sc. Lett. ed Arti di Palermo», ser. 4^a, vol. I, Parte I, pp. 15, Palermo 1938.
163. - *Ciò che dà il sottosuolo di Sicilia*. A cura della Sez. di Credito Minerario del Banco di Sicilia, pp. 34, 16 fig., 1 carta, Palermo 1938.
164. - *Cenni sui gas naturali della Sicilia*, «Atti della Soc. Ital. per il Progresso delle Sc.», XXVII Riunione, pp. 7, Roma 1938.
165. - *Problemi aperti nelle ricerche e nelle industrie minerarie della Sicilia*, «Boll. Soc. Sc. Nat. ed Ec. di Palermo», vol. XXI, pp. 3, Palermo 1939. Ristampato in «L'Ind. Min. d'Ital. e d'Oltremare», fasc. 5, Faenza 1939.
166. - *Il Vicentino nel quadro dell'autarchia mineraria nazionale*, pp. 14, 10 fig., Palermo 1939 (Tip. Bellotti).
167. - *Commemorazione del Socio Giuseppe Stefanini*, «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei» Cl. Sc. Fis., Mat. e Nat., vol. XXIX, 1° sem., fasc. 7, pp. 16, Roma, aprile 1939.
168. - *Problemi riguardanti i combustibili minerali della Sicilia*, «Atti del 1° Convegno Naz. per i Combustibili», pp. 251 Roma, 1939. Ristampato in «L'Ind. Min. d'Ital. e d'Oltremare», pp. 2 fasc. 11, Roma 1939.
169. - *Sulle manifestazioni di idrocarburi gassosi della Sicilia*, II Conv. Naz. pel gas metano, pp. 4, Bologna 1939. Ristampato in «Boll. della Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo», vol. XXI, pp. 4, Palermo 1939.
170. - *Qualche osservazione a proposito delle origini dei così detti «gas di pianura»*, «Atti del Conv. Naz. per i Combustibili», pp. 75-76, Roma 1939.
171. - *Note illustrative della Carta Geologica delle Tre Venezie, foglio Schio*. In collaborazione con L. TREVISAN. Uff. Idrogr. del R. Magistrato alle Acque, Sez. Geol., pp. 86, 2 tav., Padova 1939.
172. - *Ancora uno sguardo ai problemi della ricerca del metano in Italia*, «Il Metano», Anno II, pp. 6-15, Roma 1940.
173. - *Caratteristiche fisiche del tipico latifondo Siciliano* (Riassunto). Adun. 12 aprile 1940 dell'Acc. d'Italia, pp. 3 Roma.
174. - *Caratteristiche fisiche del tipico latifondo Siciliano*, «R. Acc. d'Italia», Rend. Cl. Sc. Fis., Mat. e Nat., ser. 7^a, vol. I, fasc. 11, pp. 9, 1 carta, Roma 1940.

175. — *Prove dell'esistenza di uno stile tettonico a falde di ricoprimento nei Monti di Palermo*. In collaborazione con L. TREVISAN. Ibid., vol. XI, pp. 435-448, 9 fig., Roma 1940.
176. — *L'Iraq ed il problema del petrolio*. Conferenza riassunta nel «Giornale di Sicilia», Palermo 1941.
177. — *Sguardo al potenziale minerario della Russia*, «Il Metano», Anno III, fasc. 6-7, pp. 3, Roma 1941.
178. — *Gli idrocarburi gassosi naturali in Italia e loro importanza*, «R. Acc. d'Italia», Rend. Cl. Sc. Fis., Mat. e Nat., Sez. VII, vol. II, fasc. 12, pp. 6, Roma 1941. Ristampato in «Il Metano», Anno II, nn. 11-12, pp. 6, Bologna 1941.
179. — *Tracce di Tirreniano (strati a «Strombus bubonius» Lam.) entro la città di Palermo*, «Boll. Soc. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo», vol. XXIII, pp. 6, 1 fig., Palermo 1941.
180. — *Federico Millosevich*. Commemorazione. Letta il 1° aprile 1943, «Annuario della R. Acc. d'Italia», pp. 19, Roma 1943.
181. — *Prospettive per la ricerca di acque nel sottosuolo delle varie provincie della Sicilia. Agricoltura, Bonifica, Colonizzazione*, Anno VII, n. 6, pp. 24, 3 fig., 1 carta, Roma 1943.
182. — *La provvista dell'acqua. Lunario del contadino siciliano*, luglio-agosto-settembre 1943. Roma.
183. — *Appunti di Geologia*. (Litografia), pp. 1-240, 81 fig., Tip. Renna, Palermo 1946.
184. — *Carta geologica del foglio 37 (Bassano del Grappa) della Carta d'Italia al 100.000. Quadrante III*. Uff. Idrogr. del Magistrato alle Acque di Venezia, Firenze 1946.
185. — *Un «giacimento» di petrolio nel sottosuolo di Palermo*, «Rivista Ital. del Petrolio», gennaio 1947, pp. 2, Roma.
186. — *Sguardo ai principali problemi che interessano le industrie estrattive della Sicilia*. Discorso. Insediamento del Cons. Regionale delle Miniere di Sicilia, pp. 14, Tip. Pezzino, Palermo 1948.
187. — *Carta geologica del foglio 50 (Padova) della Carta d'Italia al 100.000. Parti del Quadrante III e IV (Colli Berici e Lessini orientali)*. Uff. Idrogr. del Magistrato alle Acque di Venezia, Firenze 1948.
188. — *Appunti di Geologia*. Nuova edizione, pp. 1-509 fig., Tip. Pioda, Roma 1949.
189. — *Panorama geologico e minerario della Sicilia. Vicende geologiche e giacimenti minerali*, Almanacco «Mediterranea», pp. 10, 7 fig. 1, cartina, I.R.E.S., Palermo 1949.
190. — *Petrolei sacra fames*, pp. 2, Ibidem.
191. — *Sui resti di Odontoceti del Miocene inferiore del Ragusano conservati nel Museo di Geologia dell'Università di Palermo*, «Giorn. di Sc. Nat. ed Ec. di Palermo», vol. XLVI, Sez. II, Pubbl. n. 1, pp. 9, Palermo 1949.
192. — *Osservazioni sulle forme di «Neosqualodon» del Miocene della Sicilia*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», Cl. di Sc. Fis., Mat. e Nat., ser. 8^a, vol. VI, pp. 428-430, 1 fig., Roma 1949.
193. — *Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Roma. Attività anni 1947 e 1948*, «La Ricerca Scientifica», Anno XIX, n. 5, pp. 340-357, Spoleto 1949.
194. — *Soffioni e soffionissimi*, «Rassegna di Cultura e Vita Scolastica», Anno III, n. 5, pp. 14, Roma 1949.
195. — *Pozzi petroliferi in eruzione*, «Riv. Scienza e Lavoro», n. 6, pp. 5, 13 fig., Roma 1949.
196. — *Le scoperte di idrocarburi nella pianura padana e le prospettive nella pianura veneta centrale*. (In collaborazione con il dott. G. FACCA), «Atti del VI Conv. Naz. per il metano», pp. 13, 1 fig., Padova 1949.
197. — *Il XVIII Congresso Geologico Internazionale*, Londra, 24 agosto-1° settembre 1948. «La Ricerca Scientifica», Anno XIX, n. 10 pp. 6, Roma 1949.
198. — *Giro «petrolifero» del mondo*, «Rassegna di Cultura e Vita Scolastica», n. 11, Roma 1949.
199. — *Gli Odontoceti del Miocene inferiore della Sicilia*, «Mem. dell'Ist. Geol. dell'Università di Padova», vol. XV, pp. 32, 10, fig., 2 tav., Padova 1949.
200. — *Curriculum e pubblicazioni*, pp. 24, Padova 1949.

201. - *Ricerche petrolifere e progresso delle Scienze geologiche*, «La Ricerca Scientifica», Anno XX, n. 12, pp. 6, Roma 1950.
202. - *Le epoche glaciali (La parte della Geologia)*, «Acc. Naz. dei Lincei, Quaderni attuali di Scienza e Cultura», Quaderno n. 16, pp. 7, Roma 1950.
203. - *Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Roma. Attività svolta durante l'anno 1949*, «La Ricerca Scientifica», Anno XX, n. 3, pp. 291-295, Roma 1950.
204. - *Geologia* (Terza edizione del corso tenuto all'Università di Roma), «La Ricerca Scientifica», Anno XX, nn. 1-2, Roma 1950.
205. - *La ricerca del petrolio*, pp. 20, 11 fig., Tip. Bardi, Roma 1950.
206. - *Sguardo ai principali problemi che interessano le industrie estrattive della Sicilia*, Rispampa del n. 186 con aggiunte nel testo e una cartina, «Contributi di Sc. Geol.», Suppl. a «La Ricerca Scientifica», Anno XX, pp. 11, Roma 1950.
207. - *Il problema generale dell'irrigazione in Sicilia in rapporto a quei problemi dipendenti dalle condizioni geologiche coi quali si collega*, pp. 2, Ibidem.
208. - *Problemi e metodi della ricerca petrolifera*, «La Ricerca Scientifica», Anno XX, nn. 8-9, agosto-settembre 1950, pp. 26, 20 fig. Roma.
209. - *I Parchi Nazionali*, «Rassegna di Cultura e Vita Scolastica», Anno IV, nn. 9-10, pp. 16, 3 fig., Roma 1950.
210. - *Comunicazione alla riunione estiva*, «Boll. Soc. Geol. Ital.», vol. 68, (1949), pp. 128-130, Roma 1950.
211. - *La voce «Geologia»*, in *Enciclopedia cattolica*, P. 1, pp. 63, Roma.
212. - *Scuola di fine Ottocento a Vicenza*, «Il Giornale di Vicenza» del 10 luglio 1950, pp. 4.
213. - *Il petrolio nel mondo*, «Scienza e Lavoro», nn. 1-2, pp. 12, 14 fig., Brescia 1950.
214. - *Criteri generali di orientamento per nuove ricerche di zolfo in Sicilia*. In collaborazione con F. IPPOLITO, «La Ricerca Scientifica», Anno XXI, n. 2, Roma 1951 e «Riv. Min. Sic.», Anno II, n. 7, pp. 3-7, Palermo 1951.
215. - *Cause contingenti e remote delle alluvioni*, «Rass. di Cultura e Vita Scolastica», Anno V, n. 12, pp. 12, Roma 1951.
216. - *Centro di Studi per la Geologia dell'Italia Centro-meridionale. Attività svolta durante l'anno 1950-1951*, «La Ricerca Scientifica», Anno XXI, n. 12, pp. 6, fig. 1, Roma 1951.
217. - *Sguardo sugli studi e sulle ricerche di idrocarburi in Sicilia dal principio del secolo al 1945*, «Atti del VII Conv. Naz. del Metano e del Petrolio», Taormina, aprile, 1952, vol. I, pp. 25-36, 2 cartine, Taormina 1952.
218. - *Trattato di Geologia*. Sotto gli auspici del C.N.R., Ist. Graf. Tiberino, Roma 1951, pp. 742, fig. 756.
219. - *Leonardo da Vinci e la Geologia*, «Rass. di Cultura e Vita Solastica», Anno V, nn. 5-6, pp. 6, Roma 1952.
220. - *Le grandi alluvioni del 1951. (Sardegna, Sicilia e Calabria, Val Padana)*, «La Ricerca Scientifica», Anno XXII, n. 11, pp. 2078-2120, 16 fig., Roma 1952.
221. - *I Parchi Nazionali*, «Scienza e Lavoro», pp. 55, fig. 35, Brescia 1952.
222. - *Centro di studi per la Geologia dell'Italia Centro-Meridionale. Attività svolta durante l'anno 1951-1952*, «La Ricerca Scientifica», Anno XXII, n. 12, pp. 9, Roma 1952.
223. - *Schema strutturale della Regione Italiana*. Con la collaborazione di A. SEGRE, «Contributi di Scienze geologiche», vol. II, pp. 7-23, 4 fig., Supplemento a «La Ricerca Scientifica», Anno XXII, Roma 1952.
224. - *Petrolio e Metano*, Ist. Graf. Tiberino, Roma 1952.
225. - *Sulle interpretazioni geologiche delle anomalie negative della gravità regionale in Sicilia*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», Cl. Sc. fis., Mat. e Nat., ser. VIII, vol. XIV, fasc. 3, p. 8, fig. 1, Roma 1953.
226. - *Sulle interpretazioni geologiche delle anomalie negative della gravità regionale in Sicilia*, (Ristampa della precedente con aggiunte), «La Ricerca Scientifica», Anno XXIII, n. 5, pp. 767-788, 1 cartina, Roma 1953.

227. — *L'Istituto e il Museo di Geologia dell'Università di Palermo*. Seconda edizione. Centro di studi per la Geologia dell'Italia Centro-meridionale del C.N.R., pp. 7-46, fig. 22, 1 cartina, Roma 1953.
228. — *L'Istituto e i Musei di Geologia e Paleontologia dell'Università degli Studi di Roma*. Con la collaborazione di C. MAXIA, Ist. Graf. Tiberino, Roma 1953, pp. 27, fig. 16.
229. — *Studi e ricerche a scopo petrolifero in Sicilia nel primo cinquantennio del secolo*, «Contributi di Scienze geologiche», vol. III, pp. 1-32, fig. 7, tav. 4 (Supplemento a «La Ricerca Scientifica»), Roma 1954.
230. — *L'oro nero nel mondo*, «Scienza e Lavoro», Quaderno n. 1, pp. 72, 33 fig., 1 cartina, Brescia 1954.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente porge il saluto della Classe e suo personale a una Delegazione di studiosi cinesi in visita all'Accademia, guidata dal prof. Hou Te-Pang, membro dell'Accademia delle Scienze e Vicepresidente della Federazione Cinese delle Società di Scienze Naturali.

Il prof. Giordani desidera anche rivolgere alla Delegazione il suo più vivo ringraziamento per il cortese omaggio all'Accademia di una serie di importanti pubblicazioni matematiche.

Il Presidente comunica poi che è presente alla seduta il prof. Jean Leray, membro dell'Istituto di Francia e docente di equazioni differenziali e funzionali al Collegio di Francia e, interpretando i sentimenti dei Colleghi, è lieto di porgere all'illustre matematico francese il suo più cordiale saluto.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Giorgio Dal Piaz rievoca, con commosse parole, la figura e l'opera del compianto prof. Fabiani.

Il Presidente ringrazia il Collega Dal Piaz, che del Fabiani fu insigne Maestro e fraterno amico, e rinnova ai familiari del Socio scomparso, presenti alla commemorazione, l'espressione del vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la perdita del valoroso scienziato.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato del dott. Renato Quarra, consegnato alla Cancelleria in data 27 aprile c. a., contenente, come risulta da una annotazione dell'autore sulla busta, uno studio dal titolo «Il quinto postulato di Euclide».

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico, a disposizione dell'interessato.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio U. Amaldi presenta i secondi volumi delle « Opere Matematiche » di Vito Volterra e di Tullio Levi-Civita con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare simultaneamente all'Accademia i secondi volumi delle " Opere Matematiche " di Vito Volterra e di Tullio Levi-Civita.

« Già quando presentai i due primi volumi ebbi occasione di chiarire i criteri adottati dai due Comitati - presieduti entrambi dal nostro Presidente Giordani - cui fu dall'Accademia affidato il compito di curare la pubblicazione; e in particolare accennai che si era trovato opportuno seguire, nella distribuzione dei singoli lavori nei successivi volumi, il semplice ordine cronologico. Perciò si fu condotti a raccogliere nel secondo volume delle " Opere " del Volterra le sue pubblicazioni dal 1893 al 1909 e in quello delle " Opere " del Levi-Civita le Note e Memorie da Lui pubblicate dal 1901 al 1907. È così accaduto che i due volumi, nel loro insieme e nella successione temporale degli scritti in essi contenuti, costituiscono in qualche modo una documentazione sia pur parziale, ma particolarmente significativa e suggestiva, di quel periodo glorioso per la storia della ricerca scientifica nel nostro Paese, che doveva poi culminare nel memorabile Congresso internazionale dei Matematici del 1908, qui in Roma, nel quale si ebbe la più alta e solennè affermazione del prestigio della Matematica italiana nel mondo.

« Ad illustrare l'eccezionale interesse di questi volumi basterebbe scorre gli Indici, sicché potrei e forse dovrei astenermi da ogni commento.

« Del volume del Volterra, che comprende trent'otto sue pubblicazioni, mi limiterò a ricordare il poderoso gruppo di successive Note sul problema dei moti del polo terrestre, riassunte e concluse nella celebre Memoria del tomo 22 degli " Acta Mathematica ". Mentre la spiegazione di quel fenomeno era stata cercata dagli Astronomi in fatti di natura accidentale, il Volterra ebbe l'idea di ricercarne le cause in fenomeni di carattere permanente, come le correnti oceaniche, il moto dei fiumi, lo scambio di vapor d'acqua tra la terra e l'atmosfera; e del problema così schematizzato diede una trattazione che generalizza quella ideata dal Jacobi per il problema del moto di un corpo rigido intorno a un punto e che, come ebbe a rilevare il Somigliana, presenta un alto interesse, oltre che in relazione al problema considerato, in quanto s'incontra con la teoria dei moti ciclici immaginata dal Helmholtz per la spiegazione delle leggi della Termodinamica, e con quella dei moti nascosti introdotti nella Meccanica dal Hertz. A tutt'altro campo - all'Analisi pura - appartengono, fra i lavori compresi in questo stesso volume, la seconda delle due grandi Memorie sul Calcolo delle sostituzioni lineari e sulla integrazione delle equazioni differenziali lineari e la ricca serie di Note sulla inversione degli integrali definiti, che, nella progressiva evoluzione del pensiero matematico del Volterra, preludono in modo diretto ed essenziale alla creazione di quel Calcolo funzionale, cui resterà perennemente legato il suo nome.

« Quanto al contenuto del volume del Levi-Civita, che comprende trentasei lavori ricorderò anzitutto le ben note e famose ricerche sulla stabilità dei fenomeni di moto e più in generale, delle soluzioni dei sistemi differenziali, e le geniali indagini connesse con quel procedimento di sorprendente evidenza geometrica — ormai accolto nei trattati di meccanica sotto il nome del Levi-Civita — che generalizzando il così detto metodo della ignorazione delle coordinate, consente di determinare, col minimo possibile d'integrazioni, famiglie di soluzioni di sistemi canonici o anche di sistemi differenziali normali quali si vogliano che posseggano più integrali primi o più relazioni invarianti fra loro in involuzione; e a tale procedimento si collega anche la teoria dei moti stazionari ideata e brillantemente applicata dal Levi-Civita. Seguono le prime ricerche sulle traiettorie singolari e gli urti nel problema ristretto dei tre corpi, che più tardi dovranno metter capo alle più profonde indagini sulla regolarizzazione del problema generale dei tre corpi; e più oltre ancora, in questo sommario sguardo al contenuto del presente volume, prescindendo da altre svariate indagini che pur sarebbero degne di menzione, debbonsi ricordare le due poderose Memorie su di un problema di elettrostatica presentatosi nella costruzione dei cavi e i risultati fondamentali di Analisi pura sulla integrazione per separazione di variabili dell'equazione di Hamilton-Jacobi, sulla teoria delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, sull'equazione del Kepler, ecc. Infine si può dire che l'interesse del volume culmini nella classica Memoria sulle scie e le leggi di resistenza, che ha dato vita alla operosa scuola italiana di Idromecanica e anche fuori di Italia, per esempio in Francia ha avuto una larga risonanza e un forte influsso: basta ricordare i brillanti risultati dovuti al Brillouin e al Villat.

« Desidero inoltre segnalare all'Accademia l'intelligente zelo e l'assidua diligenza con le quali il sig. Ferruccio de Carli dell'Ufficio Pubblicazioni dell'Accademia ha collaborato alla organizzazione editoriale della pubblicazione; e un vivo ringraziamento è pur dovuto, per quel che riguarda l'edizione delle "Opere" del Levi-Civita, al dottor Ezio della Monica, direttore generale della Casa Zanichelli. E qui da ultimo per quella particolare simpatia che ispirano i collaboratori più modesti ma non per questo meno preziosi spero mi si consenta di ricordare in quest'alta sede anche il proto della tipografia lincea, sig. Giacomo Pizzuti, che nell'adempimento dei suoi compiti reca una intelligenza, una perizia, oserei dire una passione veramente ammirevoli ».

Il Presidente Giordani ringrazia vivamente il Collega Amaldi, che delle due importanti imprese scientifiche è stato il fervido animatore, dedicando ad esse un'attività veramente mirabile.

Il Socio Chiarugi presenta il volume XI di « Webbia — Raccolta di scritti botanici, edita dall'Istituto Botanico di Firenze », con le seguenti parole:

« È per me un grandissimo onore quello di presentare all'Accademia dei Lincei il Vol. XI di « Webbia — Raccolta di scritti botanici, edita dall'Istituto Botanico dell'Università di Firenze », sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Il volume consta di 908 pagine, con 23 Memorie

riccamente illustrate ed una introduzione. Chiude il primo cinquantenario della Rivista e ne apre il secondo: per tale ragione il volume termina con l'indice generale delle memorie dei primi 11 volumi e con l'indice dei taxa nuovi pubblicati dal 1905 ad oggi.

«Questo volume è stato dedicato alla commemorazione del 1° Centenario della morte dell'illustre botanico inglese Philip Baker Webb (1793-1854), per ricordare l'ingresso delle sue Collezioni nel Museo Botanico di Firenze. Poiché tale evento ha segnato l'inizio delle maggiori fortune dell'Istituto Botanico di Firenze, e ha impresso a tale istituzione la fisionomia di massimo centro nazionale di studi botanici, permettetemi, illustre Presidente e illustri Colleghi, di rievocare brevemente nella sede della suprema Accademia Nazionale la figura di questo eminente scienziato e la sua imperitura opera di mecenate per la botanica fiorentina, e quindi italiana.

«Alla sua morte, avvenuta a Parigi il 31 agosto 1854, il Webb legava per testamento a Firenze il suo pregevolissimo Erbario, ricco di oltre 300.000 essiccata, rappresentanti più di ottantamila specie, e la sua preziosa Biblioteca, lasciando pure una rendita a quei tempi cospicua per assicurarne la conservazione e l'incremento secondo i progressi della Scienza. Il Granduca di Toscana, quale erede formale e sagace interprete della volontà e dei desideri del generoso testatore, depositava le collezioni Webbiane con l'annessa rendita nel Museo Botanico Fiorentino: in tal modo l'Erbario Centrale Italiano, creato pochi anni prima dalla munificenza granducale, con Decreto del 23 aprile 1843, allo scopo di promuovere la completa illustrazione della flora italiana, diveniva di colpo una delle maggiori istituzioni botaniche di Europa e vedeva dilatati i suoi interessi scientifici dal quadro di una flora nazionale a quello della flora di tutto il globo.

«Infatti, come ben disse il Parlatore, quelle del Webb rappresentavano in quel momento "le prime collezioni botaniche del mondo, invidiate da tutta Europa e giustamente invidiabili", "tesoro scientifico che non ha prezzo e che non si compra nemmeno con i denari di un Principe".

«Attorno al nucleo delle proprie raccolte, iniziate nel 1819 nell'Italia meridionale e proseguite infaticabilmente con lunghi e perigliosi viaggi per tutte le terre mediterranee dall'Asia Minore e dalla Grecia alla Penisola Iberica e al Marocco, e culminanti con quelle ricchissime riportate dalle Canarie e dagli altri arcipelaghi atlantici, che avevano servito di base alla sua monumentale opera su l'*Histoire naturelle des Iles Canaries*, il Webb aveva riunito con ingenti spese numerose altre collezioni provenienti da tutte le parti del mondo. E qui basterà dire, per non parlare di tutti, che Webb divenne possessore di quattro grandi e preziosissimi erbarii: quello di Pavon e di Ruiz, base della flora cilena e peruviana; quello di Desfontain, documento della flora dell'Africa minore, che egli poté avere alla morte di questi nel 1834 per una offerta maggiore di quella che ne fece il Jardin des Plantes di Parigi desiderosissimo di acquistarlo; quello di Labillardière, ricco di piante di Siria, dell'Australia, degli arcipelaghi del Pacifico e delle altre

terre visitate nel suo celebre viaggio attorno al mondo nella famosa spedizione alla ricerca di Lapeyrouse; quello di Mercier costituito di piante europee e dell'America centrale.

«Ma, nonostante così grandi e preziosi acquisti, il Webb non si sentì soddisfatto di possedere uno degli erbarii più ricchi e più completi che fosse possibile. Per la qual cosa, oltre a tanti erbarii minori, comprò le collezioni di piante secche che venivano offerte in vendita dai viaggiatori botanici, né si trattenne di fare egli stesso nuovi viaggi, massime per l'Irlanda, per la Spagna e per l'Italia, e sopra ogni altra cosa di concorrere in parte, o di prendere sopra di sé la spesa di diversi viaggi di esplorazione botanica, come quelli di Despréaux e di Borgeau per le Isole Canarie, di Kralik per Tunisi, ed altri. In tal guisa l'Erbario di Webb giunse ben presto a possedere circa ottantamila specie di piante, quante o più di quante ne contenessero pochissimi altri erbarii in Europa.

«Altrettanta cura e una spesa forse maggiore egli spendeva nel tempo stesso per avere ed aumentare una Biblioteca botanica. Non vi fu opera di gran pregio, che nonostante l'elevatezza del prezzo egli non comprasse. Volle possedere Flore, Diarii botanici, Atti e Memorie accademiche, Relazioni di Viaggi; e da due librai di Parigi comprava indistintamente qualunque opera o memoria botanica venisse pubblicata in ogni lingua ed in ogni paese. Così raccolse da 5.000 volumi e da quasi altrettante Miscellanee, oltre ai libri e agli opuscoli che gli venivano offerti dai botanici.

«Il suo erbario e la sua Biblioteca egli con grande generosità soleva mettere a disposizione degli studiosi d'ogni Nazione, ai quali dava la più larga ospitalità e le maggiori facilitazioni nel palazzo di sua residenza a Parigi. La scelta che egli fece di Firenze quale "porto ai suoi tesori terrestri" fu determinata dalla convinzione che le sue collezioni sarebbero state conservate con la massima cura in quell'Erbario Centrale Italiano, che è il monumento imperituro che Filippo Parlatore ha saputo innalzare alla sua memoria, e che ivi avrebbero rappresentato il nucleo motore di una istituzione che sarebbe stata perenne centro di ricerca per la botanica di ogni continente e per i botanici di ogni Nazione.

«E difatti, mentre continuava il suo programma di illustrazione della flora italiana per cui era stato fondato, e diventava il santuario della flora nazionale d'Italia, l'Erbario Centrale Italiano in questo primo secolo di vita della fondazione Webbiana riceveva da questa anche l'impulso ad operare in più vaste imprese riguardanti la botanica d'oltre alpe e d'oltre mare; i suoi botanici si spingevano ad esplorare la flora di regioni ignote o poco note di altri continenti, per riportare al Museo Fiorentino nuove collezioni di flore esotiche e a studiarle, valendosi, in una misura che in passato era impensabile, delle possibilità offerte dall'accentramento in una unica sede di così ingenti e preziosi materiali di confronto e di consultazione bibliografica.

«È così che durante questi cento anni l'Erbario Centrale Italiano ha legato il suo nome allo studio della Flora della Malesia e della Nuova Guinea con il Beccari, della Siberia occidentale con Stefano Sommier, del Caucaso

con il Sommier e con il Levier, della Cina Centrale, del Caracorum, della Tripolitania e della Cirenaica con Renato Pampanini, del Fezzan con Roberto Corti, della Terra dei Borgos (Eritrea) con Ugolino Martelli, della Somalia con Emilio Ghiovenda, del Lago Tana e del Semien con Rodolfo Pichi-Sermolli, della terra dei Borana e del Lago Rodolfo, con Rinaldo Corradi.

«È così che all'Erbario Centrale Italiano sono confluite, per citare soltanto le collezioni di maggior rilievo, oltre le già citate raccolte malesi del Beccari, quelle cinesi del Giraldi, dovute alla munificenza del Biondi, quelle indiane del Marchesetti, quelle libiche del Pampanini e del Corti, quelle algerine dello Chabert, quelle siberiane e caucasiche del Sommier e del Levier, quelle lapponi del Parlatore e del Sommier, quelle delle Palme e dei Pandani di tutto il mondo, dovute alle suggestioni dei due monografi, rispettivamente O. Beccari e U. Martelli, quelle dei Muschi d'ogni paese di Emilio Levier, quelle dei Muschi brasiliani del Mazzucchelli, oltre a quasi tutte le documentazioni fondamentali della floristica italiana con gli erbarii nazionali di Adriano Fiori, di Lino Vaccari, di Alfredo Chabert, di Stefano Sommier, di Emilio Levier, di Carlo Marchesetti, di Ugolino Martelli, di Orazio Gavioli, e di tanti altri.

«Un posto a parte merita il ricordo delle collezioni etiopiche fiorentine. La tradizione, iniziata dagli studi del Webb, in collaborazione col Parlatore, sulla flora dell'Egitto, del Sudan, dell'Arabia e dell'Etiopia, che aveva assicurato all'Erbario Webb le fondamentali raccolte dello Schimper sull'altipiano Etiopico, e all'Erbario Centrale Italiano quelle egiziane e sudanesi del Figari, era continuata con Odoardo Beccari, che aveva effettuate le sue prime esplorazioni botaniche d'oltre mare anche in Etiopia, nella terra dei Bogos e ad Assab, dove fra l'altro nel 1870 aveva posto come testimone la sua firma all'atto di acquisto da parte dell'Italia di quella baia che doveva rappresentare il primo passo all'ampio volo della conquista coloniale italiana.

«L'eccezionale valore delle collezioni naturalistiche e bibliografiche sulle flore d'oltremare, accentrate a Firenze dopo l'accesso della Fondazione Webb, indusse nel 1914 Romualdo Pirota, direttore dell'Istituto Botanico di Roma, a riconoscere l'utilità per la scienza che l'Erbario Coloniale da Lui costituito nel 1904 con le raccolte dei nostri primi pionieri inviati nell'Africa Orientale dalla Società Geografica Italiana (Orazio Antinori, Vincenzo Traversi, Luigi Robecchi-Brichetti, Eugenio Ruspoli, Domenico Riva), e poi accresciuto dalle collezioni di Achille Terraciano, Agostino Pappi, Giovanni Negri, Emilio Chiovenda, e di altri, venisse trasferito a Firenze presso l'Erbario Centrale Italiano. Egli, adoperandosi perché il trasferimento venisse perfezionato con la legge n. 719 del 19 maggio 1918, dette prova non soltanto di generosità e di disinteresse a vantaggio della Scienza, ma soprattutto di larghezza di idee e di statura intellettuale superiore: si era infatti reso conto che un efficiente studio della sistematica delle piante tropicali può farsi soltanto presso un grande erbario di tipo nazionale ove esistano adeguati tipi di confronto, affiancati da una ricca biblioteca specializzata prov-

vista di tutte le opere essenziali e in particolar modo di quelle più antiche di difficile reperto.

«Con il suo gesto il Pirotta dimostrò che all'obbiettività di giudizio del Parlatore certamente non nocque il suo più che giustificato amore verso la istituzione da lui creata, quando nella sua prefazione all'Elogio di Webb, a cui fece seguire la descrizione delle collezioni lasciate dal liberalissimo Inglese e di quelle accumulate dalla splendida munificenza del Granduca, ne esaltava il valore scrivendo fin dal 1856: "ora che gli occhi dei botanici italiani e forestieri sono rivolti alla nostra Fiorenza come al luogo dove è necessario fare un pellegrinaggio per dare almeno l'ultima mano ai lavori sulla scienza"».

«Con l'acquisizione dell'Erbario Coloniale un nuovo e vigoroso impulso venne dato al Museo Botanico Fiorentino per lo studio della flora d'oltre mare, indirizzandolo in modo particolare anche allo studio della flora dell'Africa Orientale.

«Le collezioni dell'Erbario Coloniale, che nel 1914 ascendevano a 32.500 esemplari, hanno raggiunto nel 1954 la cifra di 98.140 esemplari, raccolti in 1223 pacchi d'erbario custoditi in una delle 14 sale del Museo Botanico Fiorentino. Esse si sono arricchite delle raccolte etiopiche di Nello Beccari, di Stefanini, Paoli, Puccioni, Fiori, Dainelli e Marinelli, Baldrati, Domenico Saccardo, Cufodontis, Corradi, Vatova, Senni, Taschdjan, Cei, Zavattari, Giordano, Pichi-Sermolli, e di numerosi raccoglitori occasionali nel corso del lavoro di organizzazione civile di quei territori in conseguenza dell'attività coloniale italiana. A queste raccolte, che costituiscono il più importante nucleo di collezioni botaniche dell'Etiopia oggi esistente, si aggiungono anche le exsiccata africane pervenute per cambio o per dono in questi ultimi anni da vari Musei stranieri, il riconoscimento dei servizi già resi dal Museo Botanico fiorentino e di quelli che da lui ancora si attendono per la conoscenza della Flora Aethiopica.

«Oggi le collezioni del Museo Botanico Fiorentino (Herbarium Universitatis Florentinae), costituito dall'Erbario Centrale Italiano, dall'Erbario Webb e dall'Erbario Coloniale, ascendono a circa tre milioni e mezzo di esemplari, mantenendosi quindi fra le primissime istituzioni congeneri sia dell'Europa, sia delle altre parti del Mondo.

«Queste sono le mirabili conseguenze che l'opera munifica e il fermento delle idee suscitate dal Webb hanno determinato nel corso di questo secolo a vantaggio della botanica Fiorentina e quindi della botanica Italiana.

«Ed è per questo che la Direzione dell'Istituto Botanico di Firenze ha voluto dedicare un volume giubilare a Webb nel centenario della sua morte, dopo un lungo oblio ufficiale di 80 anni. Questo volume è l'undecimo della rivista che nel nome perpetua l'omaggio di gratitudine dei botanici verso l'insigne mecenate dei loro studi, e che continua a custodire l'idea del Webb di una istituzione botanica che sia efficiente centro di collaborazione internazionale.

« E perché questo volume fosse degno dell'uomo che si è voluto onorare, numerosi botanici di varie Nazioni hanno risposto al nostro appello.

« Non potendo citarli tutti mi limiterò a segnalare il nutrito gruppo delle memorie sulla flora africana presentate al Convegno di Oxford (1953) dell' "Association pour l'Etude Taxonomique de la Flore d'Afrique tropicale", che questo consesso ha voluto riserbare alla Webbia per sottolineare l'interesse e le benemeritenze che notoriamente l'istituzione Webbiana ha avuto e ha tuttora, sia direttamente sia indirettamente attraverso l'Erbario Coloniale, verso lo studio della Flora dell'Africa in generale e dell'Africa Orientale in modo speciale.

« Una importante Memoria è la monografia del genere *Digitaria* dell'India e della Birmania, redatta dal Dott. Bohr, Vice-Direttore dei Giardini Botanici di Kiew.

« Un altro gruppo di Memorie è stato inviato dalla Flora Malesiana Foundation di Leida, la quale ha voluto ricordare in qualche modo il valore eccezionale delle raccolte del Beccari, conservate nell'Erbario Webb per la completa illustrazione della Flora Malese, a cui i Colleghi olandesi si sono accinti per mantenere accesi i legami scientifici e tecnici che ancora li uniscono idealmente alle terre del loro antico impero coloniale.

« Una Memoria del Moggi illustra due interessanti trifogli dell'Appennino Lucano; una del Corti pone in luce la diffusione, le vie e le modalità di penetrazione delle piante atlantiche nel settore ligure costiero durante il quaternario; e infine una Memoria del sottoscritto tratta della interpretazione sistematica e fitogeografica di uno splendido endemismo della costa lucana, la *Primula Palinuri*, attraverso l'analisi cariologica, nel quadro della genesi della flora alpina da una flora planiziaria mediterranea premiocenica, anteriore all'orogenesi alpina.

« A queste Memorie se ne sono aggiunte due che ci sono sembrate particolarmente significative per la celebrazione del centenario della morte di Webb.

« La prima è la "Monografia delle Arecaceae", opera postuma incompleta di Odoardo Beccari, egregiamente curata e completata dal Collega R. Pichi-Sermolli, la cui pubblicazione vuol essere un omaggio della Direzione dell'Istituto Botanico di Firenze verso il Naturalista che per primo e più di ogni altro rappresentò l'orientamento e l'interesse della Botanica fiorentina verso la flora di altri continenti dopo l'accesso delle collezioni Webbiane al Museo Botanico di Firenze.

« La seconda è "la Flora e la Vegetazione dell'Isola di Marettimo nell'Arcipelago delle Egadi", opera di due egregie Allieve dell'Istituto Botanico Fiorentino, le Colleghe E. Francini e A. Messeri, che dalle cattedre da loro occupate rispettivamente nelle Università di Bari e di Messina convergono periodicamente a Firenze per continuare nell'Erbario Centrale Italiano la tradizione dell'indirizzo scientifico della scuola Parlatoreana, che tanto si intonava ai gusti e alle preferenze del Webb da indurlo a scegliere il Museo

Botanico Fiorentino per sede definitiva delle sue collezioni: lo studio approfondito di particolari settori dell'Italia e del Mediterraneo col relativo censimento floristico e l'elaborazione monografica delle specie che ne nobilitano la flora per permetterne la relativa interpretazione ecologica, fitogeografica e genetica.

«Webb fu degnamente commemorato dal Parlatore nel 1855 in una solenne adunanza nel Museo di Storia Naturale di Firenze, alla quale prese parte il paese intero, con l'intervento della Casa Regnante, i Ministri tutti del Governo toscano e di tante altre personalità politiche e accademiche⁽¹⁾.

«Fu pure commemorato, sempre dal Parlatore, nel 1874 in occasione del 1° Congresso internazionale di Botanica che abbia portato questo nome e che ebbe luogo a Firenze; in quell'occasione fu pure inaugurato il busto marmoreo di lui che tuttora adorna la Biblioteca Webbiana⁽²⁾.

«Ma nessuna commemorazione ufficiale è stata mai fatta dalle istituzioni nazionali dopo la riunificazione d'Italia. Pertanto ho creduto doveroso per parte mia ricordare, sia pure brevemente, in questa Accademia dei Lincei, questo Botanico inglese che amò l'Italia come sua seconda Patria e che fu così benemerito per lo sviluppo degli studi botanici del nostro Paese, il quale ne custodisce l'opera e ne continua le idee».

Il predetto Socio presenta anche il supplemento al volume VI di «Caryologia» contenente gli «Atti del IX Congresso Internazionale di Genetica (parte II)», svoltosi a Bellagio dal 24 al 31 agosto 1953, pubblicati a cura del Socio Montalenti e dello stesso prof. Chiarugi.

Il Socio Crocco presenta un fascicolo contenente la prolusione su il «Pilotaggio balistico» da lui tenuta il 10 dicembre 1955 per l'inaugurazione dell'anno accademico 1955-56, all'Accademia Aeronautica Militare.

Il Socio Fantappiè, riferendosi alla presentazione da lui effettuata nella seduta del 10 marzo c. a. del 1° fascicolo dei Quaderni di S. Giorgio dal titolo «Il valore del fine nel mondo», che inaugura il metodo della collaborazione tra uomini di vario sapere desiderosi di illustrare, con la comunione di lavoro, l'importanza del principio di finalità, presenta ora un volume di François Meyer dal titolo «Problématique de l'évolution», il quale mette in evidenza come la biologia teorica, soprattutto in ciò che concerne il problema dell'evoluzione, possa utilizzare con profitto quegli schemi finalistici, proposti dal prof. Fantappiè, con le soluzioni dei potenziali «anticipati» della meccanica ondulatoria.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno offerto in omaggio le sopra citate opere.

Il Segretario Accademico illustra quindi le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia.

(1) F. PARLATORE, *Elogio di Filippo Barker Webb*, Firenze, Le Monnier (1856).

(2) F. PARLATORE, *Inaugurazione del busto di Filippo Barker Webb*, Firenze, Ricci (1876).

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Presidente presenta una Nota del Socio Corradino Mineo dal titolo: «Ancora sulla geodesia intrinseca». Il Presidente, dopo aver ricordato che, in tale materia, era sorta una polemica, espressa attraverso alcune Note pubblicate nei Rendiconti, tra il predetto Socio Mineo e il prof. Marussi, informa la Classe di essersi personalmente interessato affinché la questione stessa fosse definitivamente chiusa. Proprio a tal fine, ha rivolto preghiera al Collega Mineo di renderlo arbitro del testo di quest'ultima Nota, per quanto riguarda la parte formale della stessa. Il Socio Mineo, con una gentilezza e cordialità veramente ammirevoli, delle quali il Presidente gli è gratissimo, ha aderito alla richiesta e il prof. Giordani è lieto pertanto di constatare che, per quanto riguarda l'Accademia, la polemica sopra citata deve considerarsi chiusa.

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Natta, G. Levi, Chiarugi, Bonino, Picone, Chisini, Tonzig, Pupilli, Caglioti, Cotronei, Fantappiè, Armellini e Quilico.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

NATTA G., CORRADINI P. e PORRI L. - Sulla struttura di nuovi polimeri a concatenamento 1-4 trans di diolefine coniugate (pres. dal Socio G. NATTA).

GIANNUZZI M. A. - Sulla doppia ottica A. D. S. 10332 (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

SILVA J. S. - Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes. Nota I (pres. dal Socio M. PICONE).

SILVA J. S. - Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 maggio 1956

- BLUME Werner. — Vedi: GRUBER Georg B. und BLUME Werner.
- CALDEROLI Guido. — *Auxologia e Auxopatia nei senza tonsille*. Bergamo, T.O.M., s. d. Pp. 68, in-16°.
- Comptes-Rendus des Séances de la Neuvième Conférence Générale des Poids et Mesures*. Paris, Gauthier-Villars, 1955. Pp. 99, in-4° (Bureau International des Poids et Mesures).
- CONGRESSO (IX) INTERNAZIONALE DI GENETICA. BELLAGIO (COMO), 24-31 AGOSTO 1953. — *Atti*. P. II. Firenze, «Caryologia», 1954. Pp. 711, in-8°, con tavv. (Suppl. al vol. VI di «Caryologia»).
- CROCCO Arturo Gaetano. — *Il pilotaggio balistico*. Prolusione tenuta all'inaugurazione dell'Anno Accademico 1955-56 dell'Accademia Aeronautica Militare. S. n. t. Pp. 31, in-4°, con tavv.
- DE MAYOLA Ernesto. — *Dureza de los cristales*. Estr. dal vol.: DE MAYOLA E. — *Advanced Crystallography*.
- GASCA DIEZ Maria. — *La preparazione del medico per l'esercizio dell'orientamento professionale*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1956. Pp. 220, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, XXXIX).
- GIORGI Enzo. — *La meccanizzazione agricola in Toscana*. Firenze, Tipografia B. Copini, 1955. Pp. v-182, in-8°, con figg. (Osservatorio di Economia Agraria per la Toscana).
- GRUBER Georg B. — *Arzt und Ethik*. Berlin, Walter de Gruyter & Co., 1948. Pp. 82, in-8°.
- *Aus der Historik des Mikroskopes und der Mikroskopie*. Estr. da «Münchener Medizinische Wochenschrift», a. XCVII, 1955, n. 16.
- *Beiträge zur Frage «gekoppelter» Missbildungen. (Akrocephalo-Syndactylie und Dysencephalia splanchnocystica)*. Estr. da «Beiträge zur pathologischen Anatomie und zur allgemeinen Pathologie», vol. XCIII, 1934, n. 3.
- GRUBER Georg B. — *Die Frage der Periasteritis nodosa*. Estr. da «Zeitschrift für Kreislaufforschung», a. XXXVI, 1944, n. 15-16.
- *Frühgeschichte der pathologischen Anatomie in Göttingen*. Estr. da «Sudhoffs Archiv für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften», vol. XXXIX, 1955, n. 4.
- *Historisches und Aktuelles über das Sirenen-Problem in der Medizin*. Estr. da «Nova Acta Leopoldina», n. s., vol. XVII, n. 117.
- GRUBER Georg B. und BLUME Werner. — *Zur Frage der menschlichen sirenoiden Missbildungen (Ungewöhnliche Anordnung des bipodalen Symmelos bei ventraler Schizosomie)*. Estr. da «Zentralblatt für Allgemeine Pathologie und Pathologische Anatomie», vol. XCIII, 1955.
- KNEISSL M. — *Die Bildung eines einheitlichen europäischen Nivellementsnetzes*. Stuttgart, Wittwer, 1955. Pp. 20, in-8°, con figg.
- LI Yen. — *Chung suan shih lun-ts'ung*. Pei-ching, Chung-Kuo k'o-hsüeh yüan ch'u-pan, 1954-55. Voll. 5, in-8°, con figg.
- MEYER François. — *Problématique de l'évolution*. Paris, Presses Universitaires de France, 1954. Pp. 284, in-8° (Bibliothèque de Philosophie Contemporaine, Logique et Philosophie des Sciences).
- MOREAU Henri. — *Les récents progrès du Système métrique (1948-1954)*. Rapport présenté à la dixième Conférence Générale des Poids et Mesures réunie à Paris en 1954. Paris, Gauthier-Villars, 1955. Pp. 80, in-4° (Bureau International des Poids et Mesures).
- NIEVGODOVSKY Pierre. — *Electrons photons Faraday, nombre d'Avogadro et quantum d'action d'après Mouvement Terrestre*.

- Compiègne, « Progrès de l'Oise », 1956. Pp. 16, in-8°.
- RAGAZZENA A. — *La materia e l'energia, lo spazio e il tempo nella costituzione di un'unità elementare reale*. Roma, Soc. A.B.E.T.E., s. d. Pp. 41, in-8°.
- ROSSINI Angelo. — *Determinazione delle dimensioni di tutte le grandezze elettriche e magnetiche*. Vetralla, 1956. Pp. 5, in-4° (Dattiloscritto).
- *Determinazioni delle dimensioni di tutte le grandezze elettriche e magnetiche nel sistema L.M.T.* Vetralla, 1956. Pp. 6, in-4° (Dattiloscritto).
- *Il potenziale degli ioni e spiegazione della forza elettromotrice voltaica*. Vetralla, 1956. Pp. 3, in-4° (Dattiloscritto).
- ROSSINI Angelo — *I raggi delle orbite degli elettroni nei vari atomi calcolati mediante i potenziali di ionizzazione*. Vetralla, 1956. Pp. 8, in-4° (Dattiloscritto).
- TOFANI Mario. — *L'irrigazione con le acque dei laghi collinari*. Estr. da « Genio Rurale », a. XVIII, 1955, n. 8.
- VALLAURI Giancarlo. — *Induzione unipolare prodotta da elettromagneti rotanti*. Estr. da « Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino », s. 3ª, vol. III, p. I. « *Webbia* ». Raccolta di Scritti Botanici. Vol. XI, 1956.

A. SIGNORINI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 giugno 1956

Presiede il Socio anziano GIUSEPPE LEVI

NOTE DI SOCI

Analisi matematica. — *Il parametro monormale di una varietà regolare dello spazio euclideo* (*). Nota (**) del Socio MAURO PICONE.

Siano $\Sigma_{(p)}$ e $S_{(r)}$ due spazi euclidei, rispettivamente a p e a $r = p + q$ ($p \geq 1, q \geq 1$) dimensioni, dei quali, rispettivamente, indicheremo con u_1, u_2, \dots, u_p ; x_1, x_2, \dots, x_r le coordinate dei punti. Assunto in $\Sigma_{(p)}$ un dominio ⁽¹⁾ limitato D internamente connesso ⁽²⁾ si definisca in esso una funzione puntuale

$$(1) \quad M = f(u_1, u_2, \dots, u_p),$$

a r componenti reali

$$f_1(u_1, \dots, u_p), \quad f_2(u_1, \dots, u_p), \dots, f_r(u_1, \dots, u_p),$$

continua con le sue derivate parziali prime e seconde. Il coinsieme V , in $S_{(r)}$, della funzione f , sarà detto una *porzione di varietà regolare, a p dimensioni e di classe due, avente per base il dominio D , se sono soddisfatte le seguenti condizioni.*

a) Si ha sempre, in D ,

$$(2) \quad \left(\frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_r)}{\partial (u_1, u_2, \dots, u_p)} \right)^2 > 0.$$

b) L'equazione (1) pone una corrispondenza biunivoca fra i punti di D e di V .

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per l'Applicazioni del Calcolo. I risultati di questo lavoro sono stati, in parte, comunicati al IV Congresso dei matematici Romeni, tenutosi a Bucarest dal 27 maggio al 5 giugno del 1956.

(**) Presentata nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) Cioè un insieme somma di un insieme aperto e della frontiera di questo.

(2) Cioè tale che l'insieme (aperto) dei punti interni a D sia connesso.

Il coinsieme, in $S_{(r)}$, della f , relativo alla frontiera $\mathcal{F}D$ di D dicesi il *bordo* di V e sarà indicato con $\mathcal{B}V$, i punti di V non situati su $\mathcal{B}V$ diconsi *interni* a V .

Evidentemente una porzione di varietà regolare è un *continuo* di $S_{(r)}$.

Lo spazio $S_{(p)}$ tangente nel punto M alla V è la varietà lineare a p dimensioni, avente per sistema fondamentale quello costituito dai p vettori con le componenti

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_h}, \frac{\partial f_2}{\partial u_h}, \dots, \frac{\partial f_r}{\partial u_h} \quad (h = 1, 2, \dots, p)$$

che, in base alla (2), riescono linearmente indipendenti.

Lo spazio $S_{(q)}$ normale nel punto M alla V è la varietà lineare a q dimensioni, avente per sistema fondamentale quello costituito da q vettori X_k , di componenti

$$X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kr} \quad (k = 1, 2, \dots, q),$$

vettori che supporremo fra di loro ortogonali e di modulo uno, verificanti le equazioni:

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_h} X_{ki} = 0 \quad (h = 1, \dots, p; k = 1, \dots, q).$$

Indicando con Δ il discriminante della forma quadratica definita positiva

$$ds^2 = \sum_{i=1}^r (df_i)^2 = \sum_{h,h'}^{1,p} \left(\sum_{i=1}^r \frac{\partial f_i}{\partial u_h} \frac{\partial f_i}{\partial u_{h'}} \right) du_h du_{h'},$$

risulta

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} & X_{11} & \dots & X_{q1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial u_p} & X_{1r} & \dots & X_{qr} \end{vmatrix}^2 = \Delta > 0.$$

Per un punto P dello spazio $S_{(r)}$, che giaccia nello spazio $S_{(q)}$ normale alla V nel punto M , indicando con v_k il prodotto scalare del vettore \overrightarrow{MP} per il vettore X_k , si ha:

$$(3) \quad x_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_p) + X_{i1}v_1 + X_{i2}v_2 + \dots + X_{iq}v_q, \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

Il punto P riesce funzione del punto $Q(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$, definita nel cilindro Γ , dello spazio $\Sigma_{(r)}$ del punto Q , luogo dei punti di questo spazio le cui proiezioni, sullo spazio $\Sigma_{(p)}$, appartengono a D . Porremo

$$P = \varphi(Q),$$

$\varphi(Q)$ designando una funzione puntuale a r componenti, date dai secondi membri della (3). Si ha

$$J(Q) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\partial(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \sum_{k=1}^q v_k \frac{\partial X_{k1}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} + \sum_{k=1}^q v_k \frac{\partial X_{k1}}{\partial u_p} & X_{11} & \dots & X_{q1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial u_1} + \sum_{k=1}^q v_k \frac{\partial X_{kr}}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial u_p} + \sum_{k=1}^q v_k \frac{\partial X_{kr}}{\partial u_p} & X_{1r} & \dots & X_{qr} \end{vmatrix}$$

e quindi, in D ,

$$J(u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0)^2 = \Delta > 0.$$

Disponendo del verso dei vettori X_k , potremo supporre che sia sempre, in D ,

$$J(u_1, \dots, u_p, 0, \dots, 0) > 0.$$

Esiste un numero positivo ρ_1 tale che se è soddisfatta la limitazione

$$|P - M| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_q^2} \leq \rho_1,$$

si abbia sempre

$$(5) \quad J(Q) \equiv J(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) > 0.$$

1. Il bicilindro $\Gamma(D, \rho_1)$ dello spazio Σ_r , definito dalle condizioni

$$(u_1, \dots, u_p) \text{ è in } D, \quad |P - M| \leq \rho_1,$$

è un dominio e, supposto D convesso, risulta esso pure tale.

Esiste pertanto, in $\Gamma(D, \rho_1)$, nell'ipotesi della convessità di D , per la funzione $\varphi(Q)$ un parametro δ_1 d'invertibilità⁽³⁾, cioè un numero positivo δ_1 tale che, comunque si assuma in $\Gamma(D, \rho_1)$ un insieme E di punti, di diametro minore di δ_1 , la corrispondenza, posta dall'equazione $P = \varphi(Q)$ fra E e il coinsieme delle $\varphi(Q)$, relativo a E , risulti biunivoca. Il bicilindro $\Gamma(T, \rho)$ dello spazio Σ_r , definito dalle condizioni

$$(u_1, \dots, u_p) \text{ è in } T, \quad |P - M| \leq \rho,$$

ove T è un qualsivoglia insieme di punti di D e ρ un numero positivo non superiore a ρ_1 è contenuto in $\Gamma(D, \rho_1)$ ed ha diametro non superiore a $\text{diam } T + 2\rho$, e pertanto, se δ_2 e ρ_2 sono due fissati numeri positivi che verifichino le limitazioni

$$\delta_2 + 2\rho_2 \leq \delta_1, \quad \rho_2 \leq \rho_1,$$

l'equazione $P = \varphi(Q)$, pone una corrispondenza biunivoca fra i punti di ogni bicilindro $\Gamma(T, \rho)$ e il coinsieme della $\varphi(Q)$ a questo relativo, non appena riesca $\text{diam } T \leq \delta_2$, $\rho < \rho_2$. Siano ora $Q(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ e $Q'(u'_1, \dots, u'_p, v'_1, \dots, v'_q)$ due qualsivogliano punti di $\Gamma(D, \rho_1)$. Detta $l(M, M')$ la lunghezza del segmento rettilineo congiungente i due punti $M(u_1, \dots, u_p)$ e $M'(u'_1, \dots, u'_p)$ di V , risulta

$$|\varphi(Q) - \varphi(Q')| > l(M, M') - 2\lambda,$$

quando sia

$$\sqrt{v_1^2 + \dots + v_q^2} < \lambda, \quad \sqrt{v_1'^2 + \dots + v_q'^2} < \lambda,$$

e quindi, se μ è il minimo (positivo) di $l(M, M')$, al variare di (u_1, \dots, u_p) e (u'_1, \dots, u'_p) in D , con la condizione

$$(6) \quad \sqrt{(u_1 - u'_1)^2 + \dots + (u_p - u'_p)^2} \geq \delta_2,$$

(3) Cfr. PICONE e FICHERA, *Trattato di Analisi matematica*, vol. II, Teor. IV del n. 57. Ed. Tumminelli (Roma, 1956).

si avrà

$$|\varphi(Q) - \varphi(Q')| > 0,$$

quando sia soddisfatta la (6) e si abbia

$$\sqrt{v_1^2 + \dots + v_q^2} < \frac{\mu}{2}, \quad \sqrt{v_1'^2 + \dots + v_q'^2} < \frac{\mu}{2}.$$

Se dunque indichiamo con ρ un numero positivo minore di ρ_2 e di $\mu/2$, possiamo affermare che:

I. - L'equazione $P = \varphi(Q)$, pone una corrispondenza biunivoca fra i punti del bicilindro $\Gamma(D, \rho)$ dello spazio $\Sigma_{(r)}$ e il coinsieme della funzione $\varphi(Q)$ a quello relativo.

In generale, data una porzione V di varietà regolare a p dimensioni, dello spazio $S_{(r)}$, dotata di base convessa, di classe due, l'estremo superiore $\bar{\rho}(V)$ dell'intervallo di numeri positivi ρ per i quali ha luogo la corrispondenza biunivoca asserita dal teorema ora enunciato, sarà detto il *parametro monormale* della varietà e il coinsieme della funzione $\varphi(Q)$ relativo al bicilindro $\Gamma(D, \rho)$, con $\rho < \bar{\rho}(V)$, *pseudoinvolucro di raggio ρ della V* , e indicato col simbolo $H(V, \rho)$, per indicare con $I(V, \rho)$ l'*involucro di raggio ρ della V* , cioè il luogo dei punti di $S_{(r)}$ aventi da V distanza non superiore a ρ . Sussistono i teoremi seguenti.

II. - Per ogni numero positivo ρ , minore del parametro monormale $\bar{\rho}(V)$ della varietà V , lo pseudoinvolucro $H(V, \rho)$ è un dominio internamente connesso e per ogni suo punto P si può condurre uno ed un solo segmento rettilineo PM , di lunghezza non superiore a ρ , normale alla V nel punto M ⁽⁴⁾.

Ed invero, l'equazione $P = \varphi(Q)$, pone una corrispondenza biunivoca fra i punti di $\Gamma(D, \rho)$ e il coinsieme $H(V, \rho)$ a quello relativo, della $\varphi(Q)$.

III. - Per ogni numero positivo $\rho < \bar{\rho}(V)$, si ha

$$I(V, \rho) = H(V, \rho) + I(\mathcal{B}V, \rho).$$

Ed invero, un qualsivoglia punto P di $H(V, \rho)$, essendo contenuto in un'ipersfera con centro in un punto M di V e raggio ρ appartiene a $I(V, \rho)$. Viceversa, il punto P appartenga a $I(V, \rho)$ e non a $I(\mathcal{B}V, \rho)$. Esiste un punto M_0 di V tale che $|P - M_0|$ fornisce la distanza, non superiore a ρ , di P da V . Tale punto non è situato su $\mathcal{B}V$ e pertanto, dovendo la funzione $|P - M|$, al variare di M su V , assumere il minimo valore nel punto M_0 , interno a V , il gradiente di $|P - M|$ dovrà riuscire normale in M_0 alla V , cioè il segmento PM_0 , esso stesso, essere normale in M_0 alla V , ed avendo lunghezza non superiore a ρ , appartenere a $H(V, \rho)$.

2. Diremo che un insieme V di punti di $S_{(r)}$ è una *varietà regolare a p dimensioni* se esistono due o più porzioni V_1, V_2, \dots, V_n di varietà regolari a p dimensioni (che si diranno le *facce* di V) per cui risulti $V = V_1 +$

(4) Si dovrebbe, pertanto, più correttamente, chiamare $\bar{\rho}(V)$ *parametro di unicità del segmento normale*. Per abbreviare preferisco designarlo con l'attribuirgli l'aggettivo *mononormale* che, con una contrazione, abbrevio, a sua volta, in *monormale*.

$+V_2 + \dots + V_n$ tali che esista una certa permutazione j_1, j_2, \dots, j_n degli indici $1, 2, \dots, n$, per cui la faccia $V_{j_l} (l = 1, 2, \dots, n-1)$ abbia punti comuni con la faccia $V_{j_{l+1}}$. La varietà V si dirà *chiusa* se ogni punto di V è interno ad una sua faccia almeno, *liscia* se due qualsivogliano sue facce hanno, nei loro eventuali punti comuni, lo stesso $S_{(p)}$ tangente, e per ogni suo punto che sia interno ad una faccia V_h , esiste un campo circolare C , con centro in quel punto, per cui riesca $C \cdot V = C \cdot V_h$. Sussistono i teoremi seguenti.

IV. — *La varietà V regolare e liscia, a p dimensioni, abbia le facce V_1, V_2, \dots, V_n , in numero non inferiore a tre e i due insiemi*

$$V' = V_1 + V_3 + \dots + V_n, \quad V'' = V_2 + V_3 + \dots + V_n,$$

risultino entrambi porzioni di varietà regolari a base convessa, mentre le facce V_1 e V_2 non abbiano punti comuni. Esiste allora per la V il parametro monormale e si possono quindi definire per essa gli pseudoinvolucri, che risultano domini internamente connessi.

Sia, invero, ρ un numero positivo minore della metà della distanza fra i due insiemi chiusi V_1 e V_2 e di entrambi i parametri monormali $\bar{\rho}(V')$ e $\bar{\rho}(V'')$ e si consideri il dominio $H(V', \rho) + H(V'', \rho)$. Se per un punto P di tale dominio si potessero condurre due diversi segmenti rettilinei PM' e PM'' di lunghezza non superiore a ρ , normali in M' e in M'' alla V , i punti M' e M'' dovrebbero appartenere, uno a V_1 e l'altro a V_2 , ma risultando $|M' - M''| \leq 2\rho$, ciò è assurdo.

V. — *Se una varietà regolare e liscia verifica le ipotesi del teorema precedente, ed è chiusa, comunque si assuma il numero positivo ρ , minore del suo parametro monormale, lo pseudoinvolucro della varietà, di raggio ρ , coincide col suo involucro dello stesso raggio.*

VI. — *Se una varietà regolare V ha le facce V_1, V_2, \dots, V_n , ciascuna a base convessa, e per ogni punto di V che sia interno ad una faccia $V_l (l = 1, 2, \dots, n)$ esiste un campo circolare C , con centro in quel punto, per cui riesca $C \cdot V = C \cdot V_l$, assunto ad arbitrio un numero positivo ρ minore degli n parametri $\bar{\rho}(V_l) (l = 1, 2, \dots, n)$ si ha*

$$I(V, \rho) = \sum_{l=1}^n H(V_l, \rho) + \sum_{l=1}^n I(\mathcal{S}V_l, \rho).$$

3. Si dimostra facilmente che:

VII. — *Nelle considerate ipotesi in cui è stato definito lo pseudoinvolucro $H(V, \rho)$ della varietà regolare V a p dimensioni dello spazio S_{p+q} l'insieme $H(V, \rho) - V$ risulta connesso o no secondochè q è maggiore od eguale ad uno. Per $q = 1$, indicato v_1 con v , le due parti di $H(V, \rho)$ per le quali è, rispettivamente, $v \geq 0$ e $v \leq 0$, sono due domini internamente connessi.*

Per $r = 3$ e $q = 2$, gli pseudoinvolucri $H(V, \rho)$ sono stati già introdotti nel citato trattato di Picone e Fichera [loc. cit. ⁽³⁾ n. 58] e chiamati, per evidente motivo, *tubi circolari retti di raggio ρ , aventi per asse la curva V , chiamando superficie tubulare retta di asse V , il luogo dei punti di $H(V, \rho)$ aventi da V distanza ρ , e parametro tubulare, il parametro monormale $\bar{\rho}(V)$.*

In generale, dunque, supposto $r \geq 3$ e $q \geq 2$, lo pseudoinvolucro $H(V, \rho)$ si potrà chiamare anche *ipertubo circolare retto di raggio ρ , avente per asse la varietà V , ipersuperficie tubulare retta di asse V e di raggio ρ* , il luogo dei punti di $H(V, \rho)$ aventi da V distanza ρ , e *parametro ipertubulare*, il parametro monormale $\bar{\rho}(V)$.

Per $r = 3$ e $q = 1$, al n. 59 dello stesso trattato, lo pseudoinvolucro $H(V, \rho)$ è stato chiamato *strato retto, di spessore 2ρ , avente la V per superficie mediana* e il parametro monormale $\bar{\rho}(V)$, *parametro di stratificazione* della superficie V ; per $r = 2$ e $q = 1$, al n. 60, *striscia retta del piano, di larghezza 2ρ , avente la V come curva mediana* e il parametro $\bar{\rho}(V)$, *parametro di strittura* della curva V .

In generale, per $q = 1$, lo pseudoinvolucro $H(V, \rho)$ si potrà chiamare *iperstrato retto, di spessore 2ρ , avente la V come ipersuperficie mediana* e *parametro di iperstratificazione* il parametro monormale $\bar{\rho}(V)$. Sostituiamo v_1 con v e indichiamo con $\Gamma'(D, \rho)$ e $\Gamma''(D, \rho)$ i cilindri, dello spazio $\Sigma_{(r)}$, luogo dei punti per i quali $(u_1, u_2, \dots, u_{r-1})$ è in D e, rispettivamente $-\rho \leq v \leq 0$ e $0 \leq v \leq \rho$, con $H'(V, \rho)$ e $H''(V, \rho)$ i coinsiemi, in $S_{(r)}$, della funzione $\varphi(Q)$ relativi, rispettivamente, a $\Gamma'(D, \rho)$ e a $\Gamma''(D, \rho)$. Nelle ipotesi del teorema II o IV, per $\rho < \bar{\rho}(V)$, l'equazione $P = \varphi(Q)$ pone una corrispondenza biunivoca fra i punti dei domini $\Gamma'(D, \rho)$ e $H'(V, \rho)$ e fra quelli dei domini $\Gamma''(D, \rho)$ e $H''(V, \rho)$. Ebbene, gli estremi superiori $\rho'(V)$ e $\rho''(V)$ degli intervalli di numeri positivi ρ per i quali hanno luogo le indicate corrispondenze biunivoche fra $\Gamma'(D, \rho)$ e $H'(V, \rho)$ e fra $\Gamma''(D, \rho)$ e $H''(V, \rho)$, si diranno i *parametri di iperstratificazione inferiore e superiore dell'ipersuperficie V* e i domini $H'(V, \rho)$ e $H''(V, \rho)$ *iperstrati retti, inferiore e superiore, di spessore ρ , sull'ipersuperficie V* .

Si dimostra facilmente il teorema:

VIII. - *Nelle ipotesi del teorema II o IV, per $q \geq 2$, assunto ad arbitrio un numero positivo $\rho < \bar{\rho}(V)$ l'ipersuperficie tubulare retta di asse V e di raggio ρ ha per parametri di iperstratificazione inferiore e superiore ρ e $\bar{\rho}(V) - \rho$; per $q = 1$, assunta ad arbitrio una costante c maggiore di $-\rho'(V)$ e minore di $\rho''(V)$, la ipersuperficie di equazione $v = c$, ha per parametri d'iperstratificazione inferiore e superiore $c + \rho'(V)$ e $\rho''(V) - c$.*

Ai citati numeri del detto trattato sono indicate talune notevoli circostanze metriche relative ai tubi, agli strati e alle strisce, considerati anche non retti, che si potrebbero estendere agli ipertubi e agli iperstrati e in tutto il trattato stesso sono fatte frequenti applicazioni di questi concetti, mediante le quali vengono conseguite, in molte importanti analisi, forse per la prima volta, le dovute precisazioni.

4. Notiamo che il parametro monormale $\bar{\rho}(V)$ è un elemento metrico, in grande, della varietà V , che può differire moltissimo dal minimo dei suoi raggi di curvatura. Per esempio, per un'elica, di passo δ , di un cilindro circolare retto di raggio R , dello spazio ordinario, supposto $\delta < 2\pi R$, si vede che il suo parametro tubulare è minore di $\delta/2$ e di $2R$, laddove il suo costante

raggio di curvatura vale $R + \delta^2/4\pi^2 R$. Dunque, il parametro monormale di un'elica di un cilindro circolare retto è infinitesimo col passo di questa, mentre il suo raggio di curvatura tendè al raggio del cilindro.

Notiamo, infine, che per l'esistenza del parametro monormale di una varietà, le considerate ipotesi di regolarità, che la riguardano, sono essenziali. Per esempio, una curva V dello spazio ordinario, costituita da due segmenti AB e AC di due rette distinte uscenti dal punto A , non è dotata di parametro monormale ed infatti, per ogni punto P del piano bisettore dell'angolo BAC , normale in A al piano BAC , tale che il segmento PA sia opportunamente inclinato su questo piano, si possono condurre due distinti segmenti rettilinei normali alla V , di uguale lunghezza piccola quanto si vuole, con gli estremi sulla V e a questa interni.

Matematica. — *Sulla derivazione degli integrali indefiniti.* Nota (*) del Corrisp. GIUSEPPE SCORZA DRAGONI.

La derivata ordinaria dell'integrale indefinito di una funzione misurabile e limitata coincide, notoriamente, colla funzione integranda in ogni punto in cui questa sia approssimativamente (o asintoticamente) continua ⁽¹⁾; e in ogni tal punto sono allora approssimativamente continue tanto la funzione integranda quanto la costante maggioratrice, che ivi porge naturalmente la derivata del proprio integrale indefinito. Posto il teorema sotto questa forma, si scorge subito come convenga procedere per estenderlo alle funzioni sommabili, maggiorate in modulo da una certa altra funzione sommabile. Ed in questa Nota darò qualche proposizione sull'argomento, considerando anche la derivata in senso forte ed accennando a quella in senso generale ⁽²⁾. Ricordo tuttavia che un risultato in tale ordine di idee si trova già implicitamente stabilito in un'altra mia Nota ⁽³⁾, in vista di applicazioni. Non mi sembra peraltro inutile riprendere in esame l'argomento di per sé; anzi, anche le dimostrazioni di quell'altra mia Nota guadagneranno in perspicuità.

I. Fissiamo qualche ipotesi e qualche convenzione, da mantenere per il seguito.

(*) Presentata nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) Si vegga S. SAKS, *Theory of the integral* (Varsavia, 1937), p. 132, teorema (10.7). Al trattato di SAKS mi atterrò, in seguito, per la terminologia.

(2) Per la definizione di questa derivata, come di quella in senso generale (e di quella ordinaria), si vegga la p. 106 del trattato di SAKS citato. Nel terzo rigo di quella pagina si deve leggere « upper » invece di « lower ».

(3) G. SCORZA DRAGONI, *Un'applicazione della quasicontinuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile*, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », serie 8^a, vol. 12, pp. 55-61, n. 3 (1952).

Le funzioni reali g e k sian misurabili nello spazio reale euclideo n -dimensionale e soddisfacciano alla

$$(1) \quad |g(x)| \leq k(x)$$

in ogni punto, x , dello spazio. Se g e k son date, inizialmente, soltanto in un certo sottoinsieme misurabile di quello spazio, si penseranno prolungate in tutto lo spazio, ponendole costantemente nulle nel complementare di quel sottoinsieme. La funzione k , ovunque finita, sia sommabile in ogni porzione misurabile e limitata dello spazio; le stesse circostanze si presentano allora anche per la funzione g .

Se E è una porzione limitata e misurabile dello spazio, si ponga

$$\Gamma(E) = \int_E g(x) dx, \quad K(E) = \int_E k(x) dx;$$

nel caso unidimensionale, poi, si ponga

$$\gamma(x) = \int_a^x g(t) dt, \quad \kappa(x) = \int_a^x k(t) dt,$$

a essendo un numero naturale (fisso) e l'integrazione essendo sempre intesa nel senso di Lebesgue: Γ e K son funzioni di insieme, γ e κ di punto.

2. Incominciamo con lo stabilire una proposizione relativa alla derivazione ordinaria, dimostrando che:

Ferre le ipotesi del numero precedente, la funzione Γ è derivabile in senso ordinario, con derivata uguale a g , in ogni punto nel quale k sia la derivata ordinaria di K e nel quale tanto g quanto k siano approssimativamente continue.

Sia infatti x_0 un tal punto, quale quelli considerati nell'enunciato, e si ponga

$$g^*(x) = g(x), \quad k^*(x) = k(x)$$

in quei punti dello spazio nei quali risulti, simultaneamente,

$$|g(x)| < |g(x_0)| + 1, \quad k(x) < k(x_0) + 1$$

e

$$g^*(x) = 0, \quad k^*(x) = 0$$

negli altri. Quindi si definiscano Γ^* e K^* mediante le posizioni

$$\Gamma^*(E) = \int_E g^*(x) dx, \quad K^*(E) = \int_E k^*(x) dx,$$

avendo E il solito significato.

Le funzioni g^* e k^* sono entrambe limitate in tutto lo spazio ed entrambe approssimativamente continue in x_0 , coincidendo quivi rispettivamente con $g(x_0)$ e $k(x_0)$. Inoltre, attesa la (1), risulta

$$(2) \quad |g(x) - g^*(x)| \leq k(x) - k^*(x)$$

in ogni punto dello spazio.

Se gli intervalli chiusi I_1, I_2, \dots contengono il punto x_0 e costituiscono, nel senso della teoria della derivazione delle funzioni di insieme, una successione regolare e convergente verso x_0 , detta $m(I_r)$ la misura di I_r riesce

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{K(I_r)/m(I_r)\} = k(x_0),$$

per ipotesi, nonché

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \{K^*(I_r)/m(I_r)\} = k^*(x_0) = k(x_0) \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \{\Gamma^*(I_r)/m(I_r)\} = g^*(x_0) = g(x_0),$$

per il teorema ricordato all'inizio e citato nella nota ⁽¹⁾. Donde la facile conclusione, poiché dalla (2) si trae $|\Gamma(I_r) - \Gamma^*(I_r)| \leq K(I_r) - K^*(I_r)$.

In particolare:

Nel caso unidimensionale, e nelle ipotesi poste, la funzione γ è derivabile ⁽⁴⁾ ed ha g come derivata in ogni punto, nel quale x sia derivabile e vi abbia k come derivata e nel quale g e k siano entrambe approssimativamente continue ⁽⁵⁾.

Sarebbe superfluo avvertire che le condizioni ulteriori richieste da questo e dal teorema precedente son soddisfatte quasi ovunque.

3. Il teorema ricordato nell'introduzione circa la derivata ordinaria degli integrali indefiniti delle funzioni misurabili e limitate sussiste tal quale anche per la derivazione in senso forte ⁽⁶⁾. Pertanto lo stesso ragionamento del n. 2 porge che:

Nel primo teorema dal numero precedente, la derivazione ordinaria di K e di Γ può esser sostituita da quella in senso forte, la sostituzione dovendo avvenire, beninteso, tanto nell'ipotesi quanto nella tesi.

Peraltro allora la condizione della derivabilità in senso forte di K continua ad esser soddisfatta quasi ovunque soltanto se a k si impongono delle restrizioni ulteriori ⁽⁷⁾.

4. Il ragionamento usato nella mia Nota citata ⁽⁸⁾ permette poi di dimostrare che anche nel caso pluridimensionale:

(4) Nel senso consueto della parola nella teoria delle funzioni di una variabile.

(5) Questo risultato potrebbe essere utilizzato nella mia Nota citata, per giungere sostanzialmente agli stessi teoremi; per altre dimostrazioni degli stessi teoremi, si veggia anche K. HAYASHI, *On the differential equation of Carathéodory's type*, «Memoirs of the College of Sciences», University of Kyoto, vol 28, pp. 129-132 (1953).

(6) Si veggia il passo citato nella nota ⁽¹⁾.

(7) Loc. cit. nota ⁽¹⁾, pp. 133 e 147-149.

(8) Loc. cit. nota ⁽³⁾.

Ferme le solite ipotesi, la funzione Γ è derivabile in senso ordinario, con derivata uguale a g , in ogni tal punto x_0 , che K vi abbia $k(x_0)$ come derivata in senso generale e che g subordini una funzione continua in (almeno) un insieme chiuso, C , dotato in x_0 di densità unitaria⁽⁹⁾.

Gli intervalli chiusi I_1, I_2, \dots contengano il punto x_0 e costituiscano, sempre nel senso della teoria della derivazione delle funzioni di insieme, una successione regolare e convergente verso x_0 . Si ponga $C_1 = C \cdot I_1, C_2 = C \cdot I_2, \dots$ e si dicano $m(I_r)$ ed $m(C_r)$ le misure rispettive di I_r e C_r , $r = 1, 2, \dots$. Poiché C ha densità unitaria nel punto x_0 , riesce

$$(3) \quad m(C_r)/m(I_r) \rightarrow 1 \quad \text{per } r \rightarrow \infty;$$

sicché anche gli insiemi chiusi C_1, C_2, \dots oltre a contenere x_0 costituiscono, sempre in quel tal senso, una successione regolare, convergente verso x_0 .

All'insieme C si può imporre la condizione ulteriore di esser limitato. Allora, posto $g^*(x) = g(x)$ in C e $g^*(x) = 0$ negli altri punti dello spazio, la funzione g^* è misurabile e limitata in tutto lo spazio, coincide con g nel punto x_0 , nel quale è anche approssimativamente continua. Inoltre, attesa la (1), risulta

$$(4) \quad |\Gamma(I_r) - \Gamma^*(C_r)| = |\Gamma(I_r - C_r)| \leq K(I_r - C_r) = K(I_r) - K(C_r),$$

il significato di Γ^* essendo palese.

Il teorema ricordato all'inizio dell'introduzione porge che il rapporto $\Gamma^*(C_r)/m(I_r)$, uguale a $\Gamma^*(I_r)/m(I_r)$, converge verso $g^*(x_0)$, cioè verso $g(x_0)$, al divergere di r . Al divergere di r i rapporti $K(I_r)/m(I_r)$ e $K(C_r)/m(C_r)$ convergono entrambi verso $k(x_0)$, per l'ipotesi, e dalla (4) è facile concludere, ricordando la (3), che il rapporto $\Gamma(I_r)/m(I_r)$ converge appunto verso $g(x_0)$, per r divergente.

Considerazioni analoghe a quelle svolte porgono finalmente che:

Ferme le solite ipotesi, la funzione Γ è derivabile in senso generale, con derivata uguale a g , in ogni tal punto x_0 , che K vi abbia $k(x_0)$ come derivata in senso generale e che g subordini una funzione continua in (almeno) un insieme chiuso C siffatto, che l'integrale indefinito della sua funzione caratteristica possegga nel punto x_0 la derivata in senso generale, questa riuscendovi uguale alla unità⁽¹⁰⁾.

Nel fatto basta ragionare come per il teorema precedente, supponendo che I_1, I_2, \dots siano degli insiemi chiusi, contengano x_0 e costituiscano (nel solito senso) una successione regolare, convergente verso x_0 . Stavolta la convergenza del rapporto $\Gamma^*(C_r)/m(I_r)$ verso $g^*(x_0)$, per r divergente, seguirà dalla (3) e dalla continuità della funzione subordinata da g^* su C , e la deduzione è ovvia.

(9) E sarebbe di nuovo superfluo ricordare che anche stavolta x_0 può coincidere con quasi tutti i punti dello spazio.

(10) Sussiste sempre la circostanza ricordata nella Nota precedente.

Astronomia. — *Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due.* Nota (*) I del Corrisp. VITTORIO NOBILE.

Chi fermasse nell'epoca presente per la prima volta l'attenzione sopra un certo periodo storico dell'astronomia e particolarmente su quello in cui nacque l'idea di intraprendere determinazioni di « moti propri » di alcune stelle isolate, nel concetto che le rimanenti fossero da considerarsi « fisse » e dovessero quindi costituire un naturale riferimento pei moti da studiare, non potrebbe che ricevere la immediata impressione di un problema mal posto, anzi teoricamente assurdo, perché non si potrebbe, allo stato attuale delle nostre bene accertate conoscenze, enunciare quel proponimento senza con questo negare, implicitamente, o l'esistenza di un ammasso galattico, oppure quella di azioni gravitazionali alle quali l'ammasso stesso deve immancabilmente dar luogo sopra ogni corpo del sistema. La conformazione attuale dell'ammasso (che è lecito supporre stabilizzata, almeno per lunghissimi periodi) non consente infatti che nell'interno di esso abbiano luogo movimenti di stelle con traiettorie rettilinee, o, per meglio precisare, deve far ritenere impossibile che possano aversi siffatte traiettorie nel moto relativo ad un triebro con origine nel centro di massa dell'ammasso e con orientamento invariabile (a rotazione assoluta nulla). La presenza di accelerazioni assolute non nulle è pertanto sicura e quella di un campo gravitazionale di intensità non trascurabile è da ritenersi fuori discussione.

Nessun corpo dell'ammasso può dunque considerarsi, in generale, privo di velocità assoluta: pertanto nessuna ipotesi che assuma l'inesistenza di moto per un gruppo più o meno esteso di stelle può esser posta a base di ricerche generali, in special modo poi se si tratti di quelle che tendono a scoprire leggi di distribuzione delle velocità.

L'illusione degli astronomi del passato che un riferimento rigoroso a corpi *fissi* o a direzioni *fisse* sia direttamente effettuabile deve essere quindi definitivamente sgombrata dalla moderna astronomia perché quei corpi e quelle direzioni sono materialmente inesistenti e non si potrebbe neanche pensare a che cosa corrisponda quell'oscura esigenza dello spirito umano che spinge a ricercare il campione di quiete assoluta, cioè qualche cosa che non si è mai riusciti a definire. Ciò che sicuramente esiste è il sistema di quei postulati che sono racchiusi nelle leggi newtoniane della dinamica e ad esse equivalgono: sistema sul quale si fonda la definizione di un assoluto più ristretto di quello metafisico, ma atto a dar luogo alla costruzione di una meccanica dei moti relativi alla quale nessun problema concreto sfugge, neanche i più vasti e complessi, tra i quali quelli della meccanica celeste.

(*) Presentata nella seduta dell'8 giugno 1956.

È dunque ben chiaro che, svanita l'illusione di cui sopra, nessun tentativo per risolvere il problema dei « moti propri » — che risulta ormai *non distinto* da quello delle velocità relative in *tutta* la Galassia — possa aver successo se non porti ad introdurre condizioni con le quali venga a realizzarsi il riferimento dei moti stellari a quel sistema di elementi assoluti che i postulati predetti definiscono.

2. Premesso quanto innanzi, fisseremo, allo scopo di poter esporre schematicamente le varie soluzioni che il problema dei moti stellari può comportare in relazione coi vari presupposti possibili, le definizioni che seguono. Intenderemo anzitutto per posizioni e velocità assolute quelle relative ad un triedro inerziale \mathcal{T} indipendente dall'ammasso. Detta Σ una stella generica dell'ammasso, S il centro di massa del sistema solare (che supporremo coincidente col centro del Sole al quale si intenderanno preventivamente ridotti tutti i dati di osservazione) si diranno allora rispettivamente \mathbf{v}_Σ e \mathbf{v}_S i vettori delle velocità assolute di Σ e di S rispetto a \mathcal{T} . Detto inoltre T_t un triedro mobile (cioè a rotazione $\omega(p, q, r)$ non nulla) con origine in S e con orientamento opportunamente definito e tale che ad esso l'osservatore possa ad ogni istante riferire le posizioni e velocità relative delle stelle, avremo da una notissima formola di cinematica

$$(1) \quad \mathbf{v}_\Sigma - \mathbf{v}_S = \dot{\Sigma}_r + \omega \wedge (\Sigma - S)$$

dove si è indicato inoltre con $\dot{\Sigma}_r$ il vettore della velocità relativa di Σ rispetto a T_t ($\dot{\Sigma}_r = d\Sigma/dt$).

I vettori \mathbf{v}_S e \mathbf{v}_Σ sono, naturalmente, determinati solo a meno di un vettore additivo arbitrario e costante, ma ben determinata è la loro differenza. Il suo significato è, per la (1), evidente perché quest'equazione, quando vi si ponga $\omega = 0$, dà $\mathbf{v}_\Sigma - \mathbf{v}_S = \dot{\Sigma}_r$; $\mathbf{v}_\Sigma - \mathbf{v}_S$ è dunque la velocità relativa di Σ in uno spazio collegato ad un triedro a rotazione nulla avente l'origine in S . È questa l'unica maniera di concepire e rappresentare il moto relativo delle stelle nell'ammasso ed è tutto quanto si può pretendere di conoscere in materia di moti stellari. Il concetto di moto proprio, come è inteso dagli astronomi delle epoche trascorse, rientra in questa definizione.

Le proiezioni, sugli assi del triedro mobile, della velocità di Σ nell'ammasso si dedurranno quindi dalla (1) e potranno scriversi (indicando con $\dot{x}_r, \dot{y}_r, \dot{z}_r$ le componenti di $\dot{\Sigma}_r$ al tempo t e con x, y, z le coordinate di Σ rispetto a T_t)

$$(2) \quad \begin{cases} \mu_x = \dot{x}_r + qz - ry \\ \mu_y = \dot{y}_r + rx - pz \\ \mu_z = \dot{z}_r + py - qx, \end{cases}$$

o anche, esprimendo, ai fini di un immediato raffronto col problema astronomico, i secondi membri in coordinate polari (distanza ρ e coseni di direzione α, β, γ),

$$(2') \quad \begin{cases} \mu_x = \dot{\rho}\alpha + \rho(\dot{\alpha}_r + q\gamma - r\beta) \\ \mu_y = \dot{\rho}\beta + \rho(\dot{\beta}_r + r\alpha - p\gamma) \\ \mu_z = \dot{\rho}\gamma + \rho(\dot{\gamma}_r + p\beta - q\alpha). \end{cases}$$

Gli elementi strettamente relativi al riferimento T_t , cioè $\alpha, \beta, \gamma; \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ e anche $\dot{\rho}$ sono senza difficoltà accessibili ai mezzi di osservazione attuali, ma lo stesso non può dirsi delle ρ . Nei primordi di queste ricerche gli astronomi ignoravano la possibilità di determinare le componenti radiali delle velocità e, in quanto alle distanze stellari, mettevano da parte tale problema, occupandosi solo di coordinate e moti propri angolari. Tale semplificazione corrisponde a porre nelle (2') $\dot{\rho} = 0, \rho = 1$ (tutte le stelle figurano così come collocate sulla sfera celeste). I moti stellari corrispondenti a tali condizioni assumono, con le notazioni qui adottate, le espressioni

$$(3) \quad \mu_x = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}_r + q\gamma - r\beta$$

e due analoghe per μ_y, μ_z . Anche così semplificato il problema dei moti stellari (ricerca delle incognite $\mu_x, \mu_y, \mu_z; p, q, r$) risulta indeterminato, non potendosi disporre, per n stelle, che di $3n$ equazioni fra $3n + 3$ incognite.

3. I metodi messi in pratica fino ad oggi dagli astronomi per giungere alla determinazione numerica dei « moti propri » sono formalmente diversi da quelli ai quali condurrebbe un'applicazione immediata delle formole che qui precedono, ma le operazioni effettive da svolgersi in relazione alle due diverse espressioni portano, quando siano esattamente interpretate, alle medesime conclusioni ⁽¹⁾. Ma, a parte ciò che concerne le operazioni di carattere matematico, bisogna fare due rilievi di ben sostanziale importanza. Anzitutto è da notare che nella scelta del triedro di riferimento qui indicato con T_t (che è quello che ogni sistema di coordinate sferiche basta ad individuare) gli astronomi si attengono ad uno, per così dire, *terrestre*, cioè collegato ai piani definiti dalla figura e dai movimenti della Terra. Con ciò essi presuppongono la conoscenza teorica del moto di rotazione di T_t . Nelle formole di trasformazione delle coordinate non possono quindi mancare quelle costanti

(1) I due membri della (3), isolatamente considerati, caratterizzano rispettivamente i due procedimenti. Secondo quello tradizionale le posizioni stellari (sferiche) dedotte dalla osservazione nelle varie epoche sono separatamente riferite a T_0 , nell'ipotesi che questo sia rimasto *fisso*: cioè deve intendersi — per esser chiari, dato che T_0 è posizione *istantanea* come T_t — che quelle posizioni e quindi le velocità che si deducono sono in realtà riferite ad un triedro T_0 a rotazione *nulla* con cui viene a coincidere T_t al tempo t_0 . Il movimento che la successione delle posizioni del punto α, β, γ indica sulla sfera celeste è dunque in realtà *assoluto*.

Col procedimento rappresentato nel secondo membro (che è quello che risulterà in seguito il più opportuno, data la necessità di una diversa scelta del triedro T_t) l'osservatore dovrà riferirsi sempre al triedro mobile, senza occuparsi del movimento di esso. Dedurrà quindi le $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0$ e analoghe per l'epoca t_0 (posizioni, velocità e accelerazioni angolari relative a T_0) e dovrà in seguito, per ottenere le derivate assolute (cioè riferite a T_0) aggiungere alle $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0$ rispettivamente le componenti delle velocità di trascinamento

$$q\gamma - r\beta, \quad r\alpha - p\gamma, \quad p\beta - q\alpha,$$

corrispondenti al tempo t_0 .

che la meccanica celeste introduce con l'integrazione delle equazioni del moto orbitale e di rotazione della Terra, costanti delle quali l'astronomo, dopo la scelta fatta, non può esimersi dall'occuparsi e deve anzi porre la loro determinazione numerica a base delle sue ricerche stellari, mentre non soltanto *quei numeri* ma *i problemi stessi* dalla cui trattazione essi derivano costituiscono materia *del tutto estranea ai problemi stellari considerati*. Ma oltre a ciò e a prescindere dalle gravi quanto inutili complicazioni che a causa della predetta scelta vengono a crearsi e dei cambiamenti d'indirizzo che si impongono, come più oltre sarà qui mostrato, è bene da notarsi che per potere svolgere questo loro compito apparentemente accessorio gli astronomi non possono evitare in alcun modo di ricorrere, riguardo ai movimenti di alcune stelle (o aggruppamenti di stelle) ad ipotesi *a priori* le quali sono da considerarsi inammissibili in ricerche aventi per fine ultimo quello della precisazione, con metodo diretto e autonomo, di *tutti* i moti stellari nella Galassia.

I due problemi: rotazione di T_t e conoscenza dei movimenti stellari relativi nel nostro ammasso, rimangono pertanto, coi mezzi di ricerca fin qui impiegati, ancora inseparabili e il problema unico al quale essi danno luogo è da ritenersi ancora, in mancanza di altri dati, incontestabilmente indeterminato.

4. La necessità assoluta di scindere i due problemi predetti col trovare, assumendo nuovi dati, una soluzione diretta e rigorosa di quello della rotazione di T_t era stata da me già rilevata e segnalata in epoca oramai lontana. Ero andato anche, nell'epoca stessa, ben oltre a tale deduzione. Dovendo le equazioni (2') intervenire solo in un secondo tempo, cioè per la determinazione dei moti stellari dopo che la rotazione di T_t sia conosciuta, era chiaro che per la conoscenza di questa si dovesse pensare - data la sicura esistenza di un campo gravitazionale galattico - ad un necessario coordinamento fra le accelerazioni stellari e che da tale realtà non potesse farsi astrazione nella trattazione del complesso problema generale, al fine di completare l'insieme delle equazioni con altre relazioni, di carattere dinamico. La differenza fra le accelerazioni assolute di Σ e S doveva risultare, prevedibilmente, dipendente dai valori del potenziale galattico nei detti punti e, d'altra parte, anche dagli elementi del moto relativo di Σ rispetto al triedro mobile T_t e dalla rotazione di questo. Era quindi da attendersi che coll'eguagliare le due espressioni della predetta differenza e con la eliminazione, in tal modo, di ogni elemento assoluto venisse in luce un insieme di relazioni che involgesse, oltre a dati sul moto relativo di Σ , tutti deducibili dalle osservazioni, le componenti della rotazione del triedro di riferimento e un numero limitato di coefficienti del potenziale galattico al quale sia stata assegnata una espressione sufficientemente approssimata.

Sulla guida di tali concetti avevo eseguito i relativi calcoli e le mie previsioni sulla possibilità di una effettiva esistenza delle relazioni cercate erano state superate dai fatti, in quanto che, oltre a ritrovare le previste relazioni, risultava dimostrata la possibilità di separare completamente da questi pro-

blemi quello delle distanze stellari, mentre la determinazione di queste con procedimento rigoroso e uniforme rimaneva egualmente assicurata e solo subordinata a determinazioni precise, da eseguire a parte, delle componenti radiali delle velocità relative.

Tali risultati, incontestabilmente di alto interesse per gli sviluppi che su queste basi potevano sperarsi nella trattazione di grandi problemi dell'astronomia stellare, furono pubblicati nel 1928 ⁽²⁾, ma rimasero totalmente ignorati fuori d'Italia e ciò, probabilmente, a causa della scarsa diffusione del periodico dove le mie conclusioni erano state riferite. I rilievi critici essenziali da me fatti su concezioni e metodi dell'epoca presente e i risultati conseguiti, sicuramente costruttivi ai fini di una necessaria riforma, non hanno potuto pertanto formare oggetto di esame e di meditazione da parte di altri studiosi. Gli astronomi hanno così continuato dopo di quell'epoca, in Europa e fuori, nelle ricerche sui massimi problemi dell'astronomia stellare, ad affidarsi con piena fiducia a dati sul cui significato *sussiste una indeterminatezza che è teoricamente certa*. Certezza la cui gravità non può essere attenuata dalla considerazione che resti imprecisabile l'ordine di grandezza degli errori che conseguono e che hanno origine dalla introduzione di ipotesi arbitrarie con le quali si è tentato di supplire alla insufficienza di dati innanzi rilevata.

La situazione qui prospettata spiega la necessità, da me sentita anche come un dovere, di ripresentare al pubblico scientifico i risultati da tanto tempo ottenuti e rimasti finora pressoché ignoti. E tanto più urgente mi è apparsa tale necessità in quanto che uno studio da me più recentemente concluso ⁽³⁾ sulle concezioni che stanno a base delle recenti ricerche sul coordinamento delle velocità stellari mi ha portato al convincimento che – a parte i rilievi che facevo allora sul modo di intendere il *coordinamento*, rilievi che qui non entrano in questione – nessuna delle deduzioni che alcuni astronomi hanno creduto di poter trarre riguardo alla distribuzione vettoriale di quelle velocità possa esser considerata conclusiva o essere esaminata finché rimangano imprecisati i limiti entro i quali possono esser compresi gli errori dei dati – i cosiddetti moti propri – in quanto che sono attualmente da ritenersi confusi coi comuni errori «accidentali» di osservazione quelli che si sono introdotti nel corso dei calcoli di riduzione delle posizioni stellari ad una epoca unica e che sono originati dai tentativi per rimediare alla insufficiente definizione del riferimento. L'esistenza di tali errori è ancora, come innanzi si è accennato, *insospettata* dagli astronomi.

Passerò ad indicare in una successiva Nota i procedimenti di calcolo i quali portano a collegare le componenti della rotazione del triedro mobile T_i con gli elementi cinematici che definiscono, oltre alle direzioni, le velocità e le accelerazioni angolari delle stelle relative al triedro medesimo.

(2) *Postulati fondamentali e sistemi di riferimento per la dinamica dell'ammasso galattico*, «Memorie della Soc. Astron. Italiana», Nuova Serie, vol. IV, Roma 1928.

(3) *Sulla opportunità di direttive generali nella ricerca di leggi di coordinamento fra i moti stellari*, «Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti della Classe di Sc. fis. mat. e naturali», vol. XIII, fasc. luglio-agosto 1952.

Astronomia geodetica. — *Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali.* — I. *Impostazione del problema.* Nota (*) del Socio GIOVANNI SILVA.

1. Nel 1915 ho pubblicato una Nota *Sulla determinazione delle irregolarità dei perni di un cerchio meridiano* (1), nella quale studiavo l'influenza che possono avere, sui risultati delle osservazioni astronomiche fatte con un cerchio meridiano, le possibili piccolissime deviazioni dei perni del suo asse di rotazione da una rigorosa forma cilindrica circolare e indicavo un procedimento per la determinazione di tali deviazioni.

Il problema ritorna ad essere di attualità, in quanto, durante le osservazioni del prossimo « anno geofisico internazionale », che si svolgeranno nella seconda metà del 1957 e durante tutto il 1958, saranno pure in programma osservazioni mondiali di longitudine e quindi di determinazione di tempo, con lo scopo di porre in evidenza le irregolarità nel moto di rotazione della Terra, gli errori sistematici dei cataloghi stellari, le velocità di trasmissione dei segnali radio, ecc. Questi scopi richiedono la maggior possibile esattezza nelle osservazioni e l'assoluta eliminazione di ogni causa sistematica di errore, o, quanto meno, l'eliminazione degli errori di tal genere mediante il loro calcolo.

Fra queste cause di errore sono appunto da annoverare le piccolissime irregolarità dei perni degli strumenti astronomici con cui si determina il tempo ricorrendo a passaggi stellari attraverso piani verticali e in particolare attraverso il meridiano.

Mezzi elettronici moderni, non soltanto possono mettere in evidenza, con maggior sicurezza del passato, queste irregolarità, ma possono altresì misurarle con grande accuratezza. Di questo compito mi propongo di parlare nella parte III di questa Nota. Nella parte II mi limito a ricordare e a definire con maggiore accuratezza le relazioni, già indicate nella mia vecchia Nota, fra i dati che precisano le irregolarità dei perni e i risultati delle osservazioni astronomiche. Queste relazioni permettono o di assicurare che le irregolarità dei perni sono sufficientemente piccole da poterne trascurare l'effetto, oppure di calcolare questo effetto, qualora non sia possibile far rilavorare i perni per renderne trascurabili le irregolarità, in quanto anche questo problema tecnico non è di facile e sicura soluzione.

Non sorprenda la ripetizione di una ricerca già compiuta tanto tempo fa. Nei quarant'anni trascorsi da allora mi sono sempre più persuaso che

(*) Presentata nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) « Atti dell'Istituto Veneto di S.L.A. », tomo LXXIV, parte II, p. 1659, Anno acc. 1914-15.

nelle applicazioni della matematica alle scienze sperimentali, troppo poco ci si preoccupa, talvolta, della misura in cui la schematizzazione matematica dei problemi che si presentano nella ricerca scientifica si adegua alla realtà fisica; avviene anzi di frequente che tale schematizzazione rimane sottintesa fin da principio, senza discussione alcuna, oppure avviene che essa sia poi facilmente dimenticata.

Ne conseguono talvolta risultati che, pure essendo validi per il problema matematico che si è discusso e risolto, non lo sono per il problema sperimentale di partenza.

Anche nell'insegnamento universitario questa necessità di esaminare e discutere la differenza fra i problemi pratici e quelli matematici che ad essi si sostituiscono per risolverli teoricamente, è completamente trascurata con danno non lieve per la formazione dei futuri ricercatori.

Il problema qui trattato si presta in modo particolare ad una discussione del genere, che anch'io ho in gran parte omissa, quando ne diedi la vecchia soluzione; per questo ho voluto riprenderlo con uno svolgimento che chiarisca con un esempio, particolarmente nella parte I di questa Nota, le idee qui sopra espresse.

2. Per schematizzare matematicamente il problema in questione, supponiamo che la superficie di un perno sia rigorosamente cilindrica, e, con grande approssimazione, circolare; che le faccie a ∇ (ganasce o guance) del sostegno del perno (cuscinetto) siano pur esse rigorosamente cilindriche, convesse verso il perno e perfettamente simmetriche rispetto al piano mediano della piastra dalla quale il cuscinetto è stato ricavato; che le generatrici delle dette ganasce e questo piano siano normali alle generatrici della superficie del perno. In queste condizioni ideali il perno e le ganasce si toccano nei due punti di appoggio P_1, P_2 , che sono pure i punti di contatto fra le due generatrici AP_1, AP_2 delle due ganasce che giacciono in quel piano mediano e la sezione Ω della superficie cilindrica del perno tagliata dal piano stesso.

Se in particolare le ganasce fossero piane, esse dovranno suporsi parallele alle generatrici della superficie del perno; il contatto fra ognuna di esse e questa superficie avverrà allora lungo una di tali generatrici per tutto lo spessore del cuscinetto, ma il piano mediano di questo, come precedentemente la sezione Ω del perno, determinerà le due rette AP_1, AP_2 , sezioni delle ganasce, e i punti di contatto P_1, P_2 .

Se poi le ganasce (o meglio in tal caso le guance) fossero convesse verso il perno anche nel loro senso longitudinale, così da essere tagliate dal suddetto piano mediano lungo due curve $c_1 c_1, c_2 c_2$, l'ipotesi della simmetria di queste guance rispetto allo stesso piano mediano, ha per conseguenza che i punti di contatto P_1, P_2 tra guance e perno appartengono anche in questo caso a quel piano e quindi alle due curve $c_1 c_1, c_2 c_2$. Le tangenti in P_1 e P_2 all'una e all'altra curva sono in tal caso variabili con i due punti di contatto. Ma la tenue curvatura delle guance nel senso delle due curve suddette e la tenue diversità della sezione Ω da un cerchio rendono ben limitate queste

variazioni. Sarà lecito in tal caso fissare una posizione media di queste tangenti e del loro punto d'intersezione A e ritenere confuse con esse le due curve c_1, c_1, c_2, c_2 nei due brevi tratti lungo i quali possono scorrere i punti di contatto P_1, P_2 . Su queste circostanze torneremo al n. 7.

3. Siano ora: O il centro di gravità della sezione Ω del perno, supposta uniforme la densità lineare di essa;

Q_1 e Q_2 i piedi delle normali condotte da O alle rette AP_1, AP_2 ;

N_1, N_2 i punti in cui le normali OQ_1, OQ_2 incontrano la sezione Ω ;

AL la bisettrice dell'angolo P_1AP_2 , che riterremo verticale o molto prossima alla verticale;

OM la semiretta parallela ad AL ed orientata, come questa, verso l'alto;

OS l'intersezione del piano della sezione Ω con il semipiano limitato dall'asse orizzontale dello strumento (cioè dalla retta che congiunge i due punti O relativi ai due perni) e che contiene od è parallelo alla linea di collimazione dello strumento stesso;

z la « distanza zenitale » del cannocchiale, cioè quella della retta OS; tale distanza zenitale si intenda però contata nel senso orario da 0° a 360° per un osservatore che guardi la sezione Ω nella direzione dell'asse orizzontale e in un determinato verso, ad esempio restando all'estremità dell'asse più vicina al cerchio verticale dello strumento;

θ l'anomalia di un raggio generico OP uscente da O, contata da OS nel senso antiorario per l'osservatore predetto;

θ_1, θ_2 le anomalie dei raggi OP_1, OP_2 , dei quali, rispetto all'osservatore stesso, riterremo il primo a sinistra e il secondo a destra di AL;

$\theta_1 + \varepsilon_1, \theta_2 + \varepsilon_2$ quelle dei raggi ON_1, ON_2 ;

ρ, ρ_1, ρ_2 le lunghezze dei raggi OP, OP_1, OP_2 ;

J il piede della perpendicolare condotta da O sulla retta AL;

H_1, H_2, K_1, K_2 i piedi delle perpendicolari condotte da J su AP_1, AP_2, OQ_1, OQ_2 ;

$h_z = AJ, d_z = JO$ le coordinate del punto O rispetto ad un sistema di assi cartesiani con l'origine in A ed orientati positivamente verso l'alto secondo AL, e verso destra dell'osservatore suddetto, secondo AD.

Supponiamo che, come di consueto, il cerchio verticale si legga dall'estremità dell'asse che gli è più vicina e che la sua graduazione cresca in senso antiorario. Se l_0 è la lettura che si fa quando il cannocchiale è rivolto allo zenit, ed l è la lettura corrispondente alla direzione generica OS, risulta $z = l - l_0$. Ed è $\theta = z$ l'anomalia del raggio della sezione Ω uscente da O nella direzione e nel verso di OM.

4. Se il perno è matematicamente perfetto, ρ è una costante; nei casi pratici $\rho(\theta)$ deve quindi considerarsi come una funzione molto lievemente e molto regolarmente variabile con θ e quindi tale da poter applicare ad essa lo sviluppo del Taylor in un intorno sufficientemente piccolo di un qualsiasi

punto P della sezione Ω . Riferendoci in particolare ai punti P_1 e P_2 e sottintendendo per un momento i due indici, osserviamo che l'incremento ε che si deve dare al valore θ dell'anomalia per passare dal punto P al punto N è

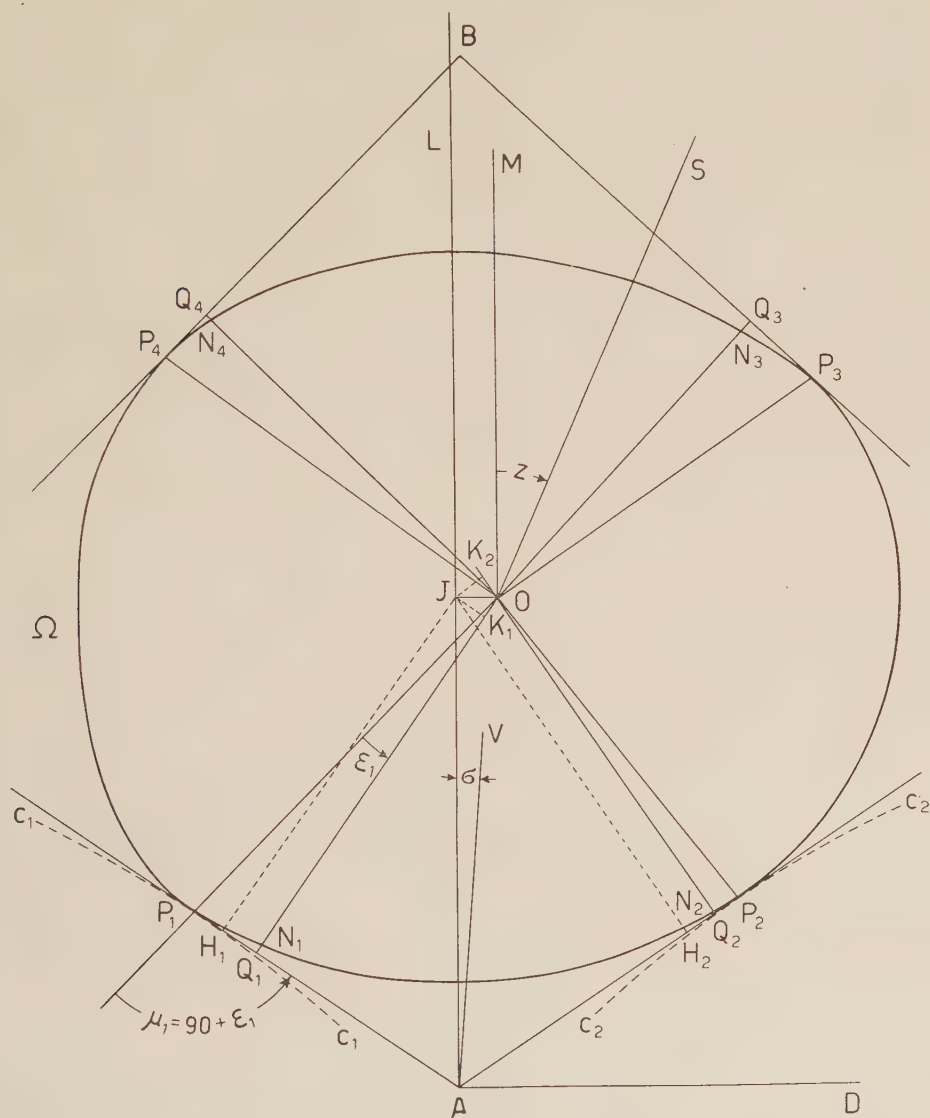


Fig. 1.

certamente molto piccolo in valore assoluto, dato che per un perno perfetto esso è nullo. Similmente deve considerarsi assai piccola in valore assoluto la derivata di ρ rispetto all'anomalia θ , che è pressoché proporzionale alla cotangente dell'angolo fra il raggio vettore OP e la tangente PA alla sezione Ω in P , come subito ricorderemo. Ritenendo lo sviluppo del Taylor

rapidamente convergente limitiamoci a considerarne i primi termini. Scriviamo cioè

$$\begin{aligned} ON &= \rho(\theta + \varepsilon) = \rho(\theta) + \varepsilon \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)_P + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right)_P + \dots = \\ &= OP \left\{ 1 + \varepsilon \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} \right)_P + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \right)_P + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Il coefficiente di ε entro le $\{ \}$ è la cotangente dell'angolo μ che il prolungamento del raggio vettore OP fa con la tangente in P , orientata nel senso delle θ crescenti, quando tale angolo sia contato positivamente da quel prolungamento alla tangente nel senso in cui crescono le θ ; quest'angolo è $90^\circ + \varepsilon$; quel coefficiente vale dunque $-\tan \varepsilon$ e può essere sostituito con $-\varepsilon$ per quanto sopra si è detto.

Il coefficiente di ε^2 , entro le $\{ \}$, contiene a fattore la derivata seconda di ρ rispetto a θ , che potremo pure ritenere abbastanza piccola. Potremo così concludere che nei casi pratici ordinari è lecito scrivere, a meno di termini di ordine superiore al secondo,

$$ON = OP (1 - \varepsilon^2).$$

D'altra parte è

$$OQ = OP \cos \varepsilon = OP \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right)$$

e quindi, nello stesso ordine di approssimazione,

$$ON = OQ \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right).$$

Per la piccolezza, in valore assoluto, dell'angolo ε , la cui entità riflette soltanto le imperfezioni del perno, il quadrato di ε potrà trascurarsi di fronte all'unità, e le tre lunghezze OP , OQ , ON , le cui differenze relative sono dell'ordine di ε^2 , potranno sostituirsi, senza tema di errori sensibili, l'una all'altra.

5. Per chiarire con un esempio tale affermazione si consideri una sezione Ω di equazione

$$(1) \quad \rho = R (1 + s \cos 2\theta)$$

con s molto piccolo di fronte all'unità. R è il valore medio di ρ quando θ varia da 0° a 360° , o anche soltanto da 0° a 90° ; R è pure il valore di ρ per i valori 45° , 135° , 225° , 315° di θ . Per $\theta = 0^\circ$, $\theta = 180^\circ$, ρ ha il valore massimo $a = R(1 + s)$; per $\theta = 90^\circ$, $\theta = 270^\circ$, ρ ha il valore minimo $b = R(1 - s)$ e l'equazione (1) differisce da quella dell'ellisse di semiassi a e b e di « semischacciamento »

$$s = \frac{a-b}{2R}$$

per termini dell'ordine di s^2 .

La (1) dà

$$\operatorname{tang} \varepsilon = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2Rs \operatorname{sen} 2\theta}{\rho}.$$

Per $\theta = 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$, $\operatorname{tang} \varepsilon$ ed ε raggiungono i valori estremi $\pm 2s$. Supposto $R = \text{mm. } 20$ ed $a - R = R - b = 10$ micron, s risulta uguale a $1/2000$ ed ε può raggiungere in valore assoluto, ma non può superare, un millesimo di radiante, cioè $206'' = 3',4$. Per i valori anzidetti di θ , la $d^2\rho/d\theta^2$ è nulla e la differenza fra OQ ed ON raggiunge il suo massimo valore, che è di $1/2000000$ di R , cioè un centesimo di micron.

Una tale differenza è certamente trascurabile di fronte a variazioni di ρ mille volte superiori.

6. Indichiamo con α la semiapertura $P_1AL = P_2AL$ dei cuscinetti. La figura mostra che $K_1O = K_2O = JO \cos \alpha$, $H_1J = H_2J = AJ \operatorname{sen} \alpha$; inoltre la convenzione circa il segno della coordinata $JO = d_z$, ci dice che K_1O , K_2O , come JO , vanno considerati positivi se, per l'osservatore di cui al n. 3, O è alla destra di AL ; negativi in caso contrario. Sussistono quindi in entrambi i casi le seguenti eguaglianze

$$H_1J + K_1O = Q_1O, \quad H_2J - K_2O = Q_2O,$$

cioè

$$h_z \operatorname{sen} \alpha + d_z \cos \alpha = \rho_1, \quad h_z \operatorname{sen} \alpha - d_z \cos \alpha = \rho_2,$$

dalle quali si ottiene

$$(2) \quad h_z = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2 \operatorname{sen} \alpha}, \quad d_z = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2 \cos \alpha}.$$

Se la direzione AL della bisettrice delle facce dei cuscinetti devia dalla verticale AV per un piccolo angolo σ che conteremo positivamente se AL è alla sinistra di AV , la proiezione di AO sulla verticale, cioè la effettiva altezza h'_z dal punto mobile O sul punto fisso A , è

$$h'_z = h_z \cos \sigma + d_z \operatorname{sen} \sigma.$$

Ma per la piccolezza di σ e di d_z , i termini di 2° ordine $h_z \sigma^2$ e $d_z \sigma$, che compariscono quando per $\cos \sigma$ e $\operatorname{sen} \sigma$ si scrivono i primi termini dei loro sviluppi, possono ritenersi del tutto trascurabili e l'espressione (2) di h_z può ritenersi valida anche per l'effettiva altezza h'_z del punto mobile O sul piano orizzontale passante per il punto fisso A .

Similmente, detti $P_3, P_4, Q_3, Q_4, N_3, N_4$, i punti analoghi a $P_1, P_2, Q_1, Q_2, N_1, N_2$, quando, in luogo delle sezioni AP_1, AP_2 , dei cuscinetti sui quali il perno appoggia, si considerano le sezioni BP_3, BP_4 delle gambe (o delle braccia) con le quali la livella si appoggia sull'asse (o vi si sospende), dette ρ_3, ρ_4 le distanze OQ_3, OQ_4 che si confondono rispettivamente con i raggi OP_3, ON_3 e OP_4, ON_4 ; indicato infine con 2β l'angolo P_3BP_4 si

ricosce che l'altezza k_z del punto B sul centro O ha un'espressione analoga alla prima delle (2) e cioè

$$(3) \quad k_z = \frac{\rho_3 + \rho_4}{2 \sin \beta}.$$

Si indichi con R il valor medio di $\rho(\theta)$ quando θ varia da 0° a 360° e con $\Delta(\theta)$ la *irregolarità* di $\rho(\theta)$, e cioè si ponga

$$(4) \quad \rho(\theta) = R + \Delta(\theta).$$

Quando la sezione Ω del perno fosse perfettamente circolare e di raggio R, il centro O della detta sezione occuperebbe una posizione fissa C sulla bisettrice dell'angolo P_1AP_2 , quindi d_z sarebbe nullo ed h_z, k_z avrebbero i valori costanti

$$(5) \quad h = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad k = \frac{R}{\sin \beta}.$$

Quando la distanza zenitale del cannocchiale, come è stata definita al n. 3, è uguale a z , risulta

$$(6) \quad \begin{cases} \theta_1 = z + 90^\circ + \alpha & \theta_2 = z - 90^\circ - \alpha \\ \theta_3 = z - 90^\circ + \beta & \theta_4 = z + 90^\circ - \beta. \end{cases}$$

Le (2) e la (3), tenuto conto delle (4) e (5), possono quindi scriversi:

$$(7) \quad h_z = h + \frac{\Delta(\theta_1) + \Delta(\theta_2)}{2 \sin \alpha}$$

$$(8) \quad d_z = \frac{\Delta(\theta_1) - \Delta(\theta_2)}{2 \cos \alpha}$$

$$(9) \quad k_z = k + \frac{\Delta(\theta_3) + \Delta(\theta_4)}{2 \sin \beta}.$$

Poniamo infine

$$H_z = h_z + k_z \quad \quad H = h + k$$

e cioè indichiamo con H_z la differenza di altezza tra il punto B della livella e il punto A del cuscinetto, nel caso in cui essa è variabile con z in causa delle irregolarità del perno, e con H la stessa differenza nel caso in cui la sezione Ω del perno è esattamente circolare di raggio R. Le (7) e (9) danno immediatamente la relazione tra H_z e H :

$$(10) \quad H_z = H + \frac{\Delta(\theta_1) + \Delta(\theta_2)}{2 \sin \alpha} + \frac{\Delta(\theta_3) + \Delta(\theta_4)}{2 \sin \beta}.$$

7. Chiamiamo I° il perno che sta all'estremità dell'asse ove abbiamo supposto collocato l'osservatore di cui si è parlato al n. 3, quella cioè più vicina al cerchio verticale congiunto all'asse; chiamiamo II° l'altro perno.

Usiamo le stesse lettere per indicare gli elementi di entrambi i perni, ma apponiamo ad esse uno o due apici a seconda che si riferiscono al perno I° o al perno II°.

Distinguiamo similmente con gli indici e, w , le lettere che si riferiscono ad elementi dell'uno o dell'altro dei cuscinetti di appoggio dell'asse, che, per fissare le idee, supporremo collocati l'uno dalla parte del punto cardinale E, e l'altro dalla parte del punto cardinale W.

Le semiaperture α_e, α_w dei due cuscinetti sono *praticamente* eguali; è però facile darsi ragione che possiamo considerare queste aperture *esattamente* eguali anche nella schematizzazione matematica del problema. Supposto infatti il perno I° ad E ed il II° a W, le sezioni effettive delle facce dei cuscinetti su cui appoggiano i perni, determinate dai piani mediani dei due cuscinetti, o meglio le tangenti alle sezioni Ω', Ω'' dei due perni nei loro punti P di effettivo contatto con le dette facce di appoggio, saranno da indicare con $A_e P'_1, A_e P'_2, A_w P''_1, A_w P''_2$. Sostituiamo a queste posizioni effettive delle tangenti, altre posizioni ipotetiche $\bar{A}_e \bar{P}'_1, \bar{A}_e \bar{P}'_2, \bar{A}_w \bar{P}''_1, \bar{A}_w \bar{P}''_2$, per le quali la semiapertura di entrambi i cuscinetti abbia lo stesso valore $\alpha = (\alpha_e + \alpha_w)/2$, molto vicino ai due valori effettivi α_e, α_w . Gli spostamenti $P'_1 \bar{P}'_1, P'_2 \bar{P}'_2, P''_1 \bar{P}''_1, P''_2 \bar{P}''_2$ che subiscono i punti di contatto sulle sezioni Ω' ed Ω'' dei perni per tale sostituzione sono evidentemente piccolissimi rispetto ai raggi medi R', R'' dei due perni e i corrispondenti valori delle irregolarità $\Delta'(\theta_1), \Delta'(\theta_2), \Delta''(\theta_1), \Delta''(\theta_2)$, che sono quantità piccole di 1° ordine rispetto ai raggi medi R', R'' , subiranno delle variazioni piccole di 2° ordine, che saranno certamente trascurabili. Unico effetto apprezzabile della sostituzione sarà dunque la variazione piccolissima delle posizioni effettive dei punti A_e, A_w , che vengono ad assumere le posizioni ipotetiche \bar{A}_e, \bar{A}_w , e della conseguente variazione di posizione della retta che congiunge i due punti. D'altra parte la posizione di tale retta non ha importanza nella riduzione delle osservazioni astronomiche; è soltanto necessario che detta posizione non cambi quando, invertendo la posizione dell'asse, il perno I° passa a W e il perno II° passa ad E, il che avviene tanto per la $A_e A_w$, quanto per la $\bar{A}_e \bar{A}_w$. È tuttavia opportuno potere usare nelle (7), (8), (9), (10) un unico valore α della semiapertura e quindi supporremo di riferirci sempre alla retta ipotetica $\bar{A}_e \bar{A}_w$.

Il ragionamento qui fatto è pressoché lo stesso di quello accennato, ma allora omissis, alla fine del n. 2, quando abbiamo considerato le guance su cui si appoggiano i perni quali superficie convesse verso i perni in qualsiasi loro punto e per qualsiasi loro sezione normale. Anche in questo caso, variando con la distanza zenitale z le tangenti AP_1, AP_2 , e l'angolo 2α da esse formato, abbiamo immaginato di sostituire ad ogni coppia effettiva di tali tangenti mobili un'unica coppia ipotetica di tangenti alle sezioni $c_1 c_1, c_2 c_2$ delle guance, fissando il punto \bar{A} da cui le due tangenti dovevano uscire e quindi anche l'angolo $2\bar{\alpha}$ che esse dovevano formare. Gli scorrimenti dei punti di contatto sulle due curve $c_1 c_1, c_2 c_2$ per passare dalle loro posizioni P_1, P_2 sulle tangenti effettive a quelle ipotetiche \bar{P}_1, \bar{P}_2 sulla coppia di tan-

genti fissata sono quantità estremamente piccole rispetto alle dimensioni della sezione Ω del perno e le conseguenti variazioni delle irregolarità $\Delta(\theta_1)$, $\Delta(\theta_2)$ del perno non possono riuscire apprezzabili.

Ragionamento analogo a quello fatto per i cuscinetti vale per le gambe (o le braccia) della livella. Indichiamo con B_1 il vertice B relativo a quella gamba (o braccio) della livella che sta dalla parte dello zero della graduazione di questa. (Se lo zero fosse al centro della canna, il senso in cui cresce la graduazione verrà stabilito per convenzione, ad esempio ponendone l'inizio, e quindi anche il vertice B_1 dalla parte dove si trovano le viti di rettificazione della livella). Indichiamo similmente con B_2 il vertice B relativo all'altra gamba (o braccio) della livella e chiamiamo β_1 , β_2 le semiaperture dei due angoli di vertice B_1 , B_2 . Queste semiaperture saranno *praticamente* uguali, ma nella schematizzazione matematica saranno da considerare uguali *rigorosamente* e converrà assegnare ad esse il valore $\beta = (\beta_1 + \beta_2)/2$. Come nel caso precedente, ciò non può produrre variazioni apprezzabili nel valore delle irregolarità dei perni relative ai punti di contatto. Può riuscire apprezzabile soltanto la sostituzione dei due punti ipotetici \bar{B}_1 , \bar{B}_2 , vertici di angoli di valore identico, ai due punti effettivi B_1 , B_2 . Ma, come nel caso dei cuscinetti, al fine di poter usare un unico valore β nelle (9) e (10), conviene sempre riferirsi ai detti punti ipotetici e alla retta $\bar{B}_1\bar{B}_2$ che li congiunge.

Chimica. — *Sulla struttura di nuovi polimeri a concatenamento 1-4 trans di diolefine coniugate* (*). Nota di GIULIO NATTA, PAOLO CORRADINI e LIDO PORRI, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

Nell'ambito delle ricerche svolte nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano sulla polimerizzazione delle diolefine coniugate siamo riusciti a preparare e ad isolare diversi polimeri cristallini stereoisomeri.

In precedenti comunicazioni è stata descritta la struttura dei polibutadieni a concatenamento 1-2, quello sindiotattico ⁽¹⁾ e quello isotattico ⁽²⁾, e si è accennato alla preparazione del polibutadiene a concatenamento 1-4 trans. È risultato inoltre possibile preparare con processi di polimerizzazione stereoselettivi a cui noi attribuiamo un meccanismo anionico e con catalizzatori eterogenei polimeri completamente 1-4 trans ⁽³⁾ di altre diolefine

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Società Montecatini.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) G. NATTA e P. CORRADINI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, Vol. XIX, fasc. 5, p. 229.

(2) G. NATTA, L. PORRI, P. CORRADINI e D. MORERO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », nota presentata nella seduta del 14 aprile 1956.

(3) G. NATTA, L. PORRI e G. MAZZANTI, Brev. It. n. 536631 (12-3-55).

coniugate quali l'isoprene ed il pentadiene 1-3 e con altri catalizzatori i corrispondenti polimeri 1-4 cis.

Riferiremo brevemente in questa Nota preliminare sui principali risultati strutturalistici da noi ottenuti in questo campo sui polimeri cristallini. I metodi di preparazione ed i risultati dell'esame dei prodotti con la spettrografia nell'infrarosso verranno dettagliatamente descritti in comunicazioni separate.

Polibutadiene 1-4 trans. — Il polibutadiene a concatenamento 1-4 trans da noi esaminato ha peso molecolare compreso tra qualche decina di migliaia e un milione circa, e si presenta come una polvere bianca. Esso può essere impiegato come materia plastica, stampato od iniettato a temperatura superiore a quella di fusione (135°), e può inoltre essere estruso in fibre di aspetto simile a quelle dei politeni altamente cristallini.

I filamenti stirati a freddo forniscono ai raggi X spettri di fibra dai quali si calcola una periodicità c lungo l'asse della catena di $4,9 \text{ \AA}$. I riflessi equatoriali possono essere interpretati sulla base di una sottocella esagonale con $a = 4,54 \text{ \AA}$ (vedi tabella I). La densità röntgenografica del prodotto risulta 1,02, in buon accordo col valore sperimentale (0,98) qualora si ammetta, com'è logico, che lungo c si ripeta per l'identità una sola unità monomerica.

Tale periodo risulta più corto di quello che si calcolerebbe per una catena completamente planare, assumendo gli angoli e le distanze di legame di solito accettati. L'ipotesi di una catena planare sarebbe inoltre difficilmente compatibile con la simmetria pseudo esagonale (particolarmente evidente su alcuni spettri eseguiti col diffrattore di elettroni) del reticolo reciproco sul piano equatoriale, e con i valori sperimentali abbastanza elevati della intensità dei riflessi del 1° strato.

TABELLA I.

Riflessi equatoriali del polibutadiene 1-4 trans.

2θ	Intensità	d	Indici pseudoesagonali	Costante a corrispondente
22,50	<i>ff</i>	3,95	100	4,56
39,35	<i>f</i>	2,29	110	4,58
46,30	<i>mf</i>	1,96	200	4,53
62,40	<i>d</i>	1,49	210	4,54

Un accorciamento della catena dalla posizione estesa planare (fig. 1), compatibile col valore trovato per il periodo di identità, può verificarsi solo attraverso rotazioni eguali ed in senso opposto dei gruppi metilenici adiacenti

rispettivamente ai legami 1-2 e 3-4; solo in questo modo infatti, in accordo con le leggi della stereochimica, gli atomi 1, 2, 3, 4 risultano ancora coplanari tra loro, il legame 1-4 rimane nella posizione prevista dal principio del massimo allontanamento dei legami ed il periodo di identità corrisponde ad una sola unità monomerica.

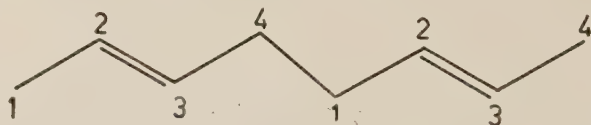
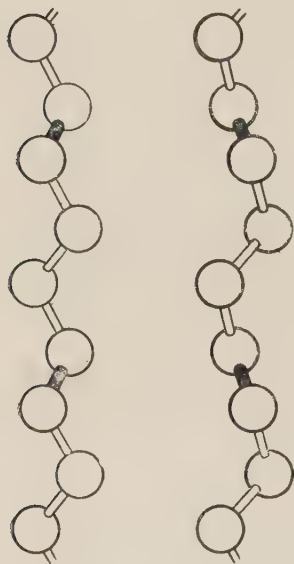


Fig. 1. - Modello planare della catena del polibutadiene 1-4 trans.

L'entità della rotazione del piano 1-4-3 rispetto al piano 2-3-4 può essere ricavata ammettendo valida l'estensione, già prevista da Bunn, alle catene contenenti doppi legami, del principio del massimo allontanamento dei legami. Poiché la barriera di potenziale che vincola la rotazione di un metile nella molecola del propano è di circa 3.000 cal., mentre tale barriera si riduce, nel caso del propilene, a sole 1.000 cal., si può indurre che l'orientamento nello spazio di una serie di legami semplici o doppi dipende prevalentemente dai legami semplici adiacenti a ciascun legame.



POLIBUTADIENE 1-4 TRANS

Fig. 2. - Modello spaziale della catena del polibutadiene 1-4 trans allo stato cristallino.

Pertanto il principio del massimo allontanamento dei legami può essere generalizzato nel principio, che governa la formazione di una qualsiasi catena polidrocarburica, del massimo allontanamento dei legami semplici (4). L'angolo tra il piano 1-4-3 ed il piano 2-3-4 risulterebbe quindi di 60°. Assumendo valori normali dell'angolo $C-C=C$ (122°) e $C-C-C$ (112°) si calcola, con tale rotazione, appunto un periodo di 4,9 Å. Nella fig. 2 è mostrato un modello della catena risultante del polibutadiene 1-4 trans.

Lo stesso principio del massimo allontanamento dei legami risulta rispettato anche se si ammette che la rotazione attorno al legame 1-2 avvenga nello stesso senso invece che in senso opposto a quella attorno al legame 3-4. Tale ipotesi fa prevedere la possibilità di esistenza di strutture diverse da quella precedentemente considerata.

(4) C. W. BUNN, « Proc. Roy. Soc. London », 180, 67 (1942).

In effetti il polibutadiene 1-4 trans si trasforma, per riscaldamento al di sopra di 60°C , in un'altra forma cristallina, che occupa una sezione normale all'asse c di $21,3 \text{ \AA}^2$ invece dei $18,4 \text{ \AA}^2$ della forma stabile a bassa temperatura. Ammettendo che la densità delle due modificazioni rimanga praticamente la stessa, a tale aumento di sezione deve corrispondere una diminuzione della lunghezza della proiezione di una unità monomerica sull'asse della catena; ciò può essere provocato, per esempio, da una spiralizzazione della catena stessa.

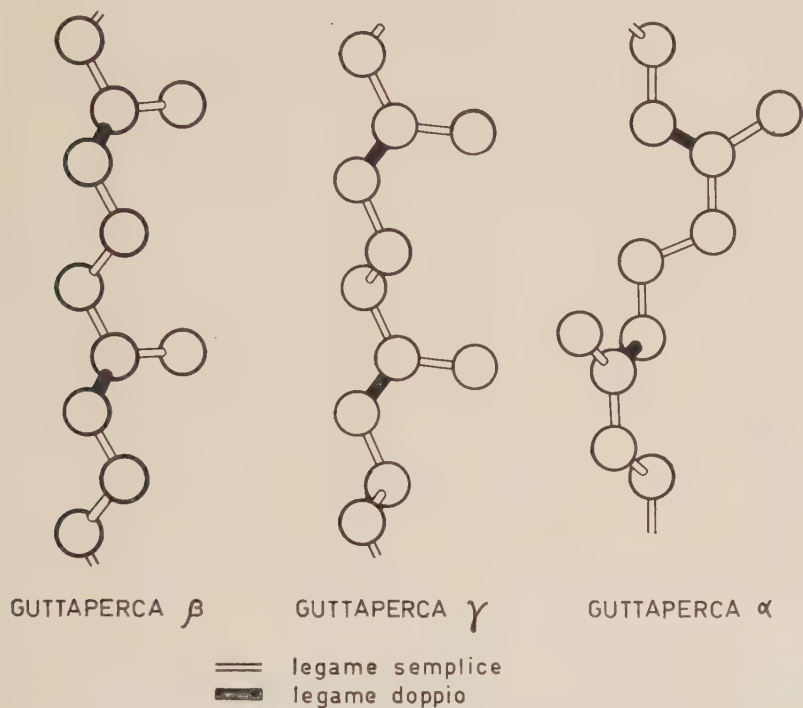


Fig. 3. — Modello spaziale delle catene della alfa, beta e gamma guttaperca.

Guttaperca sintetica. — Con metodi analoghi a quelli da noi usati per preparare il polibutadiene 1-4 trans, ci è risultato possibile preparare dall'isoprene un polimero che dall'esame degli spettri nell'infrarosso risulta praticamente costituito solo da unità monomeriche aventi concatenamento 1-4 trans. Il suo peso molecolare risulta dell'ordine di grandezza di alcune centinaia di migliaia. All'esame con i raggi X risulta cristallino e presenta gli spettri caratteristici delle forme γ e β della guttaperca naturale.

La struttura della β -guttaperca era stata studiata già nel 1935 da uno di noi; fu poi dettagliatamente risolta attraverso il lavoro di Bunn e altri ⁽⁵⁾.

La struttura della catena è molto simile a quella da noi proposta per il polibutadiene 1-4 trans (fig. 3); solo il periodo di identità lungo l'asse della

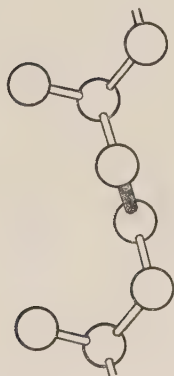
(5) C. W. BUNN, « Proc. Roy. Soc. London », 180, 40 (1947).

catena è più corto ($4,77 \text{ \AA}$) e questo per il fatto che la presenza del metile non consente più un angolo di valenza $C \begin{smallmatrix} \diagup \\ \diagdown \end{smallmatrix} C=C$ di 122° .

La α -guttaperca, che possiede ancora una catena poliisoprenica a configurazione 1-4 trans, presenta invece un periodo di identità lungo l'asse della catena di $8,75 \text{ \AA}$, corrispondente a due unità monomeriche.

La forma della catena è stata discussa da Bunn, nel senso che due sarebbero i possibili tipi di catena soddisfacenti al principio del massimo allontanamento dei legami singoli ed all'esigenza di un periodo di identità contenente due sole unità monomeriche. Un terzo tipo ⁽⁶⁾ è stato proposto successivamente da Meyer. Noi proponiamo un modello simile a quest'ultimo, ma soddisfacente al principio del massimo allontanamento dei legami (fig. 3) che si accorda bene col periodo di identità sperimentale, mentre riteniamo che il modello preferito da Bunn e corrispondente ad uno dei due tipi da lui proposti debba essere scartato per la α -guttaperca, e possa essere accettato per la γ guttaperca che ha un periodo di $9,2 \text{ \AA}$ ⁽⁷⁾.

Polipentadiene. - Il 1-4 trans polipentadiene 1,3 differisce dai polimeri 1-4 trans di diolefine precedentemente descritti perché contiene un atomo di carbonio asimmetrico per ogni unità monomerica. Si possono perciò prevedere, analogamente a quanto è stato da noi osservato per le poli-alfa-olefine, diversi stereoisomeri del polipentadiene a concatenamento 1-4 trans, a seconda della configurazione sterica presentata dagli atomi di carbonio asimmetrici, e precisamente due stereoisomeri cristallini a struttura regolare, uno isotattico ed uno sindiotattico, oltre a degli stereoisomeri atattici non cristallini.



POLIPENTADIENE

Fig. 4. - Modello spaziale della catena del polipentadiene.

Il polipentadiene da noi studiato presenta un periodo di identità di $4,82 \text{ \AA}$, intermedio tra quello del polibutadiene e della β -guttaperca, e per esso si può assumere una simile forma della catena. I due riflessi equatoriali corrispondono a piani con distanze reticolari in rapporto $1 : \sqrt{3}$; se la proiezione della cella sul piano equatoriale è pseudoesagonale con $a = 5,25 \text{ \AA}$, la densità risulterebbe $0,98$, in accordo con quella sperimentale. Sul 1° e sul 2° strato non si hanno nette riflessioni ma solo intensità diffusa.

Poiché si può escludere, pel fatto che lungo c si ripete un solo monomero, che successivi atomi di carbonio terziario abbiano configurazioni alterne e che la polimerizzazione possa essere avvenuta testa-testa, si può prevedere una sola struttura regolare in cui gli atomi di carbonio terziario abbiano

(6) C. W. BUNN, in «Advances in Colloid Science», Vol. II, p. 95.

(7) D. FISCHER, «Proc. Phys. Soc.», B, p. 7 (1952).

tutti la medesima configurazione sterica (fig. 4). Altrimenti si dovrebbe pensare ad un disordine completo nella successione delle configurazioni steriche degli atomi di carbonio asimmetrico. Quest'ultima ipotesi appare meno probabile, perché sembra difficilmente compatibile con la regolarità del periodo.

La prima ipotesi, che noi pertanto preferiamo, non è necessariamente contrastante con la diffusione osservata dello spettro sugli strati superiori e con la contemporanea nitidezza dei riflessi equatoriali, in quanto ciò può essere ad esempio giustificato con certi tipi di disordine reticolare nella sistemazione delle catene, compatibile con il mantenimento di una posizione fissa degli assi delle catene stesse.

Temperature di fusione. — È noto che la temperatura di fusione da un punto di vista termodinamico è data dal rapporto tra l'entalpia e l'entropia di fusione. Da un punto di vista strutturale i fattori che influenzano il punto di fusione nel caso di poliidrocarburi, ossia di sostanze in cui operino solo forze di Van der Waals, sarebbero l'efficienza dell'impacchettamento e la flessibilità delle catene. In lavori precedenti su polidiolefine questo ultimo fattore è stato spesso sopravvalutato.

La temperatura di fusione dell'1-4 trans polibutadiene da noi osservato (135°) è praticamente la stessa di quella (138°) del polietilene. Poiché l'impacchettamento delle molecole è da ritenersi egualmente buono per entrambi i polimeri, si deve ritenere che la flessibilità delle catene (che è certamente maggiore nel caso del polibutadiene) eserciti una minore influenza sulla temperatura di fusione.

I più bassi punti di fusione della guttaperca e della gomma naturale, verrebbero spiegati pertanto con una bassa efficienza dell'impacchettamento, che non è da misurare solo in termini di densità, ma anche di distribuzione nel cristallo di vuoti e di pieni: l'energia occorrente per separare due atomi di carbonio di molecole adiacenti, partendo da una distanza normale di Van der Waals ($4,2 \text{ \AA}$), è maggiore di quella occorrente per separare due atomi più vicini o più lontani tra loro di questo valore. L'effetto della presenza di un irregolare accostamento tra atomi di molecole adiacenti è sempre quello di abbassare il ΔH e quindi la temperatura di fusione.

Nel caso infatti della gomma e della guttaperca si hanno allo stato cristallino forti accostamenti tra certi atomi di carbonio di molecole diverse ⁽⁸⁾. Si deve però ritenere che la flessibilità della catena libera della guttaperca non possa differire sensibilmente da quella della gomma, ed entrambe non possono essere minori di quella dei polibutadieni a concatenamento 1-4. Infatti vale rigidamente per tutti questi polimeri il principio del massimo allontanamento dei legami singoli (fig. 5 *a* e *b*).

L'importanza che esercita sulle proprietà allo stato solido ed in particolare sulla temperatura di fusione l'efficienza dell'impacchettamento delle

(8) S. C. NYBURG, «Acta Cryst.», 7, 385 (1954).

molecole nel reticolo cristallino viene confermato anche dall'esame della temperatura di fusione dei diversi polimeri isotattici delle alfa-olefine.

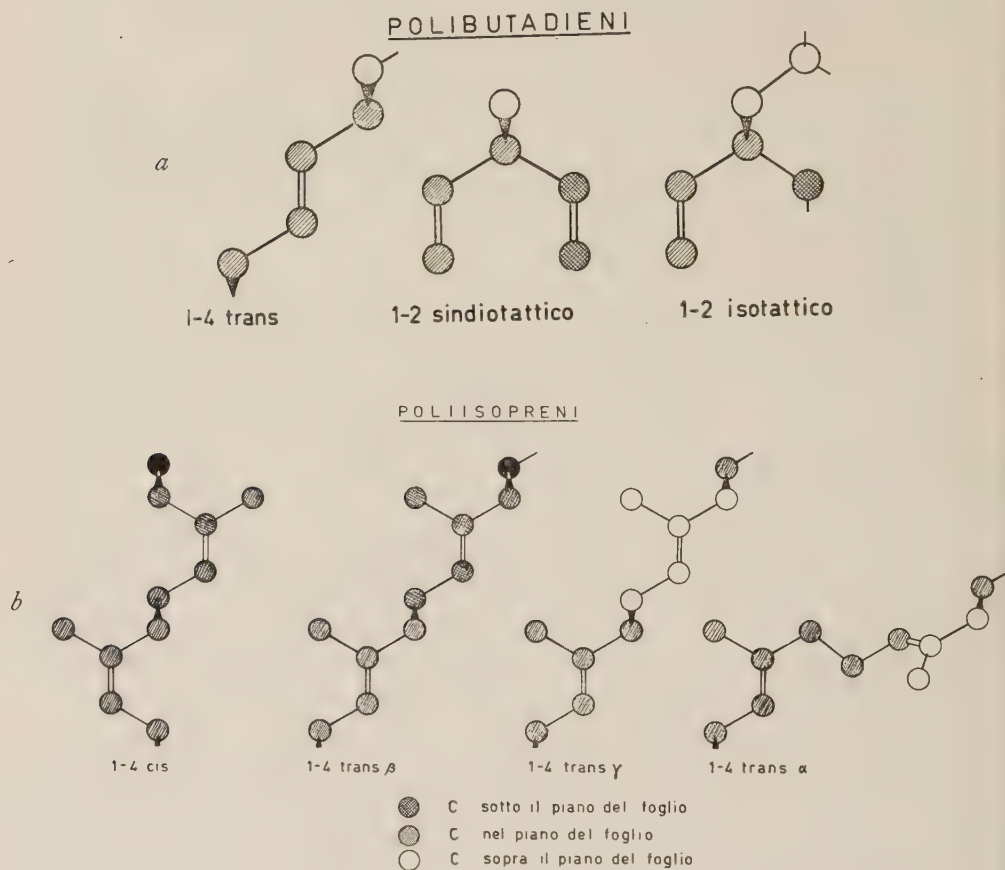


Fig. 5. - Modelli spaziali delle catene di varie polidiolefine in cui è messo in evidenza il verificarsi delle condizioni di massimo allontanamento dei legami singoli: *a*) polibutadieni; *b*) poliisopreni.

CONCLUSIONI. - Sono stati preparati, con processi diversi di catalisi eterogenea stereoselettiva di natura anionica, dei polimeri di diolefine coniugate aventi concatenamento 1-4 cis ed 1-4 trans, e di questi ultimi è stata esaminata la struttura cristallina.

Le molecole di tali polimeri nei cristalli soddisfano, come i polimeri cristallini delle alfa-olefine da noi precedentemente esaminati, al principio generale del massimo allontanamento dei legami semplici. La temperatura di fusione, che è più alta per il polibutadiene che per gli altri polimeri 1-4 trans di diolefine esaminati, appare dipendente dall'efficienza dell'impacchettamento delle molecole nel reticolo cristallino.

Chimica inorganica. — *Complessi triazolici del cobalto* (*).
Nota II di LIVIO CAMBI e ERNESTINA PAGLIA, presentata (**) dal
Socio L. CAMBI.

Le ricerche esposte in questa Nota costituiscono la prosecuzione di quelle comunicate in precedenza riguardanti il benzotriazolo, il benzoimidazolo ed il benzopirazolo. Dobbiamo anzitutto segnalare alcuni errori di stampa occorsi nelle Note precedenti su ricordate di cui riportiamo in calce la correzione (†).

Le attuali ricerche riguardano i sali del 5-bromo-benzotriazolo. Come è noto questo bromoderivato è stato anche introdotto quale reagente per la determinazione di alcuni metalli pesanti. Presenta maggiore attività del benzotriazolo, per ovvia più spiccata funzione acida.

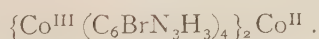
Sui cobalti esanitriti il bromobenzotriazolo agisce in mezzo acquoso, nelle stesse condizioni descritte nelle precedenti Note, demolendoli completamente. Si forma un sale insolubile molto stabile, affatto analogo a quello del benzotriazolo di colore ocre scuro di elevata stabilità, insolubile in tutti i solventi.

Il sale corrisponde alla formula bruta



contiene cobalto bivalente, presenta $\mu_{\text{eff.}}$ per 1 Co = 2,36 M. B.

Sul tetranitrato di Erdmann il bromobenzotriazolo agisce demolendolo per formare un sale insolubile di colore giallo arancio paramagnetico con $\mu_{\text{eff.}}$ per 3Co = 3,58 M. B., cui può attribuirsi la struttura grezza degli analoghi derivati benzotriazolici già descritti:



(*) Lavoro eseguito presso il Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R. nell'Istituto per la laurea in Chimica Industriale dell'Università Statale di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) *Complessi triazolici*, L. CAMBI, L. CANONICA e C. SIRONI, questi « Rend. », serie 8ª, XVIII a p. 583, la sequenza dei cationi monovalenti, derivati dalla cobalti-dinitroso-tetrammina, recano il segno — 1 in luogo di + 1 per la carica esterna; *Complessi cobaltosi e cobaltici del benzoimidazolo e del benzopirazolo*, L. CAMBI, L. CANONICA, questi « Rend. », serie 8ª, XX, a p. 17 al paragrafo 3, in luogo del rapporto 1 Co/1 benzopirazolo deve leggersi 1 Co/2 benzopirazolo.

I croceosali: dinitro-tetrammine, reagiscono col bromobenzotriazolo producendo un sale insolubile affatto simile al precedente, con il rapporto 3 Co/8 bromobenzotriazolo, con $\mu_{\text{eff.}}$ per 3 Co = 3,48 M. B.

Analogamente si comportano i sali delle carbonato-terammine e delle monocloro-pentammine.

Dalle acque madri della precipitazione del sale predetto, dal croceosale, ottenemmo il complesso giallo cristallino che possiamo considerare l'intermedio della reazione di demolizione, corrispondente a



diamagnetico ed affatto analogo al derivato benzotriazolico già descritto.

Questa ricerca conferma la generalità delle reazioni presentate dal benzotriazolo con i complessi cobaltici, accompagnata sempre dalla riduzione del cobalto a bivalente totale o parziale. Per quest'ultima si confermano le strutture brute di quei polimeri $2\text{Co}^{\text{III}}/1\text{Co}^{\text{II}}$ corrispondenti ad uno schema manifestatosi nelle altre classi già considerate e sulle quali ritorneremo.

Riassumiamo nella tabella seguente i dati dei sali cui accenniamo, che manifestano il comportamento generale caratteristico del paramagnetismo relativo:

Benzotriazolo	$\mu_{\text{eff.}}$ espresso in M. B. a 20°C.
$\{\text{Co}^{\text{II}}(\text{C}_6\text{N}_3\text{H}_4)_2 \cdot \text{H}_2\text{O}\}$	per 1 Co : 3,90 M. B.
$\{\text{Co}^{\text{III}}(\text{C}_6\text{N}_3\text{H}_4)_4\}_2\text{Co}^{\text{II}}$	per 3 Co : 3,60 M. B.
5-Bromo-benzotriazolo	
$\{\text{Co}^{\text{III}}(\text{C}_6\text{BrN}_3\text{H}_3)_4\}_2\text{Co}^{\text{II}}$	per 3 Co : 3,36 ÷ 3,58
Benzopirazolo	
$\{\text{Co}^{\text{III}}(\text{C}_7\text{N}_2\text{H}_5)_3\text{OH}\}_2\text{Co}^{\text{II}}$	per 3 Co : 3,64 M. B.

Aggiungiamo in chiusa che, con altri radicali organici, di altre classi, risultano manifestazioni analoghe, e attestano la stabilità relativa e la frequenza dei sali corrispondenti al rapporto $2\text{Co}^{\text{III}}/1\text{Co}^{\text{II}}$ nei processi di riduzione dei complessi da cobalto trivalente e di ossidazione di quelli da cobalto bivalente.

Biochimica. — *Ricerche sulla mioglobina degli invertebrati inferiori. Composizione in aminoacidi della mioglobina e l'emoglobina di « Thunnus Thynnus »* (*). Nota di A. ROSSI-FANELLI, E. ANTONINI, F. TRASARTI, presentata (**) dal Corrisp. A. ROSSI-FANELLI.

Nel quadro di ricerche di Biochimica comparata che stiamo eseguendo da qualche tempo nel nostro Istituto, abbiamo iniziato esperimenti sulla mioglobina degli invertebrati inferiori nella speranza che uno studio biochimico comparato in animali di specie diversa e di diverse esigenze di vita, potesse contribuire a chiarire meglio la funzione fisiologica e biochimica di questo pigmento respiratorio.

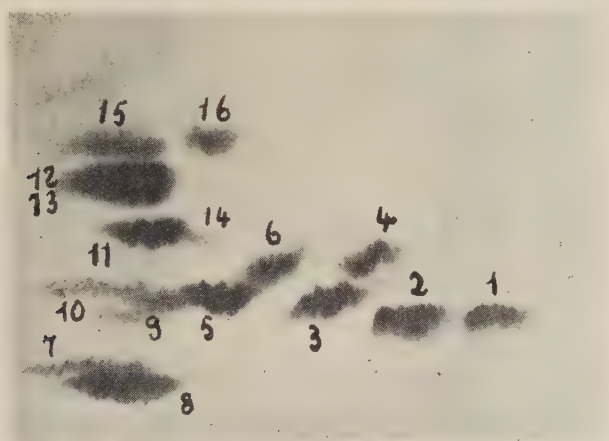


Fig. 1. — Cromatogramma bidimensionale di idrolizzato di mioglobina cristallizzata di tonno (dopo ossidazione).
Solventi: fenolo- NH_3 , collidina-lutidina.

Infatti mentre le nostre conoscenze sulla mioglobina nei mammiferi sono abbastanza progredite, poco invece è noto sulla mioglobina di altre classi animali.

In questa Nota comunichiamo i primi risultati di ricerche eseguite sulla mioglobina di alcune specie di pesci marini come il *Thunnus Thynnus*. Siamo riusciti ad isolare e cristallizzare la mioglobina sia dal cuore, sia dai muscoli di questi animali; a tale scopo abbiamo però dovuto modificare la tecnica da noi impiegata per l'isolamento e la cristallizzazione della mioglobina nei mammiferi, perché in queste specie animali la mioglobina e l'emoglobina

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1956.

presentano proprietà di solubilità e precipitabilità diverse da quelle dei mammiferi ⁽¹⁾.

Sul pigmento isolato e cristallizzato abbiamo determinato, mediante cromatografia su carta, il contenuto in aminoacidi paragonandolo a quello della mioglobina dei mammiferi e a quello della emoglobina della stessa specie.

Per le tecniche impiegate rimandiamo ai nostri precedenti lavori ⁽¹⁾ ⁽²⁾.



Fig. 2. - Cromatogramma per leucine di idrolizzato di mioglobina cristallizzata di tonno. Solvente: alcool amilico terziario.

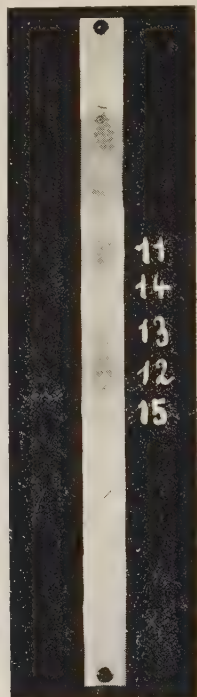


Fig. 4. - Cromatogramma per leucine di idrolizzato di emoglobina cristallizzata di tonno. Solvente: alcool amilico terziario.

Nelle figure 1, 2, 3, 4 riportiamo i risultati di queste esperienze. Essi dimostrano che la mioglobina di tonno contiene i seguenti aminoacidi:

1° acido aspartico, 2° acido glutammico, 3° glicina, 4° serina, 5° alanina, 6° treonina, 7° arginina, 8° lisina, 9° istidina, 10° prolina, 11° valina, 12° leucina, 13° isoleucina, 14° metionina, 15° fenilalanina, 16° tirosina.

Nell'emoglobina di tonno abbiamo trovato: 1° acido aspartico, 2° acido glutammico, 3° glicina, 4° serina, 5° alanina, 6° treonina, 7° arginina, 8° lisina,

(1) A. ROSSI-FANELLI e E. ANTONINI «Archives of Biochem. and Bioph.», 58, 408, 1955.

(2) A. ROSSI-FANELLI, D. CAVALLINI, P. MERUCCI, «Experientia», X, 72 (1954).

9° istidina, 10° prolina, 11° valina, 12° leucina, 13° isoleucina, 14° metionina, 15° fenilalanina, 16° tirosina, 17° cistina.

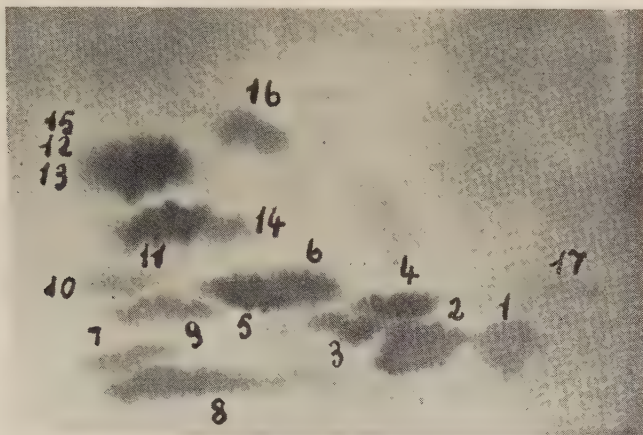


Fig. 3. — Cromatogramma bidimensionale di idrolizzato di emoglobina cristallizzata di tonno (dopo ossidazione).
Solventi: fenolo- NH_3 , collidina-lutidina.

I due pigmenti differiscono fra loro perché la mioglobina non contiene cistina mentre questo aminoacido è presente nell'emoglobina. Inoltre l'emoglobina di tonno differisce da quella del cavallo e dell'uomo per la presenza di isoleucina.

Fisiologia. — *Cinetica del ritorno ai valori di riposo della frequenza cardiaca e della ventilazione polmonare dopo lavoro muscolare* (*). Nota di R. MARGARIA, A. TAGLIETTI, E. AGOSTONI e G. MILIĆ EMILI, presentata (**) dal Socio R. MARGARIA.

La frequenza cardiaca e la ventilazione polmonare durante il ristoro tendono a ritornare ai valori di riposo seguendo una curva che è stata considerata di tipo esponenziale (Simonson, 1927, Liebenow 1928, Hebestreit 1929, Christensen 1931, Knehr e coll. 1942, Barman e coll. 1942, Berg 1947, Lehmann 1953); tuttavia queste funzioni non sono mai state con esattezza definite matematicamente ed i valori sperimentali dell'incremento relativo a valori di riposo della frequenza cardiaca e della ventilazione polmonare in funzione del tempo si staccano apprezzabilmente da una curva ad andamento esponenziale semplice.

D'altra parte già nel 1924 A. V. Hill aveva supposto che la curva di ristoro del consumo di O_2 non fosse semplice, ma composta, e Margaria e

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

collaboratori (1933) poterono dimostrare quantitativamente che essa risulta di varie componenti. Di queste, due, particolarmente importanti dal punto di vista fisiologico perchè espressione del pagamento del debito di O_2 , sono bene individuabili per il loro andamento esponenziale; una componente, rapida (tempo di semireazione = $1/2$ min), è l'espressione del pagamento del debito «alattacido», l'altra, più lenta (tempo di semireazione = 15 minuti), è legata al pagamento del debito «lattacido». Una terza componente molto più lenta, non bene definita matematicamente, è l'espressione dell'aumento del metabolismo conseguente all'esercizio muscolare.

Poiché il consumo di O_2 è la funzione più direttamente legata al lavoro, e poiché il fine ultimo dell'attività polmonare (di cui la ventilazione è espressione) e dell'attività cardiaca (di cui la frequenza è una componente) è quella di trasportare una adeguata quantità di O_2 ai tessuti, è presumibile che le curve di ristoro per tali funzioni seguano da vicino quella del consumo di O_2 e siano pressoché dello stesso tipo. La funzione respiratoria e circolatoria non sono d'altra parte soltanto legate al trasporto di O_2 dai polmoni ai tessuti, ma anche al trasporto del CO_2 , e la prima particolarmente è molto sensibile alla concentrazione di questo gas nei liquidi organici. La produzione e l'eliminazione di CO_2 non vanno strettamente parallele con il consumo di O_2 per la presenza nell'organismo di depositi di questo gas e per la variazione dei radicali acidi esistenti nei liquidi organici, prevalentemente di acido lattico e piruvico, per effetto del lavoro muscolare e del ristoro. Per queste ragioni il ritorno alle condizioni di riposo dopo lavoro muscolare è più lento per la produzione di CO_2 che per il consumo di O_2 (Simonson 1927, Berg 1947): è presumibile perciò che anche le curve di ristoro per l'attività respiratoria e per quella cardiaca siano meno inclinate di quella per il consumo di O_2 .

Per controllare se effettivamente il ritorno alle condizioni di riposo per l'attività cardiaca e respiratoria segue l'andamento del consumo di O_2 , come è stato sopra prospettato, sono state studiate le curve di ristoro della frequenza cardiaca e della ventilazione polmonare in seguito a lavoro muscolare di vario tipo su diversi soggetti.

Gli esperimenti eseguiti su 9 soggetti maschi sani di 21-28 anni, consistevano in due tipi di marcia su ergometro trasportatore: l'una a 6 km/h con inclinazione del 10% per una durata di ca 6 min, l'altra a 5,5 km/h con inclinazione del 20%, protratta fino all'esaurimento. Dopo l'esercizio i soggetti rimanevano in posizione eretta per ca 2 min e quindi in posizione seduta per ca 20 min. Sia durante il lavoro che nel ristoro la ventilazione polmonare era registrata su un chimografo connesso ad uno spirometro di Tissot di grande capacità (ca 900 l) e la frequenza cardiaca era registrata con un cardiografografo.

I risultati di questi esperimenti dimostrano che le curve relative al ritorno ai valori di riposo della frequenza cardiaca e della ventilazione polmonare durante il periodo di ristoro non sono di tipo esponenziale semplice. Queste curve devono quindi essere composte da più curve semplici, che si è cercato di analizzare.

A questo scopo, per limitare lo studio ai fenomeni rapidi che hanno luogo entro i primi 4-5 min dalla fine del lavoro e che trovano il loro parallelo nella curva del pagamento del debito «alattacido» di O_2 , si sono posti in grafico i valori sperimentali in funzione del tempo, e si è estrapolato graficamente al tempo o la parte di curva esprimente i fenomeni lenti del ristoro, trascurando i valori dei primi minuti (fig. 1). Sottraendo i valori estrapolati così ottenuti dai valori sperimentali dei primi 4-5 min si sono ottenuti valori attribuibili alla componente rapida del ristoro. Questa è risultata essere effettivamente una funzione esponenziale in tutti i soggetti e per tutti i tipi di lavoro (fig. 2).

Il carattere esponenziale della componente rapida permette, con il procedimento grafico illustrato, di definire la velocità in termini di costante di velocità o di tempo di reazione, e quindi di poter eseguire facilmente un

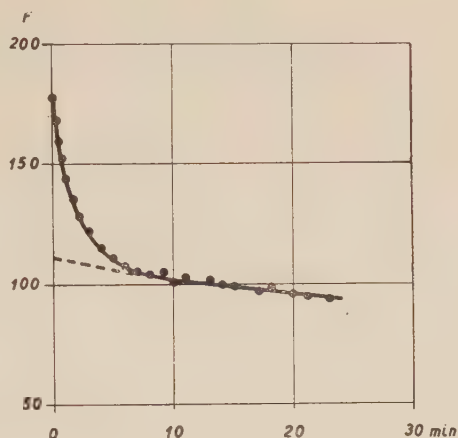


Fig. 1. - Frequenza cardiaca durante ristoro dopo lavoro esauriente: la linea tratteggiata è l'estrapolazione grafica della componente lenta.

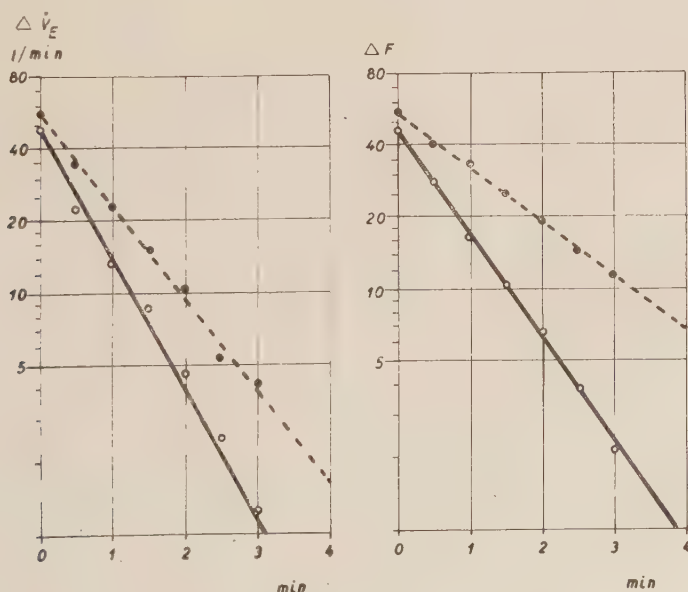


Fig. 2. - Componente rapida della ventilazione polmonare e della frequenza cardiaca posta in scala logaritmica in funzione del tempo di ristoro.

I valori esprimono la differenza fra dati sperimentali e valori estrapolati come indicato in fig. 1. Il tempo di semireazione risulta di 34 sec per la ventilazione e di 42 sec per la frequenza cardiaca dopo un lavoro richiedente un consumo di ca 9 kcal/kg/h (linea continua), di 46 sec per la ventilazione e 77 sec per la frequenza cardiaca dopo un lavoro di ca 15 kcal/kg/h (linea tratteggiata).

raffronto di tale valore in un soggetto dopo lavori di diversa entità o tra soggetti diversi.

Risulta infatti dai grafici della fig. 2, costruiti coi dati ottenuti dalla media di 3 esperimenti su uno stesso soggetto, che il tempo di semireazione della componente rapida del ristoro aumenta apprezzabilmente aumentando l'intensità del lavoro, passando cioè da un tipo di lavoro aerobico ad uno anaerobico: questo effetto è molto maggiore per la frequenza cardiaca che per la ventilazione polmonare.

In ogni caso, sia nel lavoro pesante che in quello leggero, e sia per l'attività respiratoria che per quella cardiaca, la velocità del ristoro è più lenta che per il pagamento del debito lattacido, come appare dalla tabella I nella quale sono indicati i tempi di metà reazione per le varie funzioni e per i due tipi di lavoro sperimentati.

TABELLA I.

Tempo di metà reazione del ristoro in sec.

	Lavoro di 9 kcal/kg/h	Lavoro di 15 kcal/kg/h
Frequenza cardiaca	38	67
Ventilazione polmonare l/min . . .	38	51

I dati di numerosi esperimenti eseguiti su vari soggetti hanno indicato una grande variabilità della costante della velocità dei diversi soggetti per uno stesso tipo di lavoro ($\sigma = 35\%$), mentre la variabilità individuale è molto minore ($\sigma = 8\%$). Appare quindi possibile differenziare diversi soggetti sulla base della rapidità del ristoro, quale è stata qui indicata. La velocità del ristoro relativa alla componente rapida, definita dalla costante di velocità o dal tempo di semireazione, può essere utilizzata come un indice individuale della capacità del ristoro.

Per quello che riguarda la curva esprime la componente lenta del ristoro, essa è di più difficile valutazione anche perché le variazioni nel tempo sono molto piccole e rientrano spesso nell'errore di determinazione della variabile in esame. Ci pare tuttavia che anche la componente lenta abbia in genere un andamento di tipo esponenziale, che si manifesta più puro nella curva della ventilazione polmonare e in genere dopo un lavoro relativamente leggero.

BIBLIOGRAFIA.

- SIMONSON E., « Pfluger's Arch. », 215, 716 (1927).
 LIEBENOW R., « Ztschr. f. d. ges. exper. Med. », 59, 49 (1928).
 HEBESTREIT H., « Pfluger's Arch. », 222, 738 (1925).

- CHRISTENSEN E. H., « *Arbeitsphysiol.* », 4, 453 (1931).
 KNEHR C. A., DILL D. B. e NEUFELD W., « *Am. J. Physiol.* », 136, 148 (1942).
 BARMAN I. M., CONSOLAZIO F. e MOREIRA M. F., « *Am. J. Physiol.* », 138, 16 (1942).
 BERG W. E., « *Am. J. Physiol.* », 149, 597 (1947).
 LEHMANN G., « *Praktische Arbeitsphysiologie* », Thieme, Stuttgart, 1953.
 HILL A. V., LONG C. N. H. e LUPTON H., « *Proc. Roy. Soc. B.* », 97, 84 (1924).
 MARGARIA R., EDWARDS H. T. e DILL D. B., « *Am. J. Physiol.* », 106, 689 (1933).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes.* Nota I di J. SEBASTIÃO E SILVA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Dans cette Note et dans une autre qui la suivra, nous indiquerons, sans démonstrations, une façon naturelle de généraliser, aux espaces localement convexes les plus généraux, plusieurs de nos résultats contenus dans [11], [12] et [13] ⁽¹⁾. Tout d'abord, nous nous sommes convaincus que, pour obtenir une bonne généralisation du concept de « fonction différentiable », il faut renoncer, dans le cas général, à la condition de continuité (qui subsistera, néanmoins, dans les cas courants des applications). On sait que, dans les espaces l. c., la propriété d'être bornée, pour les fonctions linéaires, est plus générale que la propriété d'être continue. Eh bien, c'est la notion de fonction linéaire *bornée*, qui nous a conduit, d'une façon naturelle, à la notion de fonction analytique et, en dernière analyse, à celle de fonction différentiable. Pour atteindre la plus grande généralité, nous considérons des fonctions qui sont bornées seulement sur certaines parties bornées de l'espace de la variable indépendante; dans cet ordre d'idées, nous introduisons toute une gamme de notions de différentiabilité, parmi lesquelles on retrouve, généralisées, quelques-unes des notions déjà connues — depuis la différentiabilité au sens de Gâteaux-Lévy, jusqu'à la différentiabilité au sens de Fréchet. Avec ces prémisses, on réussit à généraliser un grand nombre de théorèmes, avec des hypothèses assez larges et sous une forme assez simple, ce qui induit à croire que l'on est sur la bonne route.

La dérivée d'une fonction en un point est toujours conçue comme une application linéaire, d'après une idée de Michal. D'autre part, pour étudier la réciproque de l'opération de dérivation, on est conduit, nécessairement, à la notion d'intégrale de ligne, que nous avons déjà définie dans [12] pour les espaces de Banach et que, même dans ce cas particulier, nous n'avons trouvée nulle part, définie d'une façon équivalente.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la Bibliographie, qui sera publiée à la fin de la Note suivante.

Dans le cas des scalaires complexes, on réussit à généraliser aux espaces l. c. plusieurs résultats de la théorie des fonctions analytiques dans les espaces de Banach. *C'est le résultat fondamental de Hille, concernant les fonctions G-analytiques localement bornées* (cf. [7], p. 81-82), *qui conduit, d'une façon naturelle, à nos notions de différentiabilité.*

Dans une troisième Note, nous nous occuperons de la généralisation de l'analyse dans les algèbres de Banach (cf. travaux de Gelfand, Lorch, etc.). À cet effet, nous considérerons des algèbres X commutatives, munies d'élément unité et d'une topologie d'espace localement convexe telle que l'application $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ de X^2 dans X soit bornée sur tout borné de X^2 .

1. NOTIONS DE FONCTION DIFFÉRENTIABLE ET DE DERIVÉE. - Sauf mention expresse du contraire, tous les espaces considérés par la suite seront des *espaces vectoriels localement convexes, sur le corps réel, R , ou sur le corps complexe, C* . Dans toute question où l'on considère deux ou plusieurs espaces, on sous-entend qu'ils sont relatifs au même corps de scalaires.

Soient X, Y deux tels espaces et soit \mathfrak{B} un ensemble de parties bornées de X , fixé arbitrairement, de façon que: 1) si B appartient à \mathfrak{B} , l'enveloppe absolument convexe ⁽²⁾ de B , appartient aussi à \mathfrak{B} ; 2) \mathfrak{B} contient tous les ensembles formés d'un seul élément de X . Cela étant, considérons une fonction $\varphi(x)$ définie dans une partie de X et prenant ses valeurs dans Y ; et soit μ un nombre réel > 0 ; alors:

(1.1) Nous dirons que $\varphi(x)$ est un *infinitement petit avec x , d'ordre supérieur à μ , par rapport à \mathfrak{B}* , si, pour tout ensemble $B \in \mathfrak{B}$, il existe un borné C de Y , tel que, à tout nombre $\delta > 0$, corresponde un nombre $\varepsilon > 0$, vérifiant la condition

$$\frac{\varphi(tx)}{t^\mu} \in \delta C, \text{ pour } |t| < \varepsilon, \text{ quel que soit } x \in B.$$

Cette définition peut sembler un peu artificielle et plutôt restrictive. On verra mieux sa raison d'être dans le cas des scalaires complexes (fonctions analytiques). D'ailleurs toutes les propositions que nous indiquerons par la suite, excepté le théorème des fonctions composées, restent valables si l'on remplace (1.1) par la définition suivante: « On dit que $\varphi(x)$ est un *infinitement petit avec x , d'ordre supérieur à μ , par rapport à \mathfrak{B}* , si le rapport $\varphi(tx)/t^\mu$ converge vers 0, uniformément sur tout $B \in \mathfrak{B}$, lorsque $t \rightarrow 0$ ». Ces deux définitions s'accordent avec la notion usuelle d'infinitement petit d'ordre supérieur à μ , dans le cas où X, Y sont des espaces normés et \mathfrak{B} est formé par tous les bornés de X . Plus généralement, ces deux définitions sont équivalentes, lorsque Y vérifie la *seconde condition de dénombrabilité de Mackey* (cf. [3], p. 77), ainsi que la *condition de convergence de Mackey stricte* (cf.

(2) D'après M. KÖTHE, nous appelons *enveloppe absolument convexe* de B l'ensemble des éléments de X de la forme $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r$, avec $x_i \in B$, $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_r| \leq 1$ et r quelconque (notion équivalente à celle de *enveloppe convexe et cerclée*).

[6], p. 105), ce qui est assez fréquent dans l'analyse fonctionnelle concrète, nommément dans la théorie des distributions et dans la théorie des fonctionnelles.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction définie dans un ouvert D de X et à valeurs dans Y :

(1.2) Nous dirons que $f(x)$ est *différentiable en un point a* de D par rapport à \mathfrak{B} , ou, simplement, *différentiable (\mathfrak{B}) en a* , s'il existe une application linéaire L de X dans Y , bornée sur tout borné $B \in \mathfrak{B}$, telle que la différence

$$f(x) - f(a) - L(x - a)$$

soit un infiniment petit avec $x - a$, d'ordre supérieur à 1, par rapport à \mathfrak{B} .

On voit aussitôt qu'il ne peut exister plus d'un opérateur L vérifiant cette condition. S'il en existe un, nous le nommerons la *dérivée de $f(x)$ en a* (par rapport à \mathfrak{B}) et nous le désignerons par $f'(a)$ ou par $[df/dx]_a$, en écrivant

$$f'(a)h \text{ au lieu de } L(h).$$

D'ailleurs, on voit que le rapport $[f(a + th) - f(a)]/t$, où t est une variable, converge vers $f'(a)h$ (uniformément sur tout $B \in \mathfrak{B}$), lorsque $t \rightarrow 0$. La fonction $f'(a)h$ de h s'appellera la *différentielle de $f(x)$ au point a , correspondante à l'accroissement h* .

La fonction $f(x)$ sera dite *différentiable (\mathfrak{B}) dans D* , si elle est différentiable (\mathfrak{B}) en tout point de D . Alors, n'importe quel des symboles $f'(x)$, $(d/dx)f(x)$, $D_x f$, ..., désignera la *fonction dérivée* (ou simplement la *dérivée*) de $f(x)$ dans D .

Avec ces définitions de dérivée, plusieurs propriétés élémentaires de la notion classique sont conservées: *la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, la dérivée d'une constante est l'opérateur nul, la dérivée de x est l'opérateur identique*, etc. Mais, pour les autres propriétés, il faut introduire des restrictions convenables.

Pour chaque $B \in \mathfrak{B}$, nous désignerons par \hat{B} l'enveloppe absolument convexe de B et par $[B]$ le sous-espace vectoriel de X engendré par B et muni de la norme correspondante à la boule \hat{B} . On appelle *dimension* de B le nombre de dimensions de $[B]$.

Supposons que $f(x)$ est différentiable (\mathfrak{B}) en a . Nous distinguerons les cas suivants:

1° \mathfrak{B} est formé par les bornés de X de dimension 1. Nous dirons alors que $f(x)$ est *uni-différentiable en a* . On voit tout de suite que cette notion est équivalente à celle de fonction différentiable au sens de Gâteaux-Lévy, dans le cas où X, Y sont des espaces normés.

2° \mathfrak{B} est formé par les bornés de X de dimension ≤ 2 . Nous dirons alors que $f(x)$ est *bi-différentiable en a* .

3° \mathfrak{B} est formé par les bornés de X de dimension finie. Nous dirons alors que $f(x)$ est *finiment différentiable en a* .

4° \mathfrak{B} est formé par tous les bornés de X . Nous dirons alors que $f(x)$ est *totalelement différentiable en a* . Il est aisé de voir que, dans le cas des espaces normés, cette notion coïncide avec celle de fonction différentiable au sens de Frechét (cf. [4]).

En général, quand $\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2$, la différentiabilité par rapport à \mathfrak{B}_1 implique que la différentiabilité par rapport à \mathfrak{B}_2 (avec la même dérivée).

Remarque. - Si X se réduit au corps des scalaires, les notions considérées deviennent équivalentes. Dans ce cas, on définit la dérivée de $f(x)$ en a simplement comme la limite de $[f(a+h) - f(a)]/h$ lorsque $h \rightarrow 0$, si cette limite existe; et de même pour les dérivées d'ordre supérieur. Mais on peut démontrer alors que, si $f(x)$ admet dérivée seconde continue dans l'ouvert D , alors $f(x)$ est différentiable dans D (au sens ici considéré).

Le théorème des fonctions composées s'énonce maintenant de la façon suivante:

(1.3) Soient X, Y, Z trois espaces localement convexes, $F(y)$ une fonction définie dans un ouvert D^* de Y et prenant ses valeurs dans Z , $f(x)$ une fonction définie dans un ouvert D de X et prenant ses valeurs dans D^* . Si la fonction $f(x)$ est différentiable (\mathfrak{B}) en a et la fonction $F(y)$ est totalelement différentiable en $f(a)$, alors $F(f(x))$ est différentiable (\mathfrak{B}) en a , quel que soit \mathfrak{B} , et on peut écrire

$$\frac{d}{dx} [F(f(x))]_a = F'(f(a)) \cdot f'(a).$$

On en déduit aussitôt que, si la fonction $f(x)$ est totalelement différentiable en a , elle est différentiable en a au sens de Hadamard généralisé. Mais la réciproque n'est pas vraie (cf. [4] et [9]).

Une question importante à décider est celle de la continuité des fonctions différentiables. En employant une technique semblable à celle de la démonstration de la prop. 6 dans [3], on arrive à la conclusion suivante:

(1.4) Dans le cas où X est métrisable, on peut affirmer que, si la fonction $f(x)$ est totalelement différentiable en a , elle est continue en a .

Dans le cas général, on a le résultat suivant:

(1.5) Si $f(x)$ est différentiable (\mathfrak{B}) en a , $f(x) - f(a)$ est un infiniment petit avec $x - a$ (d'ordre supérieur à 0) par rapport à \mathfrak{B} .

Observons que, si $B_1 \subset B_2$, la topologie de $[B_1]$ est plus fine que la topologie induite dans $[B_1]$ par celle de $[B_2]$, et que la topologie naturelle de X est moins fine que la topologie de la limite inductive localement convexe des $[B]$, pour $B \in \mathfrak{B}$. Nous désignerons par $T_{\mathfrak{B}}^*$ cette topologie.

Mais il sera encore utile de considérer, au lieu de $T_{\mathfrak{B}}^*$, la topologie de la limite inductive topologique des $[B]$, c'est-à-dire la plus fine des topologies sur X qui induisent, dans chaque espace $[B]$, avec $B \in \mathfrak{B}$, une topologie moins fine que celle déterminée par la boule \hat{B} . Cette topologie, que nous désignerons par $T_{\mathfrak{B}}$ (plus fine que $T_{\mathfrak{B}}^*$), n'est pas nécessairement une topologie d'espace localement convexe. Dans le cas où \mathfrak{B} est formé par les bornés de dimension finie, on obtient de cette façon une topologie, disons T_0 , que l'on

pourrait nommer la *topologie finie*: les ensembles ouverts par rapport à T_0 ne sont que les ensembles *finiment ouverts*, considérés par l'école américaine (cf. [7], def. 4.3.1).

Or, on voit que, *si $f(x)$ est différentiable (\mathfrak{B}) dans l'ouvert D , $f(x)$ sera continue dans D par rapport à $T_{\mathfrak{B}}$.*

Dans plusieurs cas qui se présentent dans cette étude, on pourra élargir les hypothèses des propositions, en remplaçant la topologie naturelle de X par la topologie $T_{\mathfrak{B}}$. Par exemple, lorsqu'on parle de « ensemble ouvert », « voisinage de a », etc. on pourra souvent rapporter ces expressions à cette topologie — comme on le faisait déjà par rapport à la topologie finie, dans les espaces de Banach.

Il y a d'ailleurs certaines classes importantes d'espaces l. c., dont la topologie coïncide avec celle de la limite inductive topologique de tous les sous-espaces $[B]$, où B est un borné quelconque: par exemple, les espaces que nous avons étudiés dans [14], sous la désignation d'espaces (LN^*) .

En outre, on déduit de (1.4):

(1.6) *Si l'espace X est la limite inductive topologique d'une famille d'espaces métrisables, toute fonction $f(x)$ totalement différentiable dans un ouvert D de X est continue dans D .*

2. LA NOTION D'INTÉGRALE DE LIGNE. — Nous définirons maintenant une notion d'intégrale, en correspondance avec la notion antérieure de dérivée.

Tout en conservant les conventions précédentes, nous désignerons par $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires de X dans Y , bornées sur tout ensemble $B \in \mathfrak{B}$, avec la topologie de la convergence uniforme sur ces ensembles. En raisonnant comme dans la démonstration de la prop. 7 dans [3], on voit aussitôt que

(2.1) *Si Y est complet [resp. complet par rapport aux suites], l'espace $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ est aussi complet [resp. complet par rapport aux suites].*

Soit maintenant $F(x)$ une fonction définie dans une partie D de X et prenant ses valeurs dans $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$, c'est-à-dire telle que

$$F(x) \in \Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y) \quad \text{pour chaque } x \in D,$$

et soit C une *ligne orientée* de X , contenue dans D , définie paramétriquement par une fonction ponctuelle continue, $x = g(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Considérons une partition π de l'intervalle $[0, 1]$ au moyen d'une suite de points $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et posons $x_i = g(t_i)$, $|\pi| = \max(t_i - t_{i-1})$, pour $1 \leq i \leq n$. Cela étant, nous appellerons *somme de Riemann* de $F(x)$ relative à π tout élément s_{π} de Y tel que

$$s_{\pi} = \sum_{i=1}^n F(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \text{avec } \bar{x}_i = g(\bar{t}_i), \quad t_{i-1} \leq \bar{t}_i \leq t_i.$$

D'autre part, δ étant un nombre positif, nous désignerons par S_δ l'ensemble de toutes les sommes s_π telles que $|\pi| < \delta$. La famille $\{S_\delta\}$ de ces ensembles est manifestement une base de filtre sur Y . Nous nommerons *ensemble intégrale de $F(x)$ sur C* l'adhérence de ce filtre (cf. [1], p. 49) et nous désignerons cet ensemble par le symbole

$$\int_C^\wedge F(x) dx.$$

On reconnaît facilement que cet ensemble ne dépend pas du paramétrage de C , mais seulement de l'orientation de cette ligne. Nous dirons que $F(x)$ est *intégrable sur C* si la base de filtre $\{S_\delta\}$ est convergente. Sa limite sera dite alors *l'intégrale de $F(x)$ sur C* et on écrira

$$\int_C^\wedge F(x) dx = \lim \{S_\delta\} = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} s_\pi.$$

On voit de même que, *si l'espace Y est complet par rapport aux suites, cette intégrale existe, si (et seulement si) le filtre engendré par $\{S_\delta\}$ est un filtre de Cauchy.*

Soient maintenant $F_1(x)$, $F_2(x)$ deux fonctions définies dans D et prenant leurs valeurs dans $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$. On démontre aisément la règle suivante:

(2.2) *Si $F_1(x)$ est intégrable sur C , on aura*

$$\int_C^\wedge [F_1(x) + F_2(x)] dx = \int_C^\wedge F_1(x) dx + \int_C^\wedge F_2(x) dx.$$

Quant à l'intégrabilité des fonctions continues, la question devient un peu nuancée dans les espaces localement convexes. Nous disons que la fonction $F(x)$ est *continue sur C* , si la fonction $F(g(t))$ est continue sur $[0, 1]$. Posons d'autre part $a = g(0)$, $b = g(1)$; nous disons que la ligne C est *rectifiable* dans X (par rapport à la topologie de cet espace), si, pour toute semi-norme $p(x)$ continue sur X , la fonction $g(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) résulte à variation bornée. Il est aisé de voir que, *si la ligne C est rectifiable dans X et s'il existe un ensemble $B \in \mathfrak{B}$ tel que la fonction $g(x)$ — a prend ses valeurs dans $[B]$ et est continue par rapport à la topologie de cet espace, alors C — a est rectifiable par rapport à la topologie de $[B]$* . Quand ces conditions sont vérifiées, nous dirons simplement que C est *rectifiable* (\mathfrak{B}). Alors le théorème sur l'intégrabilité des fonctions continues prend la forme suivante:

(2.3) *Soit C une ligne rectifiable (\mathfrak{B}) et soit Y un espace complet par rapport aux suites. Alors, si $F(x)$ est continue sur C , $F(x)$ est intégrable sur C .*

3. LES RAPPORTS ENTRE LA DÉRIVÉE ET L'INTÉGRALE. — Considérons trois espaces U, X, Y , un ensemble \mathfrak{B} de bornés de X et un ensemble \mathfrak{B}^* de bornés de U , vérifiant les conditions indiquées au n. 1. Soit encore $F(x)$

une fonction définie dans l'ensemble DCX et prenant ses valeurs dans $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$; et soit $\varphi(u)$ une fonction définie et continue dans un ensemble $D^* \subset U$ et prenant ses valeurs dans D . Soit d'autre part Γ une ligne de D^* , rectifiable (\mathfrak{B}^*), définie par la fonction continue $u = \gamma(t)$, et soit C l'image de Γ par φ , c'est-à-dire:

$$C = \varphi(\Gamma), \quad \text{en posant } g(t) = \varphi(\gamma(t)) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Par une technique semblable à celle qui nous a permis de démontrer le th. [3.1] dans [12], on établit, dans ces conditions, le théorème suivant:

(3.1) *Si la fonction $F(x)$ est intégrable et bornée sur C et que la fonction $\varphi(u)$ soit différentiable (\mathfrak{B}^*) dans D , on a*

$$\int_C F(x) dx \in \int_C F(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Naturellement, si $F(\varphi(u)) \varphi'(u)$ est intégrable sur Γ on obtient dans ces conditions une formule pour le changement des variables (en remplaçant le signe « \in » par « $=$ »); en particulier, si U est la droite réelle, on ramène ainsi l'intégrale de ligne à une intégrale d'une fonction de variable réelle.

En échangeant les rôles des variables, on déduit de ce théorème le corollaire suivant:

(3.2) *Si la fonction $f(x)$, définie dans l'ouvert D de X et à valeurs dans Y , est différentiable (\mathfrak{B}) dans D , on aura, pour toute ligne C rectifiable (\mathfrak{B}), d'extrêmes a, b , contenue dans D :*

$$f(b) - f(a) \in \int_C f'(x) dx.$$

Ce théorème remplace, dans les espaces localement convexes, le théorème élémentaire des accroissements finis. On en déduit que, si $F(x)$ est la dérivée d'une fonction $f(x)$ différentiable (\mathfrak{B}) dans D , l'intégrale de $F(x)$ sur une ligne C contenue dans un ensemble $B \in \mathfrak{B}$ (si cette intégrale existe) ne dépend que des limites a, b d'intégration: elle est égale à $f(b) - f(a)$.

En général, toutes les fois qu'une intégrale de ligne, dans les cas où elle existe, ne dépend que des limites a, b d'intégration, nous la désignerons par le symbole

$$\int_a^b F(x) dx.$$

Supposons maintenant, par commodité, que l'ensemble D est simplement connexe. Alors on a la généralisation suivante du théorème fondamental du calcul intégral:

(3.3) *S'il existe l'intégrale de $F(x)$ au moins sur toute ligne polygonale P contenue dans D et si cette intégrale ne dépend que des extrêmes de cette ligne, la fonction $f(x)$ définie par la formule*

$$f(x) = \int_a^x F(\bar{x}) d\bar{x}, \quad \text{en fixant } a \text{ dans } D,$$

est différentiable (\mathfrak{B}) en tout point x de D tel que $F(x) - F(x_0)$ soit un infiniment petit avec $x - x_0$ par rapport à \mathfrak{B} . Alors on a

$$f'(x_0) = F(x_0).$$

Matematica. — *Una trasformazione integrale connessa con la propagazione del calore.* Nota di DAVID VERNON WIDDER, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Diremo che la funzione $u(x, t)$ è una « temperatura », e scriveremo $u(x, t) \in H$, se essa è continua con le sue derivate dei primi due ordini e verifica l'equazione

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

la cui soluzione *fondamentale* è la funzione

$$(2) \quad k(x, t) = \frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

In questa Nota si considera la trasformazione integrale

$$(3) \quad f(t) = \int_0^\infty k(y, t) d\alpha(y).$$

Se questo integrale per $t > 0$ converge assolutamente, diremo che è $f(t) \in A$, e scriveremo l'equazione (3) più brevemente col simbolo $[f(t), d\alpha(y)]$. Dalla (2) segue immediatamente che è $f(t) \in A$ se e solo se la $f(1/t)/\sqrt{t}$ è un integrale di Laplace-Stieltjes, assolutamente convergente per $t > 0$.

Faremo uso qui della nozione di derivata e di integrale d'ordine frazionario, dovuta a Riemann-Liouville; in particolare,

$$(4) \quad f^{(-1/2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{D}} f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f(r)}{\sqrt{t-r}} dr.$$

Introduciamo un'altra classe, B , di funzioni; diremo che è $f(t) \in B$ se $f^{(-1/2)}(t)$ esiste, appartiene ad A , ed è $[f^{(-1/2)}(t), d\alpha(y)]$, dove $\alpha(y)$ è continua nell'origine, $\alpha(0+) = \alpha(0)$.

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

È facile vedere che è $A \subset B$, ma non viceversa. Ad esempio, la funzione $t^{-3/4}$ non appartiene ad A , giacché $t^{1/4}$ non è una trasformata di Laplace; tuttavia è $t^{-3/4} \in B$, perché l'integrale (4) risulta, per essa, un multiplo fisso di $t^{-1/4}$, la quale a sua volta appartiene ad A ed ammette una funzione determinante $\alpha(y)$ assolutamente continua.

In modo ovvio, per mezzo di serie, si introducono infine gli operatori $\sinh x \sqrt{\bar{D}}$, $\cosh x \sqrt{\bar{D}}$, $e^{x\sqrt{\bar{D}}}$.

La Nota presente ha lo scopo di sfruttare la trasformazione (3) ed operatori simbolici del tipo $F(\sqrt{\bar{D}})$ nella teoria della propagazione del calore. È evidente che la funzione

$$u(x, t) = F(x \sqrt{\bar{D}}) f(t)$$

verifica formalmente la (1), se è $F'' = F$, in quanto si ha

$$u_{xx} = F''(x \sqrt{\bar{D}}) f'(t), \quad u_t = F(x \sqrt{\bar{D}}) f'(t);$$

applicando dunque ad opportune funzioni $f(t)$ gli operatori esponenziali del capoverso precedente, si dovrebbero ottenere soluzioni della (1). Effettivamente è lecito applicare questi operatori a qualunque funzione della classe A , e se ne ottengono « temperature » rappresentabili per mezzo di integrali di Poisson. Precisamente, si può dimostrare quanto segue.

TEOREMA 1. — Se è $[f(t), d\alpha(y)]$, allora, per $t > 0$, si ha:

$$(\cosh x \sqrt{\bar{D}}) f(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [k(x-y, t) + k(x+y, t)] d\alpha(y),$$

$$(\sinh x \sqrt{\bar{D}}) f(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [k(x-y, t) - k(x+y, t)] d\alpha(y),$$

$$e^{x\sqrt{\bar{D}}} f(t) = \int_0^\infty k(x-y, t) d\alpha(y) = 2 \int_0^t k_x(x, t-r) f(r) dr, \quad x < 0.$$

Basandoci sul loro comportamento su una singola retta $x = \text{costante}$, possiamo caratterizzare le « temperature » $u(x, t)$, suscettibili di una delle rappresentazioni del teorema 1. Precisamente, abbiamo:

TEOREMA 2. — Se è $u(x, t) \in H$ per $t > 0$, ed $f(t) \in A$, allora:

$$u(x, t) = (\cosh x \sqrt{\bar{D}}) f(t) \xrightarrow{\leftarrow} u(0, t) \in A, \quad u_x(0, t) = 0,$$

$$u(x, t) = (\sinh x \sqrt{\bar{D}}) f(t) \xrightarrow{\leftarrow} u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) \in B,$$

$$u(x, t) = e^{x\sqrt{\bar{D}}} f(t) \xrightarrow{\leftarrow} u(0, t) \in A, \quad u_x(0, t) \in B,$$

$$\sqrt{\bar{D}} u(0, t) = u_x(0, t).$$

Si osservi che $k(x, t)$ ammette sia la prima che la terza rappresentazione, in quanto è $k(0, t) = 1/\sqrt{4\pi t} \in A$, $k_x(0, t) = 0 = \sqrt{\bar{D}} k(0, t)$.

Ma v'è un'altra proprietà caratteristica, per quelle « temperature » che ammettono per $t > 0$ una rappresentazione integrale alla Poisson assolutamente convergente.

TEOREMA 3. - *La funzione $u(x, t)$ ammette la rappresentazione*

$$(5) \quad u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y, t) d\omega(y),$$

l'integrale convergendo assolutamente per $t > 0$, se e solo se ivi si ha $u(x, t) \in H$, $u(0, t) \in A$, $u_x(0, t) \in B$.

Pertanto, la possibilità o meno di rappresentare la $u(x, t)$ nella forma (5) si deduce dal suo comportamento su una singola retta $x = \text{costante}$; è notissimo, d'altronde, che il comportamento della $u(x, t)$ su una caratteristica $t = \text{costante}$ non può decidere su tale possibilità.

L'autore ha dimostrato in altra sede⁽¹⁾ che una rappresentazione del tipo (5), per una soluzione $u(x, t)$ della (1), è possibile con $\omega(y)$ non decrescente, se e solo se è $u(x, t) \geq 0$ per $t \geq 0$. Possiamo ora caratterizzare in altro modo questa classe di funzioni, basandoci sul comportamento di $u(x, t)$ su una singola retta $x = \text{costante}$.

TEOREMA 4. - *Se è $u(x, t) \in H$ per $t > 0$, $u(0, t) = f(t)$, $u_x(0, t) = g(t)$, allora sarà $u(x, t) \geq 0$ per $t > 0$ quando e solo quando le due funzioni $[f(1/t) \pm g^{(-1/2)}(1/t)] \cdot t^{-1/2}$ sono completamente monotone per $t > 0$ ed inoltre*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \sqrt{t} g^{(-1/2)}(t) = 0.$$

Ricordiamo che una funzione $F(t)$ è completamente monotona per $t > 0$ se ivi è $(-1)^k F^{(k)}(t) \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$; per un teorema di S. Bernstein, ogni siffatta funzione ha la forma

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-ty} d\alpha(y),$$

dove $\alpha(y)$ è non decrescente. La $F(t)$ è assolutamente monotona, invece, se è non negativa con tutte le sue derivate.

Usando il teorema precedente, possiamo ricavare una condizione sufficiente perché sia $u(x, t) \geq 0$, di facile applicazione.

TEOREMA 5. - *Se è $u(x, t) \in H$ per $t > 0$, $u_x(0, t) = 0$, ed $u(0, t)$ assolutamente monotona per $t > 0$, allora si ha $u(x, t) \geq 0$ ivi.*

Registriamo infine il seguente risultato collaterale.

TEOREMA 6. - *Se $f(t)$ è assolutamente monotona per $t > 0$, allora $(\cosh x \sqrt{D})f(t)$ appartiene ad H ed è non negativa per $t > 0$.*

Per esempio, se $f(t) = e^t$, allora $(\cosh x \sqrt{D})f(t)$ è la ben nota soluzione $e^t \cosh x$. Giacché ogni iterata di e^t è assolutamente monotona, si vede che esistono temperature positive, crescenti sulla retta $x = \text{costante}$ con rapidità comunque elevata.

La dimostrazione di questi risultati comparirà in una Memoria in corso di stampa nel tomo 42° (Serie IV) degli « Annali di Matematica ».

(1) D. V. WIDDER, *Positive temperatures on an infinite rod*, in « Transactions of the American Mathematical Society », vol. 55, 1944, pp. 85-95.

Analisi matematica. — *Sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente* (*). Nota di ALDO GHIZZETTI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Usando un metodo analogo a quello stabilito in una Nota precedente nel caso dei coefficienti di Fourier-Stieltjes ⁽¹⁾, mi propongo di dare qui le condizioni necessarie e sufficienti affinché un'assegnata successione di numeri reali c_0, c_1, c_2, \dots sia quella dei coefficienti di Legendre-Stieltjes

$$(1) \quad c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(x) d\alpha(x), \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

di una funzione $\alpha(x)$ non decrescente.

Nei nn. 1, 2 esporrò alcune considerazioni preliminari; nel n. 3 il teorema che assegna le predette condizioni.

1. Accanto ai coefficienti c_k definiti da (1) conviene introdurre altri numeri b_0, b_1, b_2, \dots definiti dalla formula seguente (ove si è posto $\theta = \arccos x$, $0 \leq \theta \leq \pi$):

$$(2) \quad b_k = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cos k\theta d\alpha(x), \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Questi numeri b_k si esprimono linearmente per mezzo dei coefficienti c_k . Si ha infatti

$$(3) \quad \begin{cases} b_0 = c_0 \\ b_k = -k \sum_{r=0}^{[k/2]} \frac{(2k-2r-2)!!}{(2r)!!} \cdot \frac{(2r-3)!!}{(2k-2r+1)!!} c_{k-2r}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \end{cases}$$

come segue immediatamente dalla nota relazione ⁽²⁾

$$(4) \quad \cos k\theta = -k \sum_{r=0}^{[k/2]} \frac{(2k-2r-2)!!}{(2r)!!} \cdot \frac{(2r-3)!!}{(2k-2r+1)!!} (2k-4r+1) P_{k-2r}(x),$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) Vedi A. GHIZZETTI, *Sui coefficienti di Fourier-Stieltjes di una funzione non decrescente*, (questi « Rendiconti », maggio 1956).

(2) Vedi per esempio E. W. HOBSON, *Theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge 1931, p. 47 (ove però la (4) è scritta in modo diverso). Nella (4) il simbolo $[k/2]$ indica la parte intera di $k/2$. Per la validità della (4) occorre poi convenire che sia $0!! = 1$, $(-1)!! = 1$, $(-3)!! = -1$.

Si trova per esempio

$$b_1 = \frac{1}{3} c_1, \quad b_2 = \frac{4}{15} c_2 - \frac{1}{3} c_0, \quad b_3 = \frac{8}{35} c_3 - \frac{1}{5} c_1, \quad b_4 = \frac{64}{315} c_4 - \frac{16}{105} c_2 - \frac{1}{15} c_0,$$

Viceversa i coefficienti c_k possono esprimersi linearmente per mezzo dei b_k . Basta tener presente che

$$(5) \quad P_k(x) = 2(-1)^k \sum_{r=0}^{[k/2]} \delta_{k-2r} \left(-\frac{1}{2} \right)_r \left(-\frac{1}{2} \right)_{k-r} \cos(k-2r)\theta, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

per ottenere

$$(6) \quad c_k = 2(-1)^k (2k+1) \sum_{r=0}^{[k/2]} \delta_{k-2r} \left(-\frac{1}{2} \right)_r \left(-\frac{1}{2} \right)_{k-r} b_{k-2r}, \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

2. Consideriamo due equazioni algebriche, coniugate fra loro:

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k z^k = 0, \quad \sum_{k=0}^n \bar{\lambda}_k \bar{z}^k = 0,$$

ed indichiamo con $\nu \geq 0$ il numero delle radici distinte comuni alle due equazioni e situate sulla semicirconferenza $|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi$. Vogliamo determinare il massimo valore possibile per ν .

Distinguiamo tre casi secondoché fra le radici comuni figurino due, o uno, o nessuno dei numeri 1 e -1 . Poiché l'esistenza di una radice comune z_0 sulla semicirconferenza aperta $|z| = 1, 0 < \arg z < \pi$ implica l'esistenza dell'altra radice comune \bar{z}_0 (diversa da z_0), è chiaro che deve essere:

$$\text{nel } 1^\circ \text{ caso: } 2(\nu - 2) + 2 \leq n \quad \text{ossia} \quad \nu \leq \frac{n+2}{2},$$

$$\text{» } 2^\circ \text{ » : } 2(\nu - 1) + 1 \leq n \quad \text{»} \quad \nu \leq \frac{n+1}{2},$$

$$\text{» } 3^\circ \text{ » : } 2\nu \leq n \quad \text{»} \quad \nu \leq \frac{n}{2}.$$

Ne segue facilmente che, se n è pari, il massimo valore possibile per ν è $n/2 + 1$, ma tale massimo può essere raggiunto solo (nel 1° caso, cioè) se fra le radici comuni figurano entrambi i numeri 1 e -1 ; mentre, se n è dispari, tale massimo è $(n+1)/2$ e può essere raggiunto solo (nel 1° o nel 2° caso, cioè) se fra le radici comuni figura almeno uno dei due numeri 1 e -1 .

3. Per enunciare nel modo più semplice il nostro teorema, conviene introdurre la seguente locuzione. Diremo che una funzione $\alpha(x)$ non decrescente in $(-1, 1)$ è *del tipo* (r, s) quando essa è funzione di ripartizione di $r+s$ masse positive concentrate in altrettanti punti di $(-1, 1)$, di cui r situati

(3) Nella (5) si è posto $\delta_i = 1/2$ per $i=0$; $=1$ per $i>0$.

agli estremi di tale intervallo e s interni ad esso. Ovviamente r può assumere solo i valori $0, 1, 2$ e le funzioni del tipo $(0, 0)$ sono le costanti.

Ciò premesso, dimostriamo il teorema seguente:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una data successione $\{c_k\}$ di numeri reali sia la successione dei coefficienti di Legendre-Stieltjes di una $\alpha(x)$ non decrescente, è che, costruita la corrispondente successione $\{b_k\}$ definita dalle (3) e posto

$$D_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_k \\ b_1 & b_0 & b_1 & \dots & b_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_0 \end{vmatrix}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

si verifichi uno dei seguenti due casi:

I) *per un certo intero $n \geq 0$ si ha $D_k > 0$ (per $k = 0, 1, \dots, n-1$); $D_k = 0$ (per $k \geq n$);*

II) *tutti i determinanti D_k sono positivi.*

Il caso I si verifica se e solo se la $\alpha(x)$ è del tipo $(0, n/2)$ oppure $(2, n/2 - 1)$, se n è pari; del tipo $[1, (n-1)/2]$, se n è dispari.

Dim. — La condizione è necessaria. Sia $\alpha(x)$ non decrescente in $(-1, 1)$. Per ogni intero $n \geq 0$ consideriamo la seguente forma hermitiana nelle $n+1$ variabili complesse $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$H_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \left\{ \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{ik\theta} \right|^2 + \left| \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{-ik\theta} \right|^2 \right\} d\alpha(x) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n \lambda_h \bar{\lambda}_k \int_{-1}^1 \cos(h-k)\theta d\alpha(x),$$

ed osserviamo che, in virtù della (2), si può anche scrivere

$$(7) \quad H_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{h=0}^n \sum_{k=0}^n b_{h-k} \lambda_h \bar{\lambda}_k.$$

Ovviamente la H_n è definita o semidefinita positiva; esaminiamo sotto quali condizioni può essere semidefinita. È evidente che può risultare $H_n = 0$, per valori non tutti nulli delle λ_k , solo se $\alpha(x)$ è funzione di ripartizione di masse positive concentrate in quei punti x di $(-1, 1)$ che corrispondono a valori di θ verificanti le due equazioni $\sum_{k=0}^n \lambda_k e^{ik\theta} = 0$, $\sum_{k=0}^n \lambda_k e^{-ik\theta} = 0$. Dalla discussione svolta al n. 2 risulta che il numero di questi punti x può essere

$$(8) \quad 0, 1, 2, \dots, \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1 \quad (\text{se } n \text{ è pari}),$$

$$(9) \quad 0, 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2} \quad (\text{se } n \text{ è dispari}),$$

con la precisazione che l'ultimo valore indicato in (8) [oppure in (9)] può presentarsi soltanto se fra i predetti punti x figurano entrambi i punti 1 e -1 [oppure uno almeno di essi]. Ne segue immediatamente che risulta $H_n = 0$ (per opportuni valori delle λ_k) solo se la $\alpha(x)$ è di uno dei seguenti tipi:

$$(10) \quad (0, 0); (1, 0), (0, 1); (2, 0), (1, 1), (0, 2); \dots$$

$$\dots; \left(2, \frac{n}{2} - 2\right), \left(1, \frac{n}{2} - 1\right), \underline{\left(0, \frac{n}{2}\right)}; \underline{\left(2, \frac{n}{2} - 1\right)}, \quad (\text{se } n \text{ è pari}),$$

$$(11) \quad (0, 0); (1, 0), (0, 1); (2, 0), (1, 1), (0, 2); \dots$$

$$\dots; \left(2, \frac{n-5}{2}\right), \left(1, \frac{n-3}{2}\right), \left(0, \frac{n-1}{2}\right); \left(2, \frac{n-3}{2}\right), \underline{\left(1, \frac{n-1}{2}\right)}, \quad (\text{se } n \text{ è dispari}),$$

ed è pure immediato riconoscere che, passando da $n-1$ a n , si presentano come tipi nuovi i due sottolineati in (10) (se n è pari), quello sottolineato in (11) (se n è dispari).

Perciò se $\alpha(x)$ non è funzione di ripartizione di un numero finito di masse positive, tutte le forme H_n sono definite positive onde, ricordando la (7), resta stabilito che tutti i determinanti D_k sono positivi.

Se invece $\alpha(x)$ è del tipo (r, s) , basta guardare le (10), (11) per accorgersi che:

se $r = 0$, risultano definite le forme $H_0, H_1, \dots, H_{2s-1}$ (onde si ha $D_0 > 0, D_1 > 0, \dots, D_{2s-1} > 0$), mentre risultano semidefinite le H_{2s}, H_{2s+1}, \dots (onde si ha $D_{2s} = 0, D_{2s+1} = 0, \dots$);

se $r = 1$, risultano definite le forme H_0, H_1, \dots, H_{2s} (onde si ha $D_0 > 0, D_1 > 0, \dots, D_{2s} > 0$), mentre risultano semidefinite le $H_{2s+1}, H_{2s+2}, \dots$ (onde si ha $D_{2s+1} = 0, D_{2s+2} = 0, \dots$);

se $r = 2$, risultano definite le forme $H_0, H_1, \dots, H_{2s+1}$ (onde si ha $D_0 > 0, D_1 > 0, \dots, D_{2s+1} > 0$), mentre risultano semidefinite le $H_{2s+2}, H_{2s+3}, \dots$ (onde si ha $D_{2s+2} = 0, D_{2s+3} = 0, \dots$).

Basta ora porre in questi tre casi rispettivamente $n = 2s, n = 2s + 1, n = 2s + 2$ per ottenere l'ultima affermazione del nostro enunciato.

La condizione è sufficiente. - Sia $\{c_k\}$ una successione verificante uno dei due casi contemplati dall'enunciato del teorema (onde in particolare si ha $b_0 \geq 0$). Le forme hermitiane $H_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ($n = 0, 1, 2, \dots$), sono tutte definite o semidefinite positive; ne segue che le funzioni

$$(12) \quad \sigma_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sin \theta} H_n \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{n+1}}, \dots, \frac{e^{ni\theta}}{\sqrt{n+1}} \right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

sono *non negative* in $(-1, 1)$ e quindi che le

$$(13) \quad \alpha_n(x) = \int_{-1}^x \sigma_n(t) dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

sono *non decrescenti* in tale intervallo. Facciamo vedere che queste $\alpha_n(x)$ sono *equilimitate* in $(-1, 1)$.

Infatti, tenuto conto che la (7) può anche scriversi

$$H_n(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = b_0 \sum_{k=0}^n |\lambda_k|^2 + \sum_{l=1}^n b_l \sum_{k=0}^{n-l} (\lambda_k \bar{\lambda}_{k+l} + \bar{\lambda}_k \lambda_{k+l}),$$

si ricava facilmente dalla (12)

$$(14) \quad \sigma_n(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sin \theta} \left(b_0 + 2 \sum_{l=1}^n \frac{n-l+1}{n+1} b_l \cos l\theta \right),$$

e successivamente dalla (13)

$$0 \leq \alpha_n(x) \leq \alpha_n(1) = \int_{-1}^1 \sigma_n(x) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sin \theta} \left(b_0 + 2 \sum_{l=1}^n \frac{n-l+1}{n+1} b_l \cos l\theta \right) \sin \theta d\theta = 2 b_0.$$

Allora, per un noto teorema di Helly, dalla successione $\{\alpha_n(x)\}$ si può estrarre una successione parziale $\{\alpha_{n_j}(x)\}$, ($j = 1, 2, \dots$), che in $(-1, 1)$ converga quasi ovunque verso una $\alpha(x)$ non decrescente:

$$(15) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha_{n_j}(x) = \alpha(x).$$

Dimostriamo che questa $\alpha(x)$ ha come coefficienti di Legendre-Stieltjes proprio gli assegnati numeri c_k , vale a dire che

$$(16) \quad \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(x) d\alpha(x) = c_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A tale scopo cominciamo a calcolare i coefficienti di Legendre-Stieltjes γ_{nk} di $\alpha_n(x)$. Si ha

$$\begin{aligned} \gamma_{nk} &= \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P_k(x) d\alpha_n(x) = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_n(x) P_k(x) dx = \\ &= \frac{2k+1}{2} \int_0^\pi \sigma_n(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} (2k+1) \int_0^\pi \left(b_0 + 2 \sum_{l=1}^n \frac{n-l+1}{n+1} b_l \cos l\theta \right) P_k(\cos \theta) d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} (2k+1) \sum_{l=0}^n \delta_l \frac{n-l+1}{n+1} b_l \int_0^\pi P_k(\cos \theta) \cos l\theta d\theta, \end{aligned}$$

ove δ_l ha il significato detto nella nota ⁽³⁾. Perciò, ricordando la nota formula

$$\int_0^\pi P_k(\cos \theta) \cos l\theta d\theta \left\{ \begin{array}{l} = (-1)^k \pi \binom{-\frac{1}{2}}{r} \binom{-\frac{1}{2}}{k-r} \quad \text{se } l = k - 2r; \quad r = 0, 1, \dots, \left[\frac{k}{2}\right] \\ = 0 \quad \text{in ogni altro caso,} \end{array} \right.$$

e ponendo $l = k - 2r$ nell'ultima sommatoria, si vede che risulta

$$(17) \quad \gamma_{nk} = 2(-1)^k (2k + 1) \sum_{\substack{0 \leq r \leq [k/2] \\ r \geq (k-n)/2}} \delta_{k-2r} \frac{n-k+2r+1}{n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{r} \binom{-\frac{1}{2}}{k-r} b_{k-2r}.$$

Passiamo ora a calcolare il $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nk}$. Possiamo nella (17) già supporre $n > k$ e scrivere

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nk} &= 2(-1)^k (2k + 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{[k/2]} \delta_{k-2r} \frac{n-k+2r+1}{n+1} \binom{-\frac{1}{2}}{r} \binom{-\frac{1}{2}}{k-r} b_{k-2r} = \\ &= 2(-1)^k (2k + 1) \sum_{r=0}^{[k/2]} \delta_{k-2r} \binom{-\frac{1}{2}}{r} \binom{-\frac{1}{2}}{k-r} b_{k-2r}, \end{aligned}$$

vale a dire, ricordando la (6)

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nk} = c_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

In base alle (15), (18) è ovvio che la nostra tesi (16) si può porre sotto la forma

$$(19) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 P_k(x) d[\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)] = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Integrando per parti e tenendo conto che $\alpha_n(-1) = \alpha(-1) = 0$, $\alpha_n(1) = \alpha(1) = 2b_0$, si ricava

$$\int_{-1}^1 P_k(x) d[\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)] = - \int_{-1}^1 P'_k(x) [\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)] dx.$$

Poiché $|P'_k(x) [\alpha_{n_j}(x) - \alpha(x)]| \leq 2b_0 |P'_k(x)|$ si può passare al limite, per $j \rightarrow \infty$, sotto il segno d'integrale ed ottenere, in virtù di (15), la tesi (19).

È da osservare infine che, se i numeri assegnati $\{c_k\}$ verificano il caso I dell'enunciato, la costruzione della $\alpha(x)$ si può compiere anche per altra via, puramente algebrica; ma non insistiamo su ciò perché il problema equivale ad uno classico, relativo ai momenti di una distribuzione discontinua di masse.

Analisi matematica. — *Su una generalizzazione del problema di Poisson* (*). Nota di FERNANDO BERTOLINI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Da lungo tempo l'Analisi si occupa di generalizzazioni di vario genere dei classici problemi « al contorno », « di Cauchy », eccetera; alcune di queste, impiegando l'integrale di Stieltjes, offrono la possibilità di unificare metodi e teorie sin qui ben distinti, come quelli delle equazioni a derivate parziali e quelli delle differenze finite, e presentano perciò un grande interesse (***). È mia intenzione presentare su questo argomento una Memoria, ora in corso di elaborazione; nella presente Nota mi limito a considerare, a titolo d'esempio, un caso particolarmente semplice: quello della equazione di Poisson nello spazio ordinario; il metodo adottato, dovuto essenzialmente a G. C. Evans, può essere esteso senza difficoltà al caso delle equazioni di tipo ellittico, di secondo ordine, in qualunque numero di variabili, come mostrerò in una Nota successiva. I teoremi I e II della presente Nota, o meglio i loro analoghi nel piano, sono stati dimostrati da G. C. Evans: il I con dimostrazione analoga a quella da me riportata, il II con dimostrazione del tutto diversa.

1. Indicheremo con A un campo (= insieme aperto connesso) fissato dello spazio ordinario, con P, Q, M punti generici di A , con $\{I\}$ la classe degli intervalli (tridimensionali) I contenuti in A , con $\{B\}$ la classe dei boreliani B contenuti in A , con $\{S\}$ la classe delle superficie quadrabili S che sono completa frontiera d'un campo $C(S)$ limitato contenuto in A , formate da un numero finito di facce di classe 2, per le quali gli integrali di superficie

$$\int_S \left| \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{I}{PQ} \right| d_P \sigma, \quad \int_S \frac{d_P \sigma}{PQ}$$

risultino funzioni limitate del punto Q . La misura lebesghiana di $B \in \{B\}$ sarà $\tau(B)$, e $d\tau$ indicherà l'elemento di volume; data una superficie S , $d\sigma$ ne indicherà l'elemento d'area, ed n_P il versore normale interno (se esiste) relativo al punto P .

Assegnata una funzione d'insieme $\mu(B)$, completamente additiva ed a variazione limitata (=CAVL) su $\{B\}$, porremo

$$\tilde{\mu}(S) = \int_A d_Q \mu \frac{I}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{I}{PQ} d_P \sigma$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(***) Sono lieto di ringraziare il prof. G. Fichera, per aver richiamato la mia attenzione su questo argomento.

per ogni superficie $S \in \{S\}$. È evidente che $\tilde{\mu}(\mathcal{F}I)$ è una funzione di intervallo additiva ed a variazione limitata (=AVL) sulla famiglia $\{I\}$, e che i concetti di sommabilità e di integrale rispetto alla *funzione determinante* $\tilde{\mu}(\mathcal{F}I)$ sono equivalenti rispettivamente a quelli di sommabilità e di integrale rispetto alla *funzione misura* $\mu(B)$. Le frasi «sommabile rispetto alla misura $\mu(B)$ » e «assolutamente continua rispetto alla misura $\mu(B)$ » verranno abbreviate in « μL » e « μAC », rispettivamente.

Data in A una funzione (reale) $f(P)$, σL su qualunque superficie $S \in \{S\}$, se la funzione (vettoriale)

$$\int_S f(P) n_P d\sigma$$

del campo $C(S)$ è (additiva) e τAC , diremo, con G.C. Evans, che $f(P)$ è dotato di gradiente (generalizzato), e chiameremo gradiente di $f(P)$ qualunque funzione (vettoriale), che sia τL su ogni $C(S)$, $S \in \{S\}$, e verifichi la relazione

$$\int_{C(S)} \text{grad} f(P) d\tau + \int_S f(P) n_P d\sigma = 0, \quad S \in \{S\}.$$

Le componenti cartesiane di $\text{grad} f(P)$ si chiameranno derivate parziali (generalizzate) di $f(P)$.

2. Assegnata una funzione d'insieme $\alpha(B)$, $CAVL$ su $\{B\}$, consideriamo l'equazione

$$(1) \quad \int_S \frac{\partial u}{\partial n_P} d\sigma = \tilde{\alpha}(S), \quad S \in \{S\},$$

nella incognita $u(P)$; questa dovrà appartenere alla classe Γ , delle funzioni τL su qualunque intervallo ICA , dotate di gradiente, tali che $\partial u / \partial n_P$ sia σL su qualunque superficie $S \in \{S\}$. La (1) è una ovvia generalizzazione della equazione di Poisson $\Delta_2 u = \varphi$.

Sussiste il teorema fondamentale:

I. - *Le funzioni di classe Γ verificanti la (1) sono tutte e sole quelle date dalla formula*

$$(2) \quad u(P) = u_0(P) + u_1(P), \quad P \in A,$$

dove $u_1(P)$ è τ -quasi ovunque eguale ad una funzione armonica (arbitraria) in A , ed è

$$(3) \quad u_0(P) = \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{d_Q \alpha}{PQ}.$$

Inoltre, per il gradiente di $u_0(P)$ si ha

$$(4) \quad \text{grad} u_0(P) = \frac{1}{4\pi} \int_A \text{grad}_P \frac{1}{PQ} d_Q \alpha.$$

La dimostrazione che $u_0(P)$ appartiene alla classe Γ e che verifica le (1) e (4), si consegue immediatamente in virtù del teorema di Fubini e delle proprietà ammesse per le superficie della classe $\{S\}$. Dalle

$$\int_A |d_Q \alpha| \int_{C(S)} \frac{d_P \tau}{PQ} < +\infty, \quad \int_A |d_Q \alpha| \int_S \frac{d_P \sigma}{PQ} < +\infty,$$

$$\int_A |d_Q \alpha| \int_{C(S)} \left| \text{grad}_P \frac{1}{PQ} \right| d_P \tau < +\infty$$

segue che $u_0(P)$ è τL su ogni $C(S)$ e σL su ogni $S (S \in \{S\})$, e che la funzione

$$g(P) = \frac{1}{4\pi} \int_A \text{grad}_P \frac{1}{PQ} d_Q \alpha$$

è τL su ogni $C(S)$; quindi

$$\int_{C(S)} g(P) d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_{C(S)} d_P \tau \int_A \text{grad}_P \frac{1}{PQ} d_Q \alpha =$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_A d_Q \alpha \int_{C(S)} \text{grad}_P \frac{1}{PQ} d_P \tau = - \frac{1}{4\pi} \int_A d_Q \alpha \int_S \frac{n_P}{PQ} d_P \sigma = - \int_S u_0(P) n_P d_P \sigma,$$

ciò che dimostra, assieme alla (4), che $u_0(P)$ è dotata di gradiente; infine dalla

$$\int_A d_Q \alpha \int_S \left| \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} \right| d_P \sigma < +\infty$$

segue che $\frac{\partial}{\partial n_P} u_0(P)$ è σL su ogni $S \in \{S\}$, e quindi che $u_0(P)$ verifica la (1).

Poiché certo $u_1(P)$ è di classe Γ e verifica la

$$(5) \quad \int_S \frac{\partial u_1}{\partial n_P} d\sigma = 0, \quad S \in \{S\},$$

la parte diretta del teorema è dimostrata. Per dimostrare la parte inversa, basta osservare che, se $u(P)$ è una funzione della classe Γ verificante la (1), allora $u_1(P) = u(P) - u_0(P)$ è anch'essa di classe Γ e verifica la (5): tanto basta a provare che $u_1(P)$ è in A τ -quasi ovunque eguale ad una funzione armonica ⁽¹⁾.

(1) Vedi G. C. EVANS, *Fundamental points of Potential Theory*, in «The Rice Institute Pamphlet», 7, p. 252 e sgg. (1920). In questo lavoro vengono introdotte le derivate generalizzate di cui s'è fatto parola, ne vengono discusse le proprietà fondamentali, e quindi, col loro ausilio, si costruisce una teoria dei potenziali nel piano, della quale fanno parte anche i teoremi I e II della presente Nota (quest'ultimo con altra dimostrazione), o meglio, i loro analoghi nel piano. Ritengo questa teoria suscettibile di feconde estensioni, ed applicazioni, alle equazioni differenziali a derivate parziali più generali, in quante si vogliono variabili, e di ciò intendo occuparmi in altra sede.

3. Veniamo ora alla seguente estensione del lemma di Green.

II. - *Date due funzioni d'insieme $\alpha(B)$ e $\beta(B)$, CAVL su $\{B\}$, e due funzioni $u_1(P)$ e $v_1(P)$ armoniche in A , poniamo*

$$(6) \quad u(P) = \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{d_Q \alpha}{PQ} + u_1(P) \quad , \quad v(P) = \frac{1}{4\pi} \int_A \frac{d_Q \beta}{PQ} + v_1(P).$$

Se la funzione $1/\overline{MQ}$ della coppia (M, Q) è $(\alpha\beta)L$ su $A \times A$, allora le funzioni $v(P) \frac{\partial}{\partial n} u(P)$ e $u(P) \frac{\partial}{\partial n} v(P)$ sono σL su ogni $S \in \{S\}$, la funzione $\text{grad } u(P) \times \text{grad } v(P)$ è τL su ogni $C(S)$, e posto

$$(7) \quad v(B) = \int_B v(P) d\alpha \quad , \quad u(B) = \int_B u(P) d\beta \quad , \quad B \in \{B\},$$

si ha

$$(8) \quad \int_S v(P) \frac{\partial}{\partial n_P} u(P) d_P \sigma + \int_{C(S)} \text{grad}_P u(P) \times \text{grad}_P v(P) d_P \tau = \tilde{v}(S),$$

$$(9) \quad \int_S u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} v(P) d_P \sigma + \int_{C(S)} \text{grad}_P u(P) \times \text{grad}_P v(P) d_P \tau = \tilde{u}(S),$$

$$(10) \quad \int_S \left[v(P) \frac{\partial}{\partial n_P} u(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} v(P) \right] d_P \sigma = \tilde{v}(S) - \tilde{u}(S),$$

per ogni $S \in \{S\}$.

Per la simmetria delle ipotesi, si può fare a meno di dimostrare la (9); la (10) poi si deduce dalle (8) e (9): dimostreremo dunque la sola (8).

Sia S una fissata superficie della classe $\{S\}$. Le funzioni

$$\overline{MQ} \cdot \int_S \left| \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PM} \right| d_P \sigma \quad , \quad \overline{MQ} \cdot \int_{C(S)} \left| \text{grad}_P \frac{1}{PQ} \times \text{grad}_P \frac{1}{PM} \right| d_P \tau$$

della coppia (M, Q) sono limitate, quindi si ha

$$\int_A |d_M \alpha| \int_A |d_Q \beta| \int_S \left| \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PM} \right| d_P \sigma < +\infty,$$

$$\int_A |d_M \alpha| \int_A |d_Q \beta| \int_{C(S)} \left| \text{grad}_P \frac{1}{PQ} \times \text{grad}_P \frac{1}{PM} \right| d_P \tau < +\infty,$$

per l'ipotesi ammessa sulla funzione $1/\overline{MQ}$; d'altra parte si ha, elementarmente

$$(11) \quad \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PM} d_P \sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\dot{C}(S)} \text{grad}_P \frac{1}{PQ} \times \text{grad}_P \frac{1}{PM} d_P \tau =$$

$$\frac{1}{MQ} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PM} d_P \sigma,$$

ciò che dimostra la (8) nel caso particolare che sia $u_i(P) \equiv v_i(P) \equiv 0$, per il teorema di Fubini. L'altro caso particolare che sia $\alpha(B) \equiv \beta(B) \equiv 0$ è elementare. Infine, avendosi elementarmente

$$(12) \quad \frac{1}{4\pi} \int_S v_i(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} d_P \sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\dot{C}(S)} \text{grad}_P v_i(P) \times \text{grad}_P \frac{1}{PQ} d_P \tau =$$

$$v_i(Q) \cdot \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} d_P \sigma,$$

$$(13) \quad \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} u_i(P) d_P \sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\dot{C}(S)} \text{grad}_P \frac{1}{PQ} \times \text{grad}_P u_i(P) d_P \tau = 0,$$

si deduce, per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \tilde{v}(S) &= \int_A v_i(Q) d_Q \alpha \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} d_P \sigma = \\ &= \int_A d_Q \alpha \left[\frac{1}{4\pi} \int_S v_i(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} d_P \sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\dot{C}(S)} \text{grad}_P v_i(P) \times \text{grad}_P \frac{1}{PQ} d_P \tau \right] = \\ &= \int_S v_i(P) \frac{\partial}{\partial n_P} u_o(P) d_P \sigma + \int_{\dot{C}(S)} \text{grad}_P v_i(P) \times \text{grad}_P u_o(P) d_P \tau, \\ 0 &= \int_A d_Q \beta \left[\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} u_i(P) d_P \sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{\dot{C}(S)} \text{grad}_P \frac{1}{PQ} \times \text{grad}_P u_i(P) d_P \tau \right] = \\ &= \int_S v_o(P) \frac{\partial}{\partial n_P} u_i(P) d_P \sigma + \int_{\dot{C}(S)} \text{grad}_P v_o(P) \times \text{grad}_P u_i(P) d_P \tau, \end{aligned}$$

ciò che dimostra la (8) nei due casi particolari $u_i(P) \equiv 0$, $\beta(B) \equiv 0$ e risp. $\alpha(B) \equiv 0$, $v_i(P) \equiv 0$. Il caso generale si ottiene da quelli ora trattati, decomponendo in somma le funzioni $u(P)$ e $v(P)$, come dalla (6).

È anche evidente dalla dimostrazione fatta, che la (10) è valida anche ponendo $\mathfrak{F}A$ in luogo di S , purché: (i) A sia di classe $\{S\}$, (ii) le $u_i(P)$ e $v_i(P)$ siano risp. βL e αL su A , e prolungabili coi loro gradienti su tutto $A + \mathfrak{F}A$ in modo tale che (iii) gli integrali

$$\int_S \left\{ \left| u_i(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} \right| + \left| \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} u_i(P) \right| \right\} d_P \sigma$$

e

$$\int_S \left\{ \left| v_1(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} \right| + \left| \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} v_1(P) \right| \right\} d_P \sigma$$

riescano risp. βL e αL su A , e (iv) si abbia

$$\int_{\mathcal{F}A} \left[u_1(P) \frac{\partial}{\partial n} v_1(P) - v_1(P) \frac{\partial}{\partial n} u_1(P) \right] d\sigma = 0,$$

$$v_1(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[v_1(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} - \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} v_1(P) \right] d_P \sigma,$$

$$u_1(Q) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[u_1(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} - \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} u_1(P) \right] d\sigma, \quad \text{per } Q \in A.$$

4. I teoremi ora dimostrati consentono una notevole estensione della applicabilità dei metodi risolutivi per i problemi al contorno, basati sul teorema di reciprocità e dovuti a M. Picone. Prendiamo ad esempio il problema di Dirichlet, supponendo la frontiera di A di classe $\{S\}$.

Data la funzione d'insieme $\alpha(B)$, CAVL su $\{B\}$, ed una funzione $U(P)$, τL su A , cerchiamo di determinare (se esiste) una funzione $u(P)$ del tipo (2), definita in tutto $A + \mathcal{F}A$, e tale che:

(a) si ha

$$(14) \quad u(P) = U(P) \quad \text{per } P \text{ } \sigma\text{-quasi ovunque su } \mathcal{F}A,$$

(b) $u_1(P)$ è τL su A e σL su $\mathcal{F}A$, $\text{grad } u_1(P)$ è τL su A e si può prolungare su $\mathcal{F}A$ in modo tale, che $\frac{\partial}{\partial n} u_1(P)$ sia σL su $\mathcal{F}A$, risultando

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{F}A} \left[u_1(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} - \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} u_1(P) \right] d_P \sigma = u_1(Q) \quad \text{per } Q \in A,$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{F}A} \left[u_1(P) \frac{\partial}{\partial n} w(P) - w(P) \frac{\partial}{\partial n} u_1(P) \right] d_P \sigma = 0,$$

per ogni funzione $w(P)$ armonica in un campo contenente $A + \mathcal{F}A$, e risultando

$$\int_{\mathcal{F}A} \left\{ \left| u_1(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} \right| + \left| \frac{1}{PQ} \frac{\partial}{\partial n_P} u_1(P) \right| \right\} d_P \sigma$$

e

$$\int_{\mathcal{F}A} \left\{ \left| u_1(P) \frac{\partial}{\partial n_P} w(P) \right| + \left| w(P) \frac{\partial}{\partial n_P} u_1(P) \right| \right\} d_P \sigma$$

σL su A .

Per ogni funzione $f(P)$ di classe 2 in un campo contenente $A + \mathfrak{F}A$, avremo allora (cfr. la (10))

$$(15) \quad \int_{\mathfrak{F}A} \left[f(P) \frac{\partial}{\partial n} u(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n} f(P) \right] d_P \sigma = \int_A f(P) d\alpha(B) - \int_A u(P) \Delta_2 f(P) d_P \tau.$$

Consideriamo ora una successione $\{w_k(P)\}$ di funzioni armoniche in un campo $A' \supset A + \mathfrak{F}A$, la quale sia completa per l'approssimazione lineare puntuale uniforme del primo ordine delle funzioni armoniche in $A + \mathfrak{F}A$; per la (15), avremo

$$(16) \quad \int_{\mathfrak{F}A} w_k(P) \frac{\partial}{\partial n} u(P) d\sigma = \int_A w_k(P) d\alpha + \int_{\mathfrak{F}A} U(P) \frac{\partial}{\partial n} w_k(P) d\sigma,$$

è questo vale ad individuare $\frac{\partial}{\partial n} u(P)$ su σ -quasi tutto $\mathfrak{F}A$, in virtù di un teorema di completezza di G. Fichera ⁽²⁾.

Consideriamo infine una successione $\{p_k(P)\}$ di polinomi, che sia hilbertianamente completa su $A + \mathfrak{F}A$, ed accanto a questa un'altra successione $\{q_k(P)\}$ di polinomi verificanti la condizione $\Delta_2 q_k(P) = p_k(P)$; per la (15), allora, avremo

$$(17) \quad \int_A u(P) p_k(P) d\tau = \int_D q_k(P) d\alpha + \int_{\mathfrak{F}A} U(P) \frac{\partial}{\partial n} q_k(P) d\sigma - \int_{\mathfrak{F}A} q_k(P) \frac{\partial}{\partial n} u(P) d\sigma,$$

e questo basta per individuare quasi ovunque in A la funzione $u(P)$, la quale nelle nostre ipotesi è hilbertiana in A ⁽³⁾.

Nel caso che i due sistemi $\{w_k(P)\}$ e $\{p_k(P)\}$ siano ortonormali rispettivamente su $\mathfrak{F}A$ e su A , avremo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} u(P) &\stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^{\infty} w_k(P) \left[\int_A w_k(Q) d_Q \alpha + \int_{\mathfrak{F}A} U(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} w_k(Q) d_Q \sigma \right] \text{ su } \mathfrak{F}A, \\ u(P) &\stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(P) \left\{ \int_A q_k(Q) d_Q \alpha + \int_{\mathfrak{F}A} \left[U(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} q_k(Q) - q_k(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} u(Q) \right] d_Q \sigma \right\} \text{ su } A, \end{aligned}$$

(2) G. FICHERA, *Applicazione della teoria del potenziale di superficie ad alcuni problemi di analisi funzionale lineare*, in «Giornale di Matematiche di Battaglini», vol. 78, fasc. luglio-dicembre 1948, p. 77.

(3) La $u_1(P)$ è hilbertiana per ipotesi, $u_0(P)$ è hilbertiana perché A è limitato, e quindi l'integrale

$$\int_A \frac{d_P \tau}{PQ \cdot PM}$$

risulta limitato al variar di Q ed M in A .

e quindi .

$$(18) \quad u(P) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(P) \left\{ \int_A q_k(Q) dQ \alpha + \int_{\mathfrak{S}A} U(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} q_k(Q) dQ \sigma - \right. \\ \left. - \sum_{s=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{S}A} q_k(Q) w_s(Q) dQ \sigma \left[\int_A w_s(Q) dQ \alpha + \int_{\mathfrak{S}A} U(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} w_s(Q) dQ \sigma \right] \right\}.$$

5. Ancora un'osservazione. Il gradiente «generalizzato», e quindi la derivata normale «generalizzata» di una funzione che ne sia dotata, sono determinati a meno di un insieme di misura spaziale nulla, e quindi i teoremi I e II vanno intesi nel senso che i loro enunciati sono verificati per una certa determinazione dei gradienti «generalizzati» che vi figurano, determinazione che però non dipende da S . Perché sia lecita l'applicazione che ora abbiamo fatto al problema di Dirichlet, è essenziale perciò che la determinazione di $\frac{\partial}{\partial n} u$ che figura nelle (16) sia la stessa che figura nelle (17), e sia indipendente da k ; se si riesamina la dimostrazione della (15) — di cui le (16) e (17) son casi particolari — si vede subito che essa sussiste attribuendo a $\frac{\partial}{\partial n} f$ il suo significato proprio (non «generalizzato»), a $\frac{\partial}{\partial n} u_1(P)$ il valore ottenuto col prolungamento indicato in (b), a $\frac{\partial}{\partial n} u_0(P)$ il valore $\frac{1}{4\pi} \int_A \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{PQ} dQ \alpha$, e ciò comunque si sia assegnata la funzione $f(P)$.

Astronomia. — *La doppia ottica A.D.S. 10332.* Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. La stella doppia A.D.S. 10332 ($\alpha = 17^h 02^m,8$; $\delta = 28^\circ 09'$; equin. 1950) è probabilmente una doppia ottica; e cioè le due stelle che compongono il sistema apparirebbero vicine, solo perché si proietterebbero in due punti molto prossimi della sfera celeste, pur essendo in realtà assai distanti fra di loro. Il moto relativo di una stella rispetto all'altra sarebbe dovuto, in tal caso, non alla mutua attrazione, ma soltanto alla differenza dei due moti propri eliocentrici e risulterebbe quindi rettilineo.

Per tale motivo, gli astronomi hanno da tempo tralasciato di osservare il sistema in questione, sicché le osservazioni si arrestano al 1941. D'altra parte però non si può escludere *a priori* che si tratti di un sistema fisico in cui il periodo di rivoluzione del satellite sia grandissimo; e a tal proposito, ricordo come la 61 Cygni, già ritenuta come una doppia ottica, sia stata poi riconosciuta come una vera binaria di lungo periodo.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

Per tale ragione, mi propongo di studiare in questa Nota il moto relativo della stella meno luminosa, rispetto alla principale, onde poter decidere sulla natura del sistema doppio considerato.

2. Le osservazioni di cui ho fatto uso sono tratte dai Cataloghi del Burnham e dell'Aitken, mentre le più recenti mi sono state fornite dal prof. Muller dell'Osservatorio astronomico di Strasburgo. Le riporto tutte nella Tabella I, avvertendo che agli angoli di posizione ϑ ho apportato la correzione:

$$\Delta\vartheta = -0^{\circ},00611 \quad (1950 - t)$$

per tener conto dell'effetto dovuto alla precessione degli equinozi.

Valendomi di queste osservazioni ho eseguito innanzi tutto un esame grafico preliminare, disegnando tutte le posizioni della stella secondaria rispetto alla principale, ed ho trovato che queste posizioni si distribuiscono approssimativamente lungo una retta r inclinata sulla tangente al cerchio orario di $225^{\circ},8$. Ho poi riportato gli spazi percorsi — tratti dal primo grafico — in funzione del tempo, ottenendo ancora una retta. Tale relazione lineare che si verifica tra gli spazi percorsi ed il tempo, esclude l'ipotesi di un moto orbitale, mentre ovviamente la tangente dell'angolo formato dalla retta ottenuta e dall'asse delle ascisse, mi dà la grandezza del moto proprio annuo, che è risultata di $0'',1461$.

Ho cercato poi le equazioni del moto della stella satellite, in un sistema di coordinate, avente l'origine nella stella principale S e per assi x ed y rispettivamente la tangente al cerchio orario diretta verso nord e la tangente al parallelo della sfera celeste diretta verso est.

A tal fine, conduciamo dall'origine S la perpendicolare alla retta r che approssima le posizioni della stella secondaria. Siano P il piede della perpendicolare e ϑ_0, ρ_0 le sue coordinate; chiamiamo inoltre con τ il tempo in cui il satellite si trovi in P ed infine con μ il moto relativo annuo. Se S' è una posizione qualsiasi del satellite, corrispondente al tempo t ed alle coordinate ϑ, ρ , dal triangolo rettangolo SS'P si ricava subito:

$$(1) \quad \rho \sin (\vartheta - \vartheta_0) = \mu (t - \tau)$$

$$(2) \quad \rho \cos (\vartheta - \vartheta_0) = \rho_0$$

donde risulta immediatamente:

$$(3) \quad \rho^2 = \rho_0^2 + \mu^2 (t - \tau)^2.$$

Nel presente caso, ricavando $\vartheta_0, \rho_0, \tau, \mu$ dai grafici precedentemente tracciati, ho avuto come prima approssimazione:

$$(4) \quad \rho \sin (\vartheta - 315^{\circ},8) = -0'',1461 (t - 1849,50)$$

$$(5) \quad \rho \cos (\vartheta - 315^{\circ},8) = 2'',29.$$

TABELLA I.

t	ϑ eq. 1950	ρ	Autore	t	ϑ eq. 1950	ρ	Autore	t	ϑ eq. 1950	ρ	Autore
1929,60	10°, 66	3'', 83	Struve	1874,99	257°, 64	4'', 21	Dembowski	1905,20	242°, 03	8'', 27	Burnham
1833,28	2, 89	3, 47	»	1877,01	255, 45	4, 52	»	1906,41	240, 93	8, 70	Doolittle, ecc.
1835,29	1, 10	3, 21	»	1880,08	252, 57	4, 99	Hall	1910,86	240, 26	9, 26	Doberck, Lau ecc.
1836,55	359, 51	3, 10	»	1881,90	251, 58	5, 40	»	1914,40	239, 98	9, 76	Doberck ecc.
1837,74	358, 61	3, 00	»	1884,05	251, 10	5, 61	»	1915,46	238, 19		Franks
1841,12	345, 14	2, 83	O. Struve	1886,17	248, 71	5, 84	»	1917,93	238, 60	10, 24	Pettit ecc.
1842,33	344, 04	2, 40	Challis ecc.	1887,86	248, 42	6, 12	Celoria, Nissen	1922,54	237, 53	10, 92	Chandon ecc.
1847,57	323, 97	2, 19	Q. Struve	1888,55	246, 83	6, 19	Hall	1924,46	238, 34	11, 38	Doberck
1850,00	313, 99	2, 25	»	1891,30	246, 84	6, 43	H. Struve	1925,54	236, 85	11, 34	Paloque
1851,97	306, 30	2, 19	»	1892,59	245, 25	6, 67	Comstock	1930,65	236, 88	12, 04	Baize
1855,10	295, 92	2, 29	»	1892,88	246, 05	6, 68	Celoria	1933,96	234, 80	12, 60	Pokrowsky
1857,12	290, 13	2, 49	»	1895,19	244, 77	7, 20	Renz	1934,50	236, 41	12, 49	Baize
1861,63	280, 96	2, 97	»	1895,52	245, 17	7, 00	Comstock	1936,55	236, 22	12, 87	Duruy
1863,04	276, 27	3, 01	Dembowski	1897,58	244, 18	7, 45	Glaserapp	1939,39	236, 14	13, 44	Korbut
1865,09	272, 38	2, 98	»	1898,94	243, 29	7, 60	Barton	1939,56	235, 24	13, 25	Schmeidler
1867,04	268, 79	3, 26	»	1899,86	243, 19	7, 64	Cohn ecc.	1940,49	235, 54	13, 42	Pignatelli
1868,93	265, 61	3, 46	»	1900,61	242, 50	7, 80	Doolittle	1941,67	234, 95	13, 54	Baize
1870,95	262, 52	3, 77	»	1902,53	242, 11	8, 16	Gr. Obsy				
1872,97	260, 03	4, 02	»	1902,78	241, 71	8, 04	Postelmann ecc.				

3. Per procedere al miglioramento delle equazioni del moto, ho scelto poi sulle curve che danno l'andamento dei ϑ e dei ρ in funzione del tempo, *diciassette luoghi normali, a cui ho dato ugual peso* e per ciascuno di essi ho calcolato le effemeridi con la (4) e la (5). (Vedi Tabella II).

Ora, differenziando la (1) e la (2), si ottiene:

$$(6) \quad d\rho \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \rho (d\vartheta - d\vartheta_0) \cos(\vartheta - \vartheta_0) = d\mu (t - \tau) - \mu d\tau$$

$$(7) \quad d\rho \cos(\vartheta - \vartheta_0) - \rho (d\vartheta - d\vartheta_0) \sin(\vartheta - \vartheta_0) = d\rho_0.$$

Moltiplicando la (6) per $\sin(\vartheta - \vartheta_0)$, la (7) per $\cos(\vartheta - \vartheta_0)$ e sommando, abbiamo

$$(8) \quad d\rho = \cos(\vartheta - \vartheta_0) d\rho_0 + \sin(\vartheta - \vartheta_0) (t - \tau) d\mu - \sin(\vartheta - \vartheta_0) \mu d\tau.$$

Mentre moltiplicando la (6) per $\cos(\vartheta - \vartheta_0)$ e la (7) per $\sin(\vartheta - \vartheta_0)$, sottraendo e ordinando, si ricava:

$$(9) \quad \rho d\vartheta = \rho_0 d\vartheta_0 - \sin(\vartheta - \vartheta_0) d\rho + \cos(\vartheta - \vartheta_0) (t - \tau) d\mu - \cos(\vartheta - \vartheta_0) \mu d\tau.$$

Le (8) e (9), sono le equazioni di condizione.

Ciascun luogo normale dà quindi origine a due equazioni, in cui i $d\rho$ e $\rho d\vartheta$ (essendo $d\vartheta$ espresso in radianti) non sono altro che gli scarti tra le posizioni osservate e quelle calcolate, tramite le (4) e (5). Col metodo dei minimi quadrati, ho ridotto poi il sistema di 34 equazioni così ottenute, al seguente sistema normale:

$$\begin{array}{rcccccl} 995,1210 & d\vartheta_0 & + & 89,8666 & d\rho_0 & + & 14,1702 & d\mu' & + & 5,5921 & d\tau & = & 1,0548 \\ & & & 17,0000 & & + & 0,0000 & & + & 0,0000 & & = & -0,6963 \\ & & & & & & 426,4035 & & + & 0,9065 & & = & 0,0310 \\ & & & & & & & & & 0,3628 & & = & 0,1073 \end{array}$$

dove è stato posto $d\mu = d\mu'/100$.

La soluzione mi ha dato (ridotto $d\vartheta$ in gradi):

$$d\vartheta_0 = + 0^\circ,40 \pm 0^\circ,17 \quad ; \quad d\rho_0 = - 0'',08 \pm 0'',02 \quad ; \quad d\mu = 0'',0000 \pm 0'',0003 \quad ;$$

$$d\tau = + 0,19 \pm 0,11.$$

Le equazioni definitive del moto relativo della stella satellite S', rispetto all'astro principale S, sono dunque:

$$(10) \quad \rho \sin(\vartheta - 316^\circ,2) = -0,1461 (t - 1849,69)$$

$$(11) \quad \rho \cos(\vartheta - 316^\circ,2) = 2'',21.$$

essendo il tempo valutato in anni. La direzione del moto proprio, che differisce di 90° da ϑ_0 , è perciò $226^\circ,2$.

Ciò posto, nella Tabella II, le diverse colonne danno rispettivamente:

il tempo t , l'angolo di posizione ϑ ed il raggio vettore ρ , per ciascun luogo normale; gli scarti $O - C$ per gli angoli ed i raggi e le quantità $\rho \Delta\vartheta$, calcolati prima del miglioramento delle equazioni del moto, e indi gli analoghi scarti fra posizioni osservate e quelle calcolate mediante le (10) e (11).

TABELLA II.

Luoghi normali.

<i>t</i>	ϑ	ρ	Moto approssimato			Moto migliorato		
			$(O-C)_{\vartheta}$	$(O-C)_{\varrho}$	$\rho\Delta\vartheta$	$(O-C)_{\vartheta}$	$(O-C)_{\varrho}$	$\rho\Delta\vartheta$
1830	9°,9	3'',71	+ 3°,00	+ 0'',06	+ 0'',190	+ 1°,23	+ 0'',08	+ 0'',078
1837	356 ,1	2 ,97	+ 1 ,73	+ 0 ,04	+ 0 ,089	- 0 ,10	+ 0 ,09	- 0 ,005
1844	336 ,5	2 ,44	+ 1 ,37	+ 0 ,01	+ 0 ,058	- 0 ,32	+ 0 ,08	- 0 ,013
1851	310 ,0	2 ,22	- 0 ,33	- 0 ,08	- 0 ,013	- 1 ,25	0 ,00	- 0 ,048
1858	288 ,0	2 ,38	+ 0 ,67	- 0 ,22	+ 0 ,030	+ 0 ,58	- 0 ,14	+ 0 ,026
1865	272 ,2	3 ,00	+ 0 ,09	- 0 ,22	+ 0 ,005	+ 1 ,35	- 0 ,14	+ 0 ,074
1872	261 ,3	3 ,90	+ 0 ,63	- 0 ,11	+ 0 ,044	+ 0 ,98	- 0 ,04	+ 0 ,066
1879	253 ,5	4 ,82	- 0 ,28	- 0 ,06	- 0 ,024	0 ,00	0 ,00	0 ,000
1886	248 ,5	5 ,79	- 0 ,53	- 0 ,01	- 0 ,054	- 0 ,32	0 ,04	- 0 ,032
1893	245 ,3	6 ,72	- 0 ,32	- 0 ,03	- 0 ,037	- 0 ,15	+ 0 ,02	- 0 ,017
1900	243 ,0	7 ,74	- 0 ,05	+ 0 ,01	- 0 ,007	+ 0 ,07	+ 0 ,06	+ 0 ,009
1907	241 ,0	8 ,72	- 0 ,05	+ 0 ,01	- 0 ,008	0 ,00	+ 0 ,06	0 ,000
1914	239 ,7	9 ,74	+ 0 ,23	+ 0 ,04	+ 0 ,039	+ 0 ,27	+ 0 ,09	+ 0 ,045
1921	238 ,4	10 ,70	+ 0 ,23	+ 0 ,01	+ 0 ,043	+ 0 ,22	+ 0 ,05	+ 0 ,040
1928	237 ,1	11 ,69	0 ,00	0 ,00	0 ,000	0 ,00	+ 0 ,04	0 ,000
1935	236 ,2	12 ,69	0 ,00	0 ,00	+ 0 ,004	- 0 ,05	+ 0 ,02	- 0 ,011
1942	235 ,3	13 ,67	- 0 ,12	- 0 ,04	- 0 ,028	- 0 ,20	- 0 ,02	- 0 ,048

4. Se la stella meno luminosa fosse soggetta all'attrazione di quella più brillante e non procedesse con moto uniforme, gli scarti fra i luoghi normali osservati e quelli calcolati dovrebbero svelare il moto orbitale. In particolare, gli $O-C$ per i raggi vettori, dovrebbero essere dapprima negativi, poi positivi ed infine negativi, perché l'orbita apparente sarebbe una curva con la concavità rivolta verso la stella principale. Anche gli scarti per gli angoli - sebbene meno accentuati - dovrebbero mostrare una certa periodicità. Ora dall'esame, della Tabella II, risulta che ciò non si verifica per la A.D.S. 10332; comunque, onde togliere ogni incertezza, ho calcolato le effemeridi per tutte le osservazioni esistenti, e le ho paragonate con le misure. Gli scarti sono riportati nella Tabella III.

TABELLA III.
Scarti fra posizioni osservate e posizioni calcolate.

t	$(O-C)_\theta$	$(O-C)_\varrho$	$\rho\Delta\theta$	t	$(O-C)_\theta$	$(O-C)_\varrho$	$\rho\Delta\theta$	t	$(O-C)_\theta$	$(O-C)_\varrho$	$\rho\Delta\theta$
1829,60	+ 1°,44	+ 0'',16	+ 0'',092	1874,99	+ 0°,57	- 0'',10	+ 0'',043	1905,20	+ 0°,58	- 0'',14	+ 0'',086
1833,28	- 0,64	+ 0,21	- 0,036	1877,01	+ 0,28	- 0,04	+ 0,023	1906,41	- 0,20	+ 0,12	- 0,030
1835,29	+ 1,32	+ 0,16	+ 0,070	1880,08	- 0,10	+ 0,03	- 0,009	1910,86	+ 0,18	+ 0,06	+ 0,029
1836,55	+ 2,32	+ 0,17	+ 0,118	1881,90	+ 0,23	+ 0,20	+ 0,021	1914,40	+ 0,63	+ 0,05	+ 0,107
1837,74	+ 4,11	+ 0,18	+ 0,203	1884,05	+ 1,13	+ 0,12	+ 0,109	1915,46	- 0,96	-	- 0,166
1841,12	- 0,59	+ 0,29	- 0,026	1886,17	- 0,01	+ 0,07	- 0,002	1917,93	- 0,10	+ 0,03	- 0,018
1842,33	+ 1,89	- 0,06	+ 0,081	1887,86	+ 0,60	+ 0,12	+ 0,063	1922,54	- 0,40	+ 0,05	- 0,076
1847,57	- 0,22	- 0,04	- 0,008	1888,55	- 0,64	+ 0,10	- 0,067	1924,46	+ 0,71	+ 0,23	+ 0,139
1850,00	- 1,04	+ 0,04	- 0,040	1891,30	+ 0,66	- 0,04	+ 0,073	1925,54	- 0,63	+ 0,05	- 0,125
1851,97	- 1,33	- 0,04	- 0,052	1892,59	- 0,37	+ 0,02	- 0,043	1930,65	+ 0,10	+ 0,01	+ 0,021
1855,10	- 0,60	- 0,06	- 0,025	1892,88	+ 0,55	- 0,01	+ 0,064	1933,96	- 1,58	+ 0,10	- 0,345
1857,12	+ 0,10	+ 0,03	+ 0,004	1895,19	+ 0,19	+ 0,19	+ 0,022	1934,50	+ 0,09	- 0,09	+ 0,018
1861,63	+ 3,04	+ 0,15	+ 0,149	1895,52	+ 0,70	- 0,05	+ 0,086	1936,55	+ 0,14	0,00	+ 0,030
1863,04	+ 1,50	+ 0,06	+ 0,077	1897,58	+ 0,45	+ 0,12	+ 0,057	1939,39	+ 0,37	+ 0,15	+ 0,085
1865,09	+ 1,69	- 0,17	+ 0,092	1898,94	+ 0,02	+ 0,07	+ 0,002	1939,56	- 0,51	- 0,07	- 0,120
1867,04	+ 1,51	- 0,10	+ 0,089	1899,86	+ 0,20	- 0,01	+ 0,027	1940,49	- 0,13	- 0,03	- 0,031
1868,93	+ 1,24	- 0,12	+ 0,077	1900,61	- 0,25	+ 0,04	- 0,034	1941,67	- 0,58	- 0,09	- 0,139
1870,95	+ 0,89	- 0,04	+ 0,059	1902,53	- 0,07	+ 0,13	- 0,009				
1872,97	+ 0,81	- 0,03	+ 0,058	1902,78	- 0,39	- 0,03	- 0,054				

Come si vede, essi sono tutti abbastanza piccoli; e sebbene per gli anni anteriori al 1880 potrebbe sospettarsi una qualche periodicità, gli scarti per gli anni restanti sono del tutto accidentali, e tali da escludere l'esistenza di un moto orbitale.

5. Giunta a questa conclusione, ho ricavato le componenti in ascensione e declinazione del moto relativo della stella secondaria, rispetto a quella principale, dalle note formule:

$$(12) \quad \mu'_\alpha = \mu' \sin \beta \sec \delta \quad ; \quad \mu'_\delta = \mu' \cos \beta$$

in cui β è l'angolo che dà la direzione del moto proprio e che ho trovato uguale a $226^\circ,2$ e δ è la declinazione dell'astro. Sostituendo abbiamo quindi:

$$(13) \quad \mu'_\alpha = -0'',120 = -0^s,008 \quad ; \quad \mu'_\delta = -0'',101.$$

Ora le componenti del moto proprio annuo dell'astro principale, secondo il « General Catalogue » del Boss, sono: $\bar{\mu}_\alpha = -0'',009$; $\bar{\mu}_\delta = +0'',012$ e quindi quelle del moto proprio eliocentrico del satellite risultano:

$$(14) \quad \mu_\alpha = \mu'_\alpha + \bar{\mu}_\alpha = -0'',129 \quad ; \quad \mu_\delta = \mu'_\delta + \bar{\mu}_\delta = -0'',089$$

mentre la sua grandezza, ricavabile dalla nota formula $\mu = \sqrt{\mu_\alpha^2 \cos^2 \delta + \mu_\delta^2}$ è di $0'',144$. Tale valore è circa dieci volte maggiore di quello del moto proprio dell'astro principale, che ammonta a $0'',014$.

Tenendo conto che la stella S' è di nona grandezza, e che in media le stelle di nona grandezza hanno un moto proprio annuo di circa $0'',02$, vediamo che S' avrebbe un moto proprio piuttosto forte, sebbene non eccezionale. Infatti, consultando il « Bergedorfer Eigenbewegungs Lexikon » dello Schorr, si può constatare come vi siano diverse stelle di nona grandezza, aventi un moto proprio annuo maggiore di quello da me trovato per la stella secondaria dell'A.D.S.10332. Non è possibile fare altre ricerche, poiché del sistema in questione si sa soltanto che la principale è una gigante spettroscopica di tipo KO, e non sono note le parallassi delle due stelle, né l'esatta grandezza visuale del satellite od il suo tipo spettrale. Secondo i dati ora trovati, le effemeridi per i prossimi anni sono le seguenti:

t	ϑ	ρ	t	ϑ	ρ
1956	$234^\circ,30$	$15'',68$	1970	$233^\circ,37$	$17'',71$
1960	$234,00$	$16,27$	1975	$233,08$	$18,44$
1965	$233,67$	$16,99$	1980	$232,82$	$19,18$

Durante la correzione delle bozze di questa Nota, il prof. U. Güntzel-Lingner (Potsdam) mi ha gentilmente inviato una recente posizione da lui misurata per la stella satellite A.D.S. 10332:

$$t = 1956,354 \quad \vartheta = 234^{\circ},20 \quad \rho = 15'',842.$$

Il confronto con le mie effemeridi dà in ottimo accordo:

$$O - C_{\vartheta} = -0^{\circ},07 \quad O - C_{\rho} = +0'',093.$$

Astronomia (Astrofisica solare). — *Variazione, dal centro al lembo del Sole, del profilo della linea spettrale $\lambda = 4227$ del CaI.* Nota II di TERESA FORTINI e GIUSEPPE CAPRIOLI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

Proseguiamo una I Nota sullo stesso argomento, già apparsa in questi « Rendiconti »⁽¹¹⁾.

5. VARIAZIONE CENTRO-LEMBO DEL PROFILO DELLA 4227. — La riga $\lambda = 4227$ corrisponde alla transizione $4^1S-4^1P^o$ della serie fondamentale; essa è quindi una riga di risonanza, per cui la teoria prevede che, in corrispondenza di essa, l'energia sia assorbita e riemessa per pura *diffusione*. Inoltre, essendo la $\lambda = 4227$ dovuta al calcio neutro (CaI), il rapporto η tra l'assorbimento della riga e l'assorbimento del continuo, dovrebbe variare con la profondità ottica, perché aumentando la temperatura verso l'interno, sarà minore nell'interno la percentuale del numero degli atomi allo stato neutro. La riga si originerebbe quindi in questo caso, nello strato esterno dell'atmosfera solare secondo il modello atmosferico Schuster-Schwarzschild. Senza entrare però per il momento in discussioni di carattere teoretico, ci limitiamo a riportare i risultati della nostra analisi. Una discussione generale sul comportamento della $\lambda = 4227$ come su quello di altre righe che ci proponiamo ancora di studiare, sarà fatto in altra occasione.

Centro. — Le intensità I_c del centro della riga sono riportate nella tabella IV per le varie distanze δ dal centro al lembo del Sole; ma è bene ricordare che tali valori si riferiscono *a una sola lastra*; poichè, come abbiamo già detto⁽¹²⁾, per intensità dell'ordine del 30 % contate dal basso verso il continuo, si è fatto uso soltanto della lastra 39 *a*. Riteniamo che la intensità corrispondente alla puntata al centro ($\delta = 0$), sia *più incerta* di quanto non lo siano le altre⁽¹³⁾, per la vicinanza probabile di qualche zona

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(11) Serie VIII, vol. XX, fasc. 5, p. 610.

(12) Nella prima parte della Nota I.

(13) Secondo una misura molto accurata di R. O. REDMAN (« M. N. », vol. 95, p. 742, 1935) è risultato che al centro del Sole, l'intensità centrale della $\lambda = 4227$, corretta per il finito potere risolutivo dello strumento è soltanto dell'ordine del 2 % del continuo.

facolare ⁽¹⁴⁾ o per luce diffusa. Ricordiamo che Houtgast dà $I_c = 7,8$ per $\delta = 0$.

TABELLA IV.
Intensità centrali.

δ	0°	40°	50°	60°	70°	75°	80°
I_c	(13,8)	9,7	6,8	11,4	7,6	11,8	8,3

Ali. - Supponendo che il coefficiente di assorbimento, ad una notevole distanza $\Delta\lambda$ dal centro della riga, sia inversamente proporzionale al quadrato del $\Delta\lambda$ stesso, la depressione delle ali può essere espressa con approssimazione dalla nota formula del Minnaert ⁽¹⁵⁾:

$$(1) \quad I_0 - I = \frac{I C_\delta}{\Delta\lambda^2}$$

dove I_0 indica l'intensità del continuo che poniamo per consuetudine eguale a 100.

I valori della costante C_δ per le diverse puntate dal centro al lembo del Sole sono riportati nella tabella V; in essa sono dati anche i rapporti delle varie C_δ alla C_0 relative allo spettro del centro.

TABELLA V.
Valori della costante C_δ .

$\cos \delta$	1,000	0,766	0,643	0,500	0,342	0,259	0,174
$C_\delta \dots$	0,40	0,48	0,48	0,70	0,64	0,52	0,47
$C_\delta/C_0 \dots$	1,00	1,20	1,20	1,75	1,60	1,30	1,18

Houtgast dà per il centro del Sole $C_0 = 0,22$. Data la presenza dei blends e la conseguente difficoltà di individuare punti veramente appartenenti al profilo della $\lambda = 4227$, riteniamo che le C_δ da noi trovate possano essere

(14) M. CIMINO nella parte IV della Nota citata al n. 1, serie VIII, vol. XIV, fasc. 4, p. 504, ha riportato un fotoeliogramma nella riga K del calcio ionizzato, eseguito a M. Wilson il 16 novembre 1950, in cui è ben visibile una estesa zona facolare in prossimità del centro del Sole.

(15) Cfr. M. MINNAERT, « Zs. f. Astr. », vol. X, 40 (1935).

affette da qualche incertezza. Secondo una nostra determinazione della C_δ al centro del Sole, eseguita in base a punti del «Ph. Atlas» del Minnaert, abbiamo ritrovato $C_0 = 0,41$ in ottimo accordo con il nostro corrispondente risultato.

Nella figura 1 sono disegnate quattro curve teoriche dell'andamento che dovrebbero avere i rapporti C_δ/C_0 per la formazione della riga per *assorbimento* (secondo i due modelli atmosferici di Schwarzschild e Milne-Eddington) e per *diffusione* (sempre per i due modelli S.S. e M.E.). Tutte e quattro

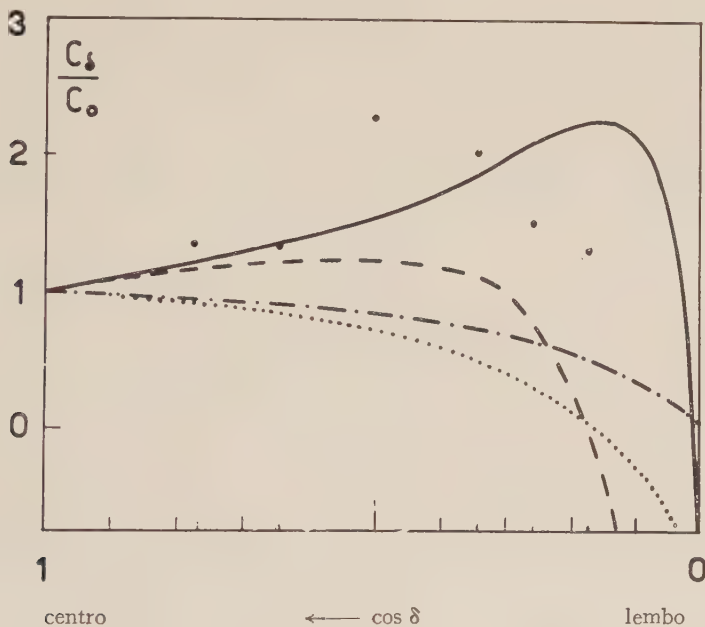


Fig. 1. - Variazione centro-lembo della costante C .

assorbimento	{	—— Schwarzschild;
		- - - Milne-Eddington;
diffusione	{	- . - Schwarzschild
	 Milne-Eddington.

le curve sono disegnate per un valore $\beta_0 = 4,5$ corrispondente alla zona spettrale della $\lambda = 4227$, ricordando che β_0 è il coefficiente del termine lineare della funzione di Planck, sviluppata in serie di potenze della profondità ottica ⁽¹⁶⁾. La disposizione nello stesso grafico della fig. 1 dei vari punti che rappresentano i valori da noi ricavati per i rapporti C_δ/C_0 mostra

(16) Si è trovato sperimentalmente, misurando l'oscuramento al bordo della luce solare in varie lunghezze d'onda, che la funzione di Planck varia con la profondità ottica τ per ogni frequenza ν , secondo la legge lineare:

$$B_\nu(\tau) = B_0(1 + \beta_0 \tau)$$

dove β_0 è funzione di ν . Da determinazioni eseguite da Houtgast e altri si è trovato che β_0 è funzione decrescente della lunghezza d'onda λ .

chiaramente una maggiore depressione dell'ala a una distanza dal centro del disco di $9/10$ circa del raggio. Lo stesso comportamento centro-lembo per l'ala della $\lambda = 4227$, sebbene in misura leggermente meno pronunciata, è stato riscontrato ⁽¹⁷⁾ da Houtgast.

6. DETERMINAZIONE DELLE LARGHEZZE EQUIVALENTI. - Infine nella tabella VI sono date le larghezze equivalenti W della $\lambda = 4227$, sempre in corrispondenza dei vari angoli di posizione dal centro al lembo. Esse sono state valutate misurando l'area racchiusa dal profilo della riga fino alle distanze $\Delta\lambda$ dal centro di $2,41 \text{ \AA}$ verso il rosso e $1,77 \text{ \AA}$ verso il violetto. La correzione dei blends (eseguita graficamente) e la misura dell'area racchiusa dal profilo è stata effettuata indipendentemente dai due autori. L'area racchiusa tra il continuo e il profilo della riga nelle parti estreme delle ali è stata invece estrapolata secondo la nota formula del Minnaert ⁽¹⁸⁾:

$$(2) \quad W = \sqrt{C_\delta} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{C_\delta}} \right).$$

TABELLA VI.
Larghezze equivalenti.

δ	0°	40°	50°	60°	70°	75°	80°
W_δ	1,57	1,73	1,73	1,89	1,99	1,70	1,59

Il valore da noi trovato per la larghezza equivalente della $\lambda = 4227$ al centro del Sole ($W_0 = 1,57$), risulta un po' più elevato del corrispondente valore $W_0 = 1,43$ dato dall'Houtgast sempre per il centro del Sole. Con tutta probabilità questa differenza è da attribuire alla indeterminazione da cui, secondo quanto è stato già detto al paragrafo precedente, sono affette le C_δ . Aggiungendo ad esempio all'area da noi misurata per il centro del Sole, il contributo dovuto alle ali ricavato in base alla $C_0 = 0,22$ dato dall'Houtgast, si ritrova per la larghezza equivalente il valore $W_0 = 1,42$ molto prossimo a quello di Houtgast stesso. Non è facile decidere dell'incertezza nella misura delle W_δ ; tuttavia il buon accordo tra il nostro profilo al centro del Sole e quello del « Ph. Atlas » del Minnaert ci fa sperare che i nostri risultati non siano molto lontani da quelli effettivi.

Per quanto riguarda la variazione centro-lembo delle W_δ , notiamo come il comportamento da noi trovato sia analogo a quello riscontrato da Houtgast; si ha cioè un aumento delle W_δ fino a una puntata $\delta = 70^\circ$ e una successiva diminuzione.

(17) Cfr. J. HOUTGAST, Mem. citata alla nota ⁽¹⁰⁾ p. 58.

(18) Cfr. M. MINNAERT, Mem. citata alle note ⁽⁷⁾ e ⁽¹⁵⁾.

Ripetiamo ancora che non vogliamo intrattenerci per il momento sulla interpretazione teorica e sulle conseguenze che si possono trarre dai precedenti risultati; riprenderemo in esame in altra occasione sia la riga in questione come anche altre righe che ci proponiamo ancora di studiare.

Notiamo infine che tutto il lavoro di registrazione e di riduzione degli spettrogrammi è stato effettuato da G. Caprioli; l'elaborazione dei dati e la discussione dei risultati è dovuta invece nella stessa misura a G. Caprioli e T. Fortini.

Gli autori desiderano ringraziare il prof. Cimino per aver messo a loro disposizione le lastre in discussione, da lui impressionate alla Torre di M. Wilson, e per averli consigliati e guidati nel corso di questo lavoro.

Geodesia. — *Sulle deviazioni angolari locali del Geoide dall'Ellissoide.* Nota di PIETRO TORTORICI, presentata (*) dal Socio C. MINEO.

1. Con notazioni ben conosciute⁽¹⁾, sia $P^*(x^*, y^*, z^*)$ un punto del Geoide, $P(x, y, z)$ il corrispondente sull'Ellissoide; le due superficie abbiano un punto iniziale P_0 comune, nel quale siano tangenti, ecc.

Le deviazioni angolari locali μ, ν sono le differenze $\mu = l - \varphi, \nu = \lambda - \omega$ essendo l, λ le coordinate astronomiche sul Geoide; φ, ω quelle geografiche sull'Ellissoide. Denoti h lo scostamento lineare, $h = P^*P$; siano α, β, γ i coseni direttori di P^*P e, al solito, X, Y, Z i coseni direttori della normale al Geoide ed L, M, N quelli della normale all'Ellissoide, dei quali coseni le espressioni in funzione di l, λ e di φ, ω rispettivamente sono ben note.

Ritenendo μ, ν del primo ordine e trascurando i termini di ordine superiore al primo, si ha:

$$(I) \quad \begin{cases} X = L - \mu \sin \varphi \cos \omega - \nu \cos \varphi \sin \omega \\ Y = M - \mu \sin \varphi \sin \omega + \nu \cos \varphi \cos \omega \\ Z = N + \mu \cos \varphi. \end{cases}$$

Inoltre è:

$$x^* = x + h\alpha, \quad y^* = y + h\beta, \quad z^* = z + h\gamma$$

e l'identità $\sum X dx^* = 0$ scrivesi $\sum X d(x + h\alpha) = 0$ e questa, per le (I) e ponendo:

$$\sum X \alpha = -\frac{1}{U}, \quad \sum X \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = V, \quad \sum X \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} = W,$$

poiché si ha pure:

$$\sum X dx = -a(\mu d\varphi + \nu \cos^2 \varphi d\omega),$$

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) Vedi ad esempio la recente Nota di B. GULOTTA, *Per una più precisa definizione delle deviazioni angolari locali del Geoide dall'Ellissoide*, «Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei», ser. VIII, vol. XVII, Fasc. 1-2, 1954.

dà, per la funzione scostamento lineare $h(\varphi, \omega)$, la equazione ai differenziali totali:

$$(2) \quad dh = [a\mu U + h UV] d\varphi + [aU \nu \cos^2 \varphi + h UW] d\omega.$$

La funzione $h(\varphi, \omega)$, se esiste, conterrà al più una costante arbitraria e deve aversi:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \varphi} = a(\mu U) + h(UV) \\ \frac{\partial h}{\partial \omega} = a(U \nu \cos^2 \varphi) + h(UW). \end{cases}$$

La condizione di integrabilità, necessaria e sufficiente per l'esistenza di h , è:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} [a(\mu U) + h(UV)] = \frac{\partial}{\partial \varphi} [a(U \nu \cos^2 \varphi) + h(UW)]$$

e questa, eseguendo le derivazioni e tenendo conto delle (3) medesime, dà:

$$(4) \quad aU^2 [V \nu \cos^2 \varphi - \mu W] = -h \left[\frac{\partial(UV)}{\partial \omega} - \frac{\partial(UW)}{\partial \varphi} \right] + \\ + a \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (U \nu \cos^2 \varphi) - \frac{\partial}{\partial \omega} (\mu U) \right].$$

Ora possono accadere solo due casi: o la condizione di integrabilità (4) non è una identità, ovvero è identicamente soddisfatta.

Nel primo caso l'unica funzione h che eventualmente sodisfi la (2) è data dalla (4) stessa e non c'è che da eseguire una verifica. La funzione h non contiene alcuna arbitrarietà; in generale però essa non verifica la (2) e perciò non esiste soluzione.

Supponiamo, dunque, che la (4) sia identicamente soddisfatta. Siccome essa è lineare in h , si scinde nelle due condizioni:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial(UV)}{\partial \omega} = \frac{\partial(UW)}{\partial \varphi} \\ U^2 [V \nu \cos^2 \varphi - \mu W] = \frac{\partial}{\partial \varphi} [U (\nu \cos^2 \varphi)] - \frac{\partial}{\partial \omega} [\mu U]. \end{cases}$$

Integrando ora la prima delle (3) si ha:

$$(6) \quad h = e^{\int UV d\varphi} \left[\int a(\mu U) e^{-\int UV d\varphi} d\varphi + \Phi(\omega) \right]$$

con $\Phi(\omega)$ arbitraria. Porremo, secondo la teoria generale, l'integrale (6) sotto la forma

$$(7) \quad f(\varphi, \omega, h) = \Phi(\omega),$$

cioè porremo:

$$f(\varphi, \omega, h) = h e^{-\int UV d\varphi} - \int a(\mu U) e^{-\int UV d\varphi} d\varphi.$$

Deve aversi ancora, per la seconda delle (3):

$$(8) \quad \frac{\partial h}{\partial \omega} = aU (\nu \cos^2 \varphi) + h(UW)$$

e la funzione $\Phi(\omega)$ che compare nella espressione (6) trovata per h , deve determinarsi in modo da verificare quest'ultima.

Derivando la (7) rispetto ad ω si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} + \frac{\partial f}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial \omega} = \Phi'(\omega)$$

ed in questa per h va sostituita la espressione (6) e per $\partial h / \partial \omega$ la precedente (8). È ben noto che a sostituzioni effettuate, in forza delle condizioni (5), si ottiene una relazione del tipo:

$$\Psi(\omega, \Phi(\omega)) = \Phi'(\omega)$$

che è una equazione del primo ordine per la funzione incognita $\Phi(\omega)$, la quale perciò contiene una costante arbitraria.

2. Esaminiamo ora più da vicino il nostro problema *in un caso particolare*. Ammettiamo cioè che sia verificata la condizione:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [U(v \cos^2 \varphi)] = \frac{\partial}{\partial \omega} (\mu U).$$

Allora le condizioni di integrabilità (5) divengono:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial(UV)}{\partial \omega} = \frac{\partial(UW)}{\partial \varphi} \\ V(v \cos^2 \varphi) - (\mu W) = 0. \end{cases}$$

La seconda di queste, supposto che sia $\mu \neq 0$, $v \neq 0$, suggerisce di porre:

$$(10) \quad V = \mu A, \quad W = (v \cos^2 \varphi) A,$$

essendo $A(\varphi, \omega)$ una funzione da determinare.

La prima delle (9), eseguita ogni riduzione, fornisce:

$$\mu \frac{\partial A}{\partial \omega} - (v \cos^2 \varphi) \frac{\partial A}{\partial \varphi} = 0,$$

relazione che non contiene U ed è lineare omogenea nelle derivate di A . L'equazione normale associata è:

$$\frac{d\omega}{\mu} = - \frac{d\varphi}{v \cos^2 \varphi},$$

che dà:

$$\varphi = - \int \frac{v \cos^2 \varphi}{\mu} d\omega + \text{Costante}$$

e quindi per A può prendersi una *funzione arbitraria* della variabile

$$\varphi + \int \frac{v \cos^2 \varphi}{\mu} d\omega:$$

$$A = A\left(\varphi + \int \frac{v \cos^2 \varphi}{\mu} d\omega\right).$$

3. Prima di proseguire si osservi che le funzioni α, β, γ , dopo quanto si è detto e per le posizioni fatte, sono sottoposte ora alle sole condizioni:

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ X \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} + Y \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} + Z \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = \mu A \\ X \frac{\partial \alpha}{\partial \omega} + Y \frac{\partial \beta}{\partial \omega} + Z \frac{\partial \gamma}{\partial \omega} = (\nu \cos^2 \varphi) A. \end{cases}$$

Queste determinano α, β, γ perché, eliminando γ , si ottengono due relazioni che, risolte rispetto a $\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}$ e $\frac{\partial \beta}{\partial \varphi}$, costituiscono un sistema normale e assicurano, fissate le condizioni iniziali, l'esistenza e l'unicità di α, β e quindi di γ .

4. Riprendiamo ora l'equazione ai differenziali totali per h , che, nel nostro caso particolare, è:

$$(12) \quad dh = \mu U [a + hA] d\varphi + (\nu \cos^2 \varphi) U [a + hA] d\omega,$$

onde deve essere:

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = [a + hA] \mu U, \quad \frac{\partial h}{\partial \omega} = [a + hA] (\nu \cos^2 \varphi) U.$$

Seguendo il procedimento generale descritto al n. 1, la prima dà:

$$h = e^{\int \mu AU d\varphi} \left[\int a \mu U e^{-\int \mu AU d\varphi} \cdot d\varphi + \Phi(\omega) \right]$$

e, per determinare $\Phi(\omega)$, non c'è che da derivare rispetto ad ω e uguagliare con la espressione nota di $\partial h / \partial \omega$. Derivando si ottiene:

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \int \mu AU d\varphi \right] h + e^{\int \mu AU d\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \int a \mu U e^{-\int \mu AU d\varphi} \cdot d\varphi + \Phi'(\omega) \right].$$

Si ha, però tenendo conto di quanto precede:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega} \int \mu AU d\varphi &= AU (\nu \cos^2 \varphi); \\ \frac{\partial}{\partial \omega} \int a \mu U e^{-\int \mu AU d\varphi} d\varphi &= aU (\nu \cos^2 \varphi) e^{-\int \mu AU d\varphi}. \end{aligned}$$

Sostituendosì si ottiene infine:

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} = [a + hA] U (\nu \cos^2 \varphi) + e^{-\int \mu AU d\varphi} \cdot \Phi'(\omega).$$

Confrontando con l'espressione nota di $\partial h / \partial \omega$ segue:

$$\Phi'(\omega) = 0, \quad \Phi(\omega) = C = \text{costante}$$

e però l'integrale generale della nostra equazione (12) è:

$$(13) \quad h = e^{\int \mu AU d\varphi} \left[a \int \mu U e^{-\int \mu AU d\varphi} d\varphi + C \right].$$

Sotto le ipotesi avanti dichiarate, h dipende solo dalla funzione arbitraria $A\left(\varphi + \int \frac{\nu \cos^2 \varphi}{\mu} d\omega\right)$; α, β, γ sono determinate del sistema (11) e, infine, è:

$$U = -\frac{1}{\Sigma X_{\alpha}}.$$

5. Eseguiamo qualche controllo.

Supponiamo di scegliere per A una costante *non nulla*.

Osservato che allora:

$$\int \mu U e^{-\int A(\mu U) d\varphi} d\varphi = -\frac{1}{A} e^{-A \int (\mu U) d\varphi},$$

la (13) dà:

$$(14) \quad h = -\frac{a}{A} + C e^{A \int \mu U d\varphi}$$

ovvero:

$$\log \frac{a + hA}{A} = \log C + A \int \mu U d\varphi$$

e differenziando:

$$\frac{dh}{a + hA} = \mu U d\varphi + \left[\int \frac{\partial (\mu U)}{\partial \omega} d\varphi \right] d\omega,$$

$$\frac{dh}{a + hA} = \mu U d\varphi + (\nu \cos^2 \varphi) U d\omega$$

e, infine:

$$(15) \quad dh = [a + hA] U (\mu d\varphi + (\nu \cos^2 \varphi) d\omega).$$

1) Se $A \rightarrow 0$, allora $V \rightarrow 0$, $W \rightarrow 0$, $U \rightarrow -1$ e, al limite:

$$dh = -a (\mu d\varphi + \nu \cos^2 \varphi d\omega),$$

e la (13) dà

$$h = -a \int \mu d\varphi + C.$$

Si ritrova così la prima ipotesi del GULOTTA.

2) Se $A = 1$, le (14), (15) dànno:

$$dh = U [a + h] [\mu d\varphi + (\nu \cos^2 \varphi) d\omega],$$

$$h = -a + C e^{\int \mu U d\varphi}.$$

Supposto che sia:

$$U = -1 - \varepsilon$$

con ε positiva del primo ordine almeno, nella approssimazione del primo ordine è:

$$dh = -(a + h) (\mu d\varphi + \nu \cos^2 \varphi d\omega),$$

quindi

$$\log \left(1 + \frac{h}{a} \right) = - \int (\mu d\varphi + \nu \cos^2 \varphi d\omega)$$

e la seconda ipotesi del Gulotta $[\alpha = L, \beta = M, \gamma = N, U = -1]$ vi è inclusa.

6. Più generalmente, supponiamo che la direzione (α, β, γ) sia infinitamente prossima alla direzione (X, Y, Z) . Porremo perciò:

$$\alpha = X + \xi, \quad \beta = Y + \eta, \quad \gamma = Z + \zeta$$

con ξ, η, ζ funzioni infinitesime, del primo ordine almeno. La condizione $\Sigma \alpha^2 = 1$ dà:

$$\Sigma \xi^2 + 2 \Sigma X \xi = 0$$

e questa, assegnate ad arbitrio ξ e η , determina ζ . Posto:

$$\Sigma X \xi = -\frac{1}{2} \Sigma \xi^2 = -\varepsilon^2$$

con ε dello stesso ordine di ξ, η , risulta:

$$\Sigma X \alpha = \Sigma X (X + \xi) = 1 + \Sigma X \xi = 1 - \varepsilon^2,$$

$$U = -\frac{1}{\Sigma X \alpha} = -\frac{1}{1 - \varepsilon^2} = -(1 + \varepsilon^2).$$

$$V = \Sigma X \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \Sigma X \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) = \Sigma X \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad W = \Sigma X \frac{\partial \xi}{\partial \omega}$$

e quindi V, W sono del primo ordine almeno. Le posizioni (10) assicurano che A è finita o di ordine inferiore di una unità ad ε .

Inoltre:

$$e^{\int \mu A U d\varphi} = e^{-\int (1 + \varepsilon^2) \mu A d\varphi} = e^{-\int \mu A d\varphi} \cdot e^{-\theta}$$

con θ almeno del terzo ordine $\left[\theta = -\int \varepsilon^2 \mu A d\varphi \right]$. Ne segue che, a meno di termini del sesto ordine o maggiore, è:

$$h = e^{-\int \mu A d\varphi} (1 - \theta) \left[-a \int \mu (1 + \varepsilon^2) e^{\int \mu A d\varphi} d\varphi + C \right]$$

e, quindi, separando la parte principale:

$$h = e^{-\int \mu A d\varphi} \left[-a \int \mu e^{\int \mu A d\varphi} d\varphi + C \right] + \sigma$$

con σ del terzo ordine almeno. L'espressione ultima di h si ha dall'integrale generale (13) ponendo $U = -1$.

In sostanza, a meno di termini del terzo ordine almeno, la soluzione è quella che si ha per $X = \alpha, Y = \beta, Z = \gamma$ come è intuitivo *a priori*.

Chimica. — *Determinazione oscillografica dell'andamento della curva superficie-tempo per l'elettrodo a goccia di mercurio* (*). Nota di P. FAVERO, A. M. MIRRI e E. VIANELLO, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

È da tempo in corso in questo Istituto, a cura del Centro di Polarografia del C.N.R., una serie di esperienze di polarografia oscillografica con la tecnica a sparpagliamento singolo di potenziale. Nel corso di tali ricerche, per ragioni affatto strumentali, si è reso necessario rilevare sperimentalmente l'andamento della curva superficie-tempo per l'elettrodo a goccia di mercurio. La particolare caratteristica del polarografo oscillografico usato consiste nel fatto che la caduta della goccia viene forzata mediante un martelletto magnetico [1]. Dopo un tempo t_r , dall'inizio della formazione della goccia, prefissato e variabile con continuità, alla goccia viene conferito lo sparpagliamento di potenziale a velocità regolabile entro un certo intervallo. Il regolare susseguirsi di queste operazioni è comandato da un particolare circuito elettronico che fa parte integrante del polarografo stesso, a differenza di altre apparecchiature dello stesso tipo descritte in letteratura [2] [3] [4] nelle quali il susseguirsi delle operazioni è regolato dalla caduta libera della goccia.

Dal fatto che il funzionamento dello strumento può essere reso indipendente dalle caratteristiche del capillare ne segue, da un lato la possibilità di usare capillari polarografici di qualsiasi tipo, dall'altro la possibilità di conferire lo sparpagliamento di potenziale a un qualsiasi tempo di vita della goccia. Ciò consente il vantaggio di poter utilizzare l'elettrodo ai fini della misura fino ad un tempo di poco inferiore a quello di caduta naturale, quando la sua superficie sia sufficientemente grande ma la sua stabilità non ancora precaria [5].

È stato appunto per questo modo di operare che si è dovuto procedere ad una determinazione della dipendenza della corrente di picco i_p dal tempo di ritardo t_r e dall'altezza h_r della riserva di mercurio allo scopo di verificare la validità dell'equazione di Randles-Sevcik [6] [7] nelle nostre condizioni di lavoro.

Secondo tale equazione, infatti, la corrente di picco è direttamente proporzionale alla superficie della goccia al tempo di vita, t_p , al quale si forma il picco. Data la supposta forma sferica della goccia, la superficie elettrodica è proporzionale a $m^{2/3} t_p^{2/3}$ (con m viene indicata la solita grandezza polarografica). Quando t_p coincide col periodo naturale di gocciolamento t_g , per

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università e Centro di Polarografia del C.N.R. di Padova.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

un processo reversibile la corrente di picco risulta indipendente dall'altezza della riserva poiché m e t_g ne dipendono rispettivamente in modo diretto e inverso. Per valori di t_p inferiori a t_g ciò non è più verificato e, operando a valori costanti di t_p , la corrente dovrebbe dipendere linearmente da $h_r^{2/3}$.

Da esperienze eseguite per via fotografica da G. S. Smith [8] risulta che, per capillari normali, la forma della goccia è sensibilmente sferica, e la dipen-

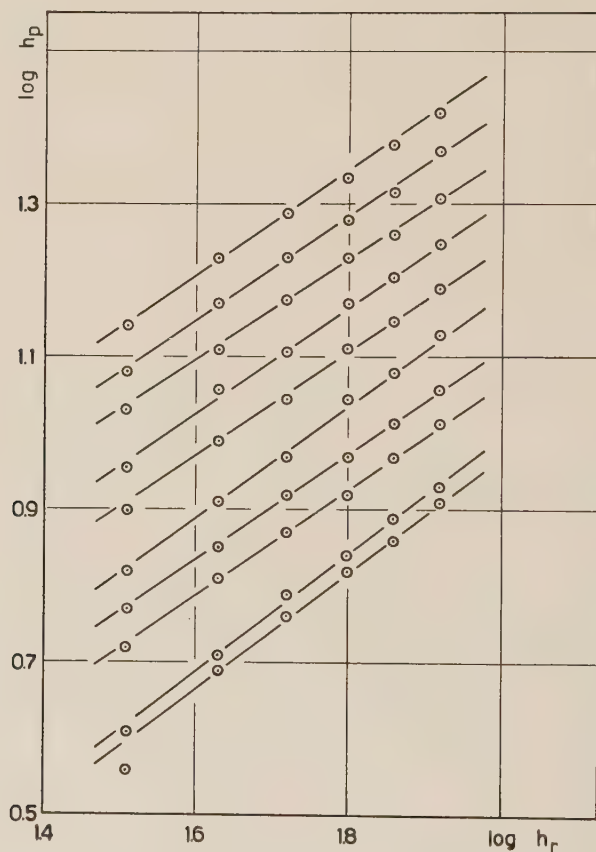


Fig. 1.

denza della superficie dal tempo di vita della goccia stessa è molto prossima a quella teorica che è del tipo $S = k(m \cdot t)^{2/3}$. I valori dell'esponente trovati dall'Autore sono compresi fra 0,68 e 0,71, e l'Autore stesso suggerisce di assumere come misura dello scostamento dalla sfericità della goccia la quantità della quale l'esponente differisce dal valore teorico di 0,66.

In diverse esperienze si sono rilevate le correnti di picco, a varie altezze della riserva e per determinati tempi di ritardo, di una soluzione di $\text{Cd}^{++} 1 \times 10^{-3} \text{ N}$ in $\text{KCl } 1 \text{ N}$. È stato usato un capillare con tempo di gocciolamento compreso fra 4 e 16'' ad un'altezza della riserva compresa fra 82 e 32 cm; i tempi di ritardo erano compresi fra 0,5 e 3''. Benché gli sparpaglia-

menti di potenziale, corrispondenti ad altrettanti tempi di ritardo, siano stati conferiti a gocce diverse, stante l'ottima regolarità di gocciolamento del capillare, si potevano considerare gli oscillogrammi come rilevati su un'unica goccia in vari momenti della sua vita; operando in questo modo si sono realizzate le migliori condizioni per la crescita imperturbata della goccia stessa. I risultati ottenuti sono riportati nei diagrammi di fig. 1 che rappresentano la dipendenza del logaritmo dell'altezza del picco di corrente h_p dal logaritmo dell'altezza della riserva. Le curve si riferiscono a diversi tempi di ritardo.

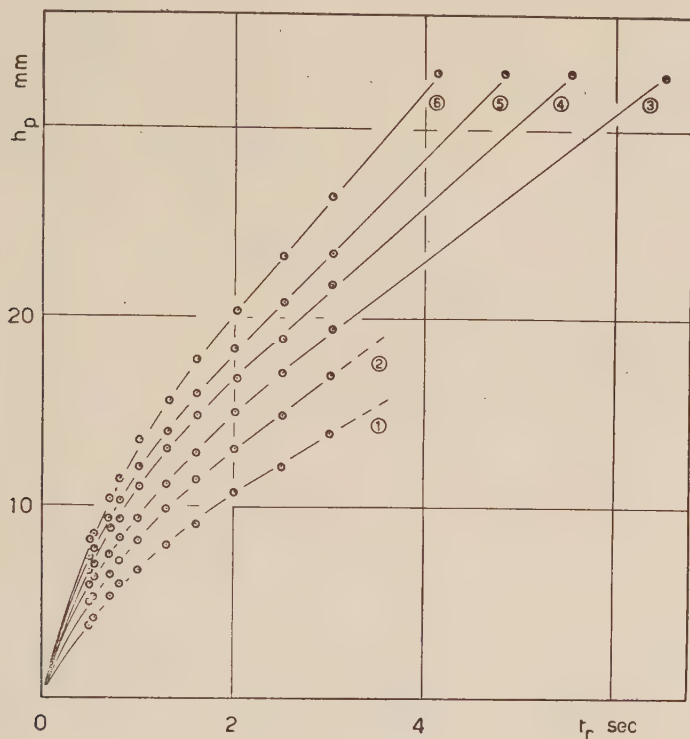


Fig. 2.

È necessario notare che in queste esperienze la differenza fra il tempo di ritardo, al quale inizia lo sparpagliamento, e il tempo al quale ha luogo il picco è da considerarsi trascurabile poiché la velocità di conferimento del potenziale era sufficientemente elevata. La pendenza media delle curve così ottenute è di 0,69 in buon accordo con i dati di G. S. Smith.

D'altra parte riportando i dati sperimentali in un diagramma in cui sia posta l'altezza del picco di corrente in funzione del tempo di ritardo, ad altezza della riserva variabile, si ottengono le curve di fig. 2. Esse rappresentano l'andamento della superficie della goccia in funzione del tempo di ritardo avendo assunto come parametro l'altezza della riserva. Le curve sono parabole di ordine circa $2/3$ come risulta dal diagramma di fig. 3 in cui

è riportato il logaritmo dell'altezza del picco in funzione del logaritmo del tempo di ritardo. Le rette hanno una pendenza media di 0,68.

Il buon accordo tra i nostri dati e quelli ricavati fotograficamente su gocce non sollecitate elettricamente [8], porta alla conclusione che l'andamento della superficie dell'elettrodo a goccia nei due casi è del tutto analogo. Né la sollecitazione elettrica dovuta al rapido sparpagliamento di poten-

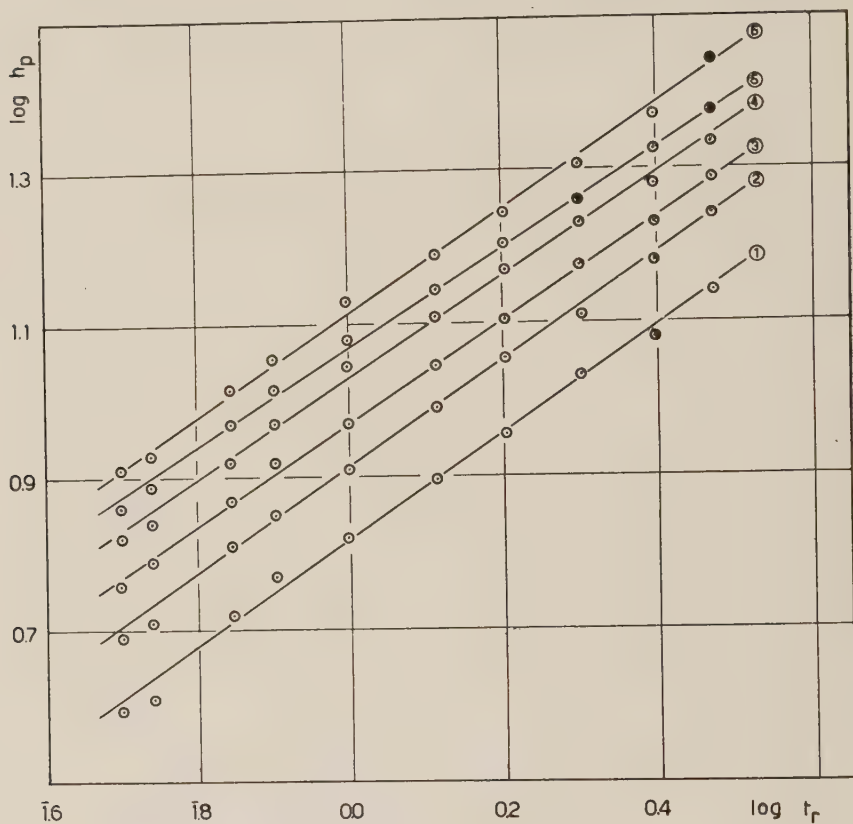


Fig. 3.

ziali né quella meccanica che causa la caduta forzata della goccia influenzano in modo decisivo tale andamento e l'equazione di Randles-Sevcik è ben applicabile anche nelle nostre condizioni sperimentali.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] P. FAVERO e E. VIANELLO, «Ricerca Sci.», 25, 1415 (1955).
- [2] F. C. SNOWDEN e H. T. PAGE, «Anal Chem.», 22, 969 (1950).
- [3] J. E. B. RANGLES, «Trans. Faraday Soc.», 44, 322 (1948).
- [4] H. M. DAVIS e J. E. SEABORN, «Electronic Eng.», 25 (1953).
- [5] P. FAVERO e E. VECCHI, «Rend. Accad. Naz. Lincei» [VIII] 15, 415 (1953).
- [6] J. E. B. RANGLES, «Trans. Faraday Soc.», 44, 327 (1948).
- [7] A. SEVCIK, «Collection Czechoslov. Commun.», 13, 349 (1948).
- [8] G. S. SMITH, «Trans. Faraday Soc.», 47, 63 (1951).

Chimica. — *Impiego accoppiato della coulombometria e della cromatografia in fase gassosa per l'analisi di costituenti di miscele volatili* (*). Nota di ARNALDO LIBERTI e GIAMPAOLO CARTONI, presentata (**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Le grandi possibilità fornite dalla cromatografia in fase gassosa per la separazione dei costituenti di una miscela volatile ha portato allo sviluppo di numerose tecniche sperimentali per la identificazione e la determinazione dei vari componenti. Per la sua applicabilità un sistema di identificazione deve esser tale da possedere una elevata sensibilità e stabilità, avere un elevato potere risolutivo e fornire un responso rapido ed indipendente dalla specifica natura del componente in esame; deve inoltre essere di costruzione relativamente semplice, di facile funzionamento e poter essere inoltre applicabile ad un gran numero di composti.

I metodi che attualmente hanno trovato in pratica un più largo impiego sono quelli basati su misure di conducibilità termica ⁽¹⁾, su variazioni di densità gassosa ⁽²⁾, e sull'impiego di titolazioni fotometriche ⁽³⁾.

Queste ultime, sviluppate da Martin e James, pur permettendo una grande precisione ed offrendo una grande sensibilità, non sono però diventate di uso generale sia per l'attrezzatura relativamente complessa, sia per il limitato campo di applicazione.

La coulombometria a corrente costante per i particolari requisiti di sensibilità, di semplicità, di attrezzatura e di manualità, offre un nuovo mezzo per la identificazione e la determinazione di costituenti separati cromatograficamente in fase gassosa.

In un precedente lavoro ⁽⁴⁾ la tecnica coulombometrica è stata impiegata per titolazioni fotometriche differenziali ed integrali con un dispositivo simile a quello di Martin e James: in questa ricerca il campo di applicazione della coulombometria a corrente costante è stato esteso a tutte quelle sostanze, che contengono almeno un atomo di carbonio nella molecola e che non possono essere titolate direttamente perché non possiedono alcuna funzione chimica attiva.

Il procedimento consiste nel fare attraversare ai vari componenti, che fuoriescono separati dalla colonna cromatografica, un fornetto da combustione e nel titolare l'anidride carbonica formatasi secondo un procedimento

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica generale e Inorganica dell'Università di Roma e presso l'Istituto di Chimica Analitica dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) N. H. RAY, « J. Applied Chemistry », 4, 21 (1954) e altri.

(2) A. J. P. MARTIN e A. T. JAMES, « Biochem J. », 63, 138 (1956).

(3) A. T. JAMES e A. J. P. MARTIN, « Biochem J. », 50, 679 (1952).

(4) A. LIBERTI, in corso di stampa.

coulombometrico-potenziometrico, simile a quello impiegato da Oelsen e collaboratori ⁽⁵⁾.

PARTE SPERIMENTALE.

In fig. 1 è riportato lo schema generale dell'apparecchiatura impiegata.

Una colonna cromatografica di tipo convenzionale, costituita da una canna di vetro lunga circa 120 cm e del diametro di circa 5 mm, riempita con farina fossile imbevuta con un liquido opportunamente scelto, viene termostata mediante i vapori di un liquido bollente a temperatura costante.

La pressione del gas eluente, generalmente ossigeno, viene mantenuta costante mediante un manostato, ed il flusso gassoso viene periodicamente misurato mediante un flussimetro a bolla di sapone. Il gas attraversa un tubo a calce sodata che fissa le tracce di anidride carbonica eventualmente presenti e quindi entra attraverso un rubinetto a due vie nella colonna cromatografica.

I fori di questo rubinetto sono tali da permettere il passaggio di un capillare o di un ago di una siringa, con i quali si è effettuato l'introduzione del campione nella colonna cromatografica. All'uscita della colonna cromatografica il gas passa attraverso un fornello di combustione costituito da una canna di vetro infusibile (lunga 15 cm, del diametro di 4 mm e con uno spessore di 2-3 cm) riempita di CuO in fili e mantenuta ad una temperatura di circa 800° C mediante una resistenza elettrica da 200 W.

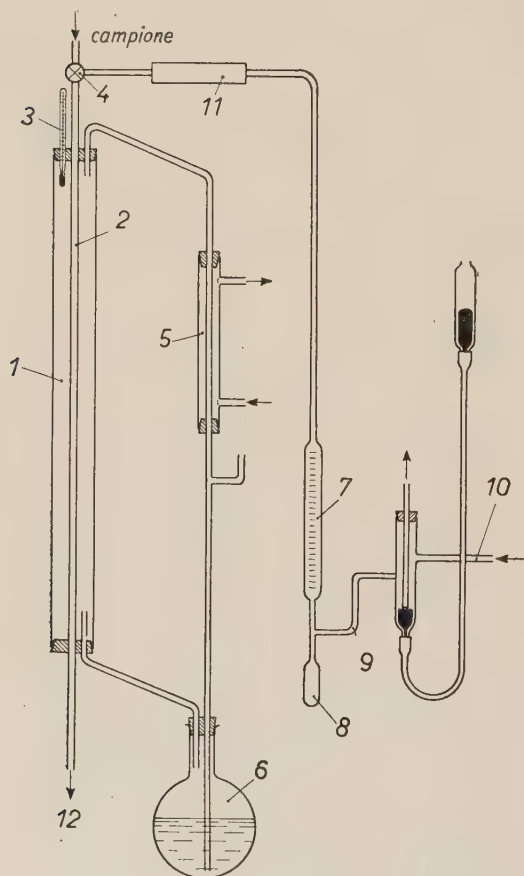


Fig. 1. - Schema di apparecchiatura per analisi cromatografica in fase gassosa.

1 termostato, 2. colonna cromatografica, 3 termometro, 4 rubinetto a due vie, 5 refrigerante, 6 pallone per ebollizione di liquidi termostatici, 7 flussimetro con bolla riserva detergente (8), 9, manostato, 10 ingresso gas di eluizione, 11 tubo a calce sodata, 12 uscita verso fornello e cella.

Dal fornello il gas entra nella cella per l'assorbimento e la titolazione dell'anidride carbonica.

(5) W. OELSEN, H. HAASE e G. GRAUE, « Archiv-Eisenhüttenwesen », 22, 225 (1951).

CELLA DI TITOLAZIONE. — È riportata in dettaglio in fig. 2: è costituita da un cilindro di vetro (altezza 12 cm, diametro 3 cm) nella cui parte inferiore sono stati ricavati tre fori: i due più in basso per l'inserimento degli elettrodi indicatori e quello più in alto per il tubo di adduzione del gas proveniente dalla colonna; all'estremità di questo tubo è saldato un setto poroso G_4 . Mediante un supporto di plastica o di gomma sono alloggiati nella parte superiore gli elettrodi generatori.

Elettrodi. — 1 e 2 sono la coppia di elettrodi indicatori, costituiti rispettivamente da un filo di platino avvolto a spirale piatta (circa 20 cm, diam. 0,3 mm) e da un elettrodo a calomelano normale comunicante con la soluzione della cella mediante un ponte salino a KCIN chiuso da una membrana di cellophane per dialisi. La resistenza di questo sistema, che va tenuta più bassa possibile per avere una maggiore sensibilità, nelle nostre esperienze è risultata pari a circa 1200 Ω . Questi due elettrodi sono cortocircuitati mediante un tasto su di un galvanometro a specchio di elevata sensibilità (2×10^{-8} A/div.). I due elettrodi generatori 7 e 8 sono costituiti da una laminetta di platino (circa $1 \times 1,5$ cm) collegata al catodo del coulombometro e da un anodo di carbone tenuto separato dall'elettrolita, contenuto nella cella, da una membrana di cellophane per dialisi. Poiché la regione anodica tende durante l'elettrolisi a divenire acida, provocando la diffusione di ioni idrogeno nella cella, una soluzione di $BaCl_2$ (10 g/l) portata a pH 10 con NaOH circola lentamente in 9 e fuoriuscendo in 10.

Elettrolita. — La cella viene riempita con una soluzione contenente g 10 di cloruro di bario biidrato, 5 ml di alcool etilico e 0,5 ml. di H_2O_2 al 35 % in un litro. Questa soluzione è sufficiente per un notevole numero di analisi; è però opportuno rinnovarla giornalmente perché con il tempo si decompone l' H_2O_2 e quindi diminuisce la sensibilità del sistema indicatore. Il mescolamento dell'elettrolita viene garantito dal gas di eluizione e dall'agitatore magnetico disposto sul fondo della cella.

Coulombometro. — Può venire impiegato un qualunque dispositivo per la generazione di corrente costante; le misure sono state eseguite con un coulombometro che fornisce correnti da 1,2 a 50 mA con un errore massimo di 0,1 %, descritto in altro lavoro (6). Generalmente una corrente di circa

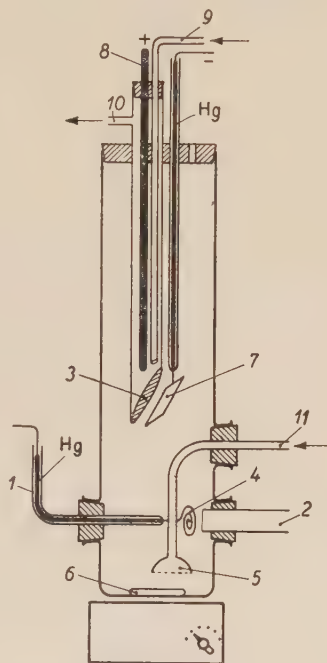


Fig. 2. — Cella per titolazione coulombometrica-potenzimetrica di componenti uscenti da colonna cromatografica.

1 elettrodo di platino, 2 ponte a KCIN collegato a elettrodo calomelano N, 3 membrana cellophane per dialisi, 4 spirale platino liscio, 5 setto poroso G_4 , 6 agitatore magnetico, 7 lamina di platino, 8 elettrodo di carbone, 9-10 circolazione liquido regione anodica, 11 ingresso gas proveniente da fornetto a colonna.

30 mA è stata osservata come la più conveniente con i flussi normalmente impiegati in cromatografia in fase gassosa.

PRINCIPIO DEL DISPOSITIVO. - Un filo di platino avvolto da una corrente di ossigeno si comporta come un elettrodo ad ossigeno e pertanto sensibile a variazioni di concentrazione idrogenionica. Il suo potenziale rispetto all'elettrodo a calomelano normale in una soluzione contenente l'elettrolita descritto in funzione degli ioni OH^- generati è riportato in fig. 3. Un tempo di generazione pari a 140-160'' di corrente ($I = 30 \text{ mA}$) fornisce una soluzione

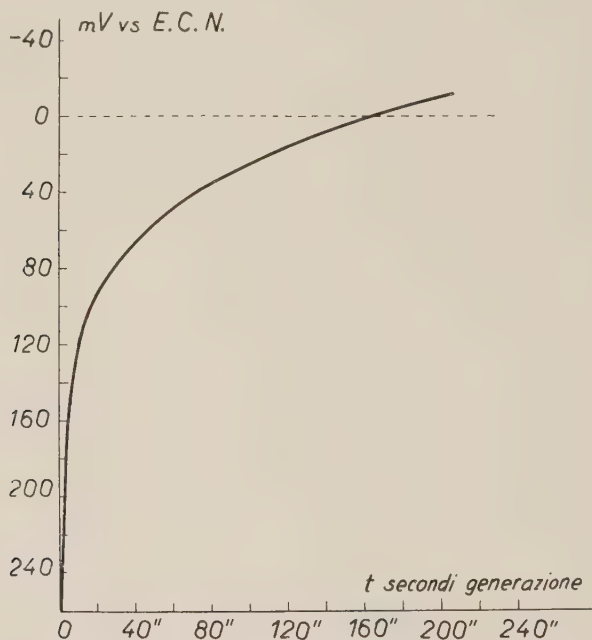
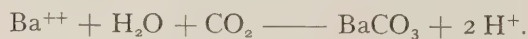


Fig. 3. - Potenziale elettrodo indicatore vs. el. calomelano N in funzione del tempo di generazione ($I = 30 \text{ mA}$) $mV \text{ o} = \text{pH } 9,86$.

L'arrivo di CO_2 in questa soluzione provoca la formazione di BaCO_3 e la messa in libertà di due ioni idrogeno secondo la reazione:



avente un $\text{pH} = 9,86$, misurato con elettrodo a vetro, in cui la differenza di potenziale fra l'elettrodo a ossigeno e quello a calomelano normale è uguale a zero. A questo pH l'elettrodo indicatore è ancora sufficientemente sensibile alle variazioni idrogenioniche della soluzione mentre l'anidride carbonica nell'elettrolita indicato vi viene quantitativamente assorbita. In soluzione più acida e più alcalina entrambe queste condizioni non vengono contemporaneamente rispettate.

La variazione del pH della soluzione provoca una variazione del potenziale dell'elettrodo ad ossigeno e quindi una deviazione del galvanometro;

si invia allora mediante il coulombometro una corrente costante per un tempo corrispondente ad un numero di secondi tale da riportare a zero il galvanometro. È necessario riportare il pH allo stesso valore iniziale in modo rapido e continuo durante l'arrivo dell'anidride carbonica, per impedire che la soluzione diventando meno alcalina, non assorba quantitativamente la CO_2 .

Determinazione Cromatografica. — La colonna cromatografica viene collegata alla cella descritta e vi viene fatta passare una quantità di corrente sufficiente ad azzerare il galvanometro (circa 140–160 secondi per $I = 30 \text{ mA}$). Prima di porre il campione sulla colonna si stabilisce il valore di flusso del gas eluente (circa 10–30 ml. al minuto) e, per accurate misure quantitative si deve determinare il valore del fondo e cioè il numero di secondi necessari ad azzerare nel tempo il galvanometro; infatti la fase liquida stazionaria della colonna cromatografica, sebbene poco volatile, ha sempre una certa tensione di vapore e si osserva nel tempo, un continuo e costante arrivo di una piccola quantità di CO_2 nella cella; con le fasi liquide sperimentate (silicone, paraffina) e nelle condizioni di flusso indicato tale valore è pari a circa 2 secondi ogni 5 minuti per $I = 30 \text{ mA}$. Tale valore è risultato più elevato nella determinazione degli acidi per la maggiore volatilità dell'acido stearico impiegato nella fase stazionaria (silicone + 10 % ac. stearico). Con

ogni nuova colonna o ogni nuovo fornello è necessario procedere al lavaggio di entrambi per qualche tempo per eliminare le impurezze combustibili presenti ed ottenere un valore di fondo pari a quello indicato.

Ruotando il rubinetto a due vie (4, fig. 1) si interrompe il flusso gassoso e si introduce la sostanza da cromatografare in cima alla colonna, mediante una micropipetta (Agla micrometer Syringe) o mediante un capillare. Si segue l'indice luminoso del galvanometro: ogni qualvolta un componente fuoriesce dalla colonna cromatografica, arriva della CO_2 nella cella e si ha una brusca deflessione del galvanometro che viene annullata inviando corrente mediante il coulombometro; e registrando mediante un orologio a co-

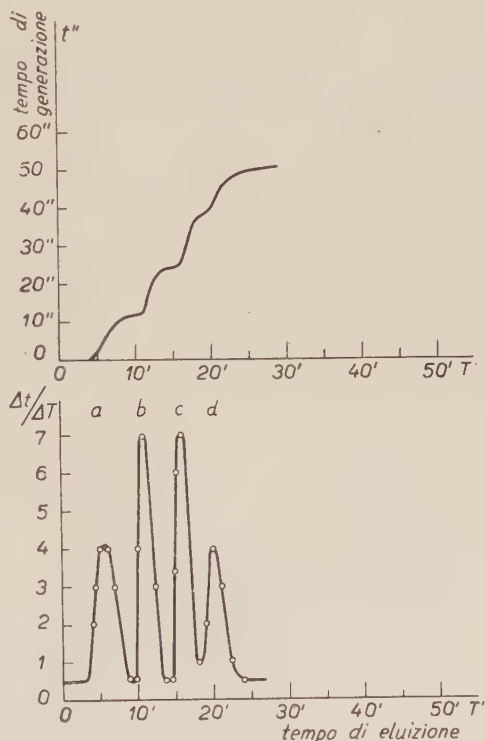


Fig. 4. — Cromatogramma in fase gassosa di miscela di alcool metilico.

(a), propilico N (b), butilico N (c) e isobutilico (d) dopo combustione a CO_2 su colonna celite-silicone. $T = 78^\circ \text{ C}$, flusso 40 ml/minuto.

mando magnetico (cronometro Jacquet tipo 309/C al decimo di secondo) i secondi di corrente di generazione.

Questi vengono riportati su di un grafico in funzione del tempo di eluizione in minuti primi.

Questo dispositivo è stato sperimentato su di un gran numero di composti ed alcuni risultati relativi alla separazione cromatografica di una serie di alcool metilico, propilico N, butilico N e isobutilico su colonna di celite

e 20% di silicone sono riportati in fig. 4. La curva inferiore è stata ottenuta per differenziazione grafica della curva superiore.

In fig. 5 differenti aliquote di miscele di alcool metilico, N propilico e N butilico sono state cromatografate sulla stessa colonna: le altezze degli scalini che corrispondono ai valori delle relative concentrazioni, espressi in secondi di corrente ($I = 30 \text{ mA}$) sono rispettivamente 10,5, 14,16, e 17,5, 22,5 e 25,5.

Le figg. 7 e 6 rappresentano i cromatogrammi di miscele di acido formico, acetico, propionico, butirrico ed iso-valerianico, ottenuti sulla stessa colonna (silicone + 10% ac. stearico) rispettivamente dopo combustione a CO_2 e con gorgogliamento diretto nella cella di titolazione eliminando il setto poroso. Si osserva nel primo caso un notevole fondo, che è invece trascurabile nel secondo caso. Entrambi i procedimenti

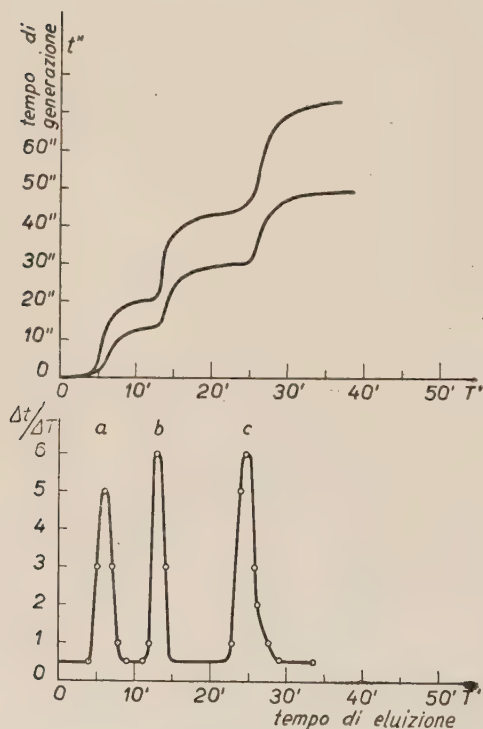


Fig. 5. - Cromatogrammi di differenti quantità di alcool metilico, propilico N, butilico N
 $T = 78^\circ \text{ F} = 28 \text{ ml/minuto}$.

possono comunque venire utilizzati per la determinazione di acidi grassi.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Il procedimento descritto presenta il vantaggio rispetto ai metodi integrali di poter eseguire direttamente dei dosaggi quantitativi dei singoli componenti uscenti dalla colonna notando semplicemente i secondi, in cui la corrente costante viene erogata (e quindi i microequivalenti) richiesti per titolare ciascun componente. È soltanto necessario che la sostanza contenga nella propria molecola almeno un atomo di carbonio e che la reazione di combustione dia luogo ad una quantità stechiometrica di anidride carbonica. Poiché il forno di combustione può venire escluso, il procedimento può venire

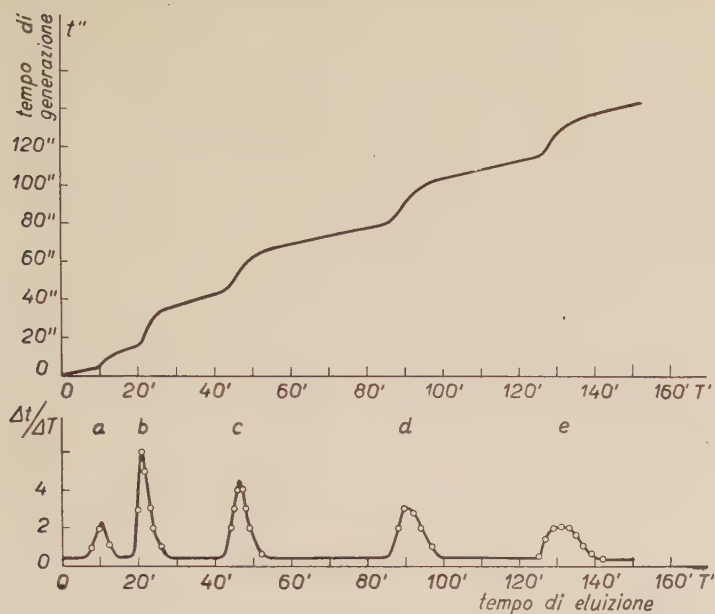


Fig. 6. - Cromatogramma di miscela di acidi grassi.

Formico (a), acetico (b), propionico (c), butirrico (d), isovalerianico (e) su colonna celite-silicone-10 % ac. stearico, titolati come tali. $T = 100^\circ$, Flusso = 35 ml/minuto.

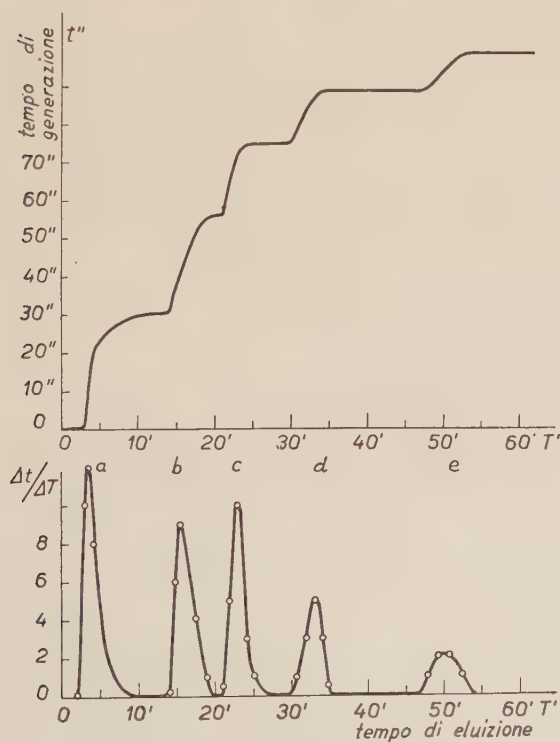


Fig. 7. - Cromatogramma della stessa miscela di acidi della fig. 6, titolati dopo combustione ad anidride carbonica. Flusso 28 ml/minuto.

impiegato per la diretta titolazione di acidi o anche in presenza di altri composti che avendo volume di ritenzione pressoché uguale sono separabili con semplicità per via cromatografica.

La sensibilità di questo sistema dipende naturalmente dalla sensibilità degli elettrodi indicatori; nella nostra apparecchiatura 1 secondo di corrente, di intensità pari a 30 mA, provoca uno spostamento di 10 divisioni del galvanometro ($= 0,2 \mu\text{A}$) e quindi una quantità pari a circa 0,2 microequivalenti può essere determinata con sufficiente accuratezza.

Poiché le dimensioni della cella non sono critiche è possibile ridurre le sue dimensioni ed ottenere una maggiore sensibilità: il limite ottenuto può comunque essere considerato soddisfacente per determinazioni quantitative di costituenti separati mediante cromatografia. Tenendo conto anche del più favorevole rapporto stechiometrico che si ha per effetto della combustione nella maggior parte dei casi, l'*optimum* di concentrazione corrisponde nelle condizioni impiegate a 1-50 microequivalenti di carbonio per ciascun componente.

Il potenziale elettrodico si stabilisce immediatamente ma, tenendo conto del tempo necessario perché la soluzione mantenuta in buona agitazione dall'agitatore magnetico si omogenizzi, dopo il passaggio di una certa quantità di elettricità si è osservato che il responso galvanometrico è costante dopo circa 15-20". Questo tempo può quindi essere considerato come una indicazione della prontezza dell'apparecchio.

Il dispositivo sperimentale può venire direttamente realizzato con spesa minima, in qualunque laboratorio interessato alla utilizzazione della cromatografia in fase gassosa, e non richiede alcuna complessa attrezzatura; il generatore di corrente costante (coulombometro) può venire sostituito con un sistema di batterie ad elevata capacità e da una resistenza.

Poiché questa apparecchiatura permette la determinazione quantitativa diretta dei componenti eluiti, può venire utilizzata in serie con dispositivi che utilizzano altri procedimenti di identificazione indiretta e fornire la diretta taratura dei primi.

È da tener presente inoltre che, la grande semplicità dell'apparecchiatura sperimentale permette di poter estendere il campo di indagine della cromatografia in fase gassosa a temperatura molto elevata, in quanto l'unica difficoltà è rappresentata dalla termostatazione della sola colonna cromatografica; in tal caso per sostanze facilmente ossidabili ad elevate temperature in luogo dell'ossigeno con il dispositivo, sperimentale descritto, può essere utilizzato un gas eluente inerte.

Chimica. — *Ricerche nel campo della spettrofotometria I. R. ed U. V. su alcuni acidi pirrolici* ^(*). Nota di MARISA SCROCCO e RODOLFO NICOLAUS, presentata ^(**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

In questo lavoro vengono resi noti i risultati di ricerche spettrofotometriche nell'I.R. e nell'U.V. eseguite su una serie di acidi pirrolici, molti dei quali si sono resi disponibili solo recentemente. Esse sono state svolte con l'intendimento di raccogliere indicazioni sugli effetti di coniugazione dei gruppi C=O carbossilici con l'anello pirrolico, sulle associazioni inter ed intramolecolari e metterle in relazione con quanto è noto sul pirrolo e sui pirrolsostituiti.

Le misure I.R. sono state eseguite sulle sostanze solide in sospensione in olio di vaselina ed interessano la zona dell'NH imminico 2,5-3,5 μ e la zona del C=O carbossilico 5-7 μ .

Nella zona 2,5-3,5 μ non è stato possibile eseguire misure in soluzione non essendo le sostanze in esame solubili in solventi utilizzabili in detta zona spettrale come CCl₄, CS₂, CHCl₃. Per quei termini della serie che presentavano una sufficiente solubilità in diossano, si sono potute eseguire misure in soluzione nel campo 5-7 μ . Le misure nell'U.V. sono state eseguite in soluzioni etanoliche.

DISCUSSIONE PER LA VIBRAZIONE DELL'NH.

Dai dati ottenuti nel campo di lunghezza d'onda 2,5-3,5 μ che interessano le frequenze di vibrazione dell'NH, si hanno per il 2,5-dicarbossi-pirrolo (IV) e per il 3-carbossi-pirrolo (I) frequenze dello stesso ordine di grandezza di quelle che sono state ottenute per il pirrolo sia con spettrografia Raman che infrarossa ^(*). Esse non sono interpretabili perché, non potendo eseguire per confronto misure in un solvente apolare, non può stabilirsi se esse sono dovute a proprietà della molecola oppure ad associazioni intermolecolari. Il 2-carbossi-pirrolo (II) ha una frequenza sensibilmente più bassa, ma ancora dello stesso ordine di grandezza. Valori completamente diversi si trovano invece per il 3-4-dicarbossi-pirrolo (III) e che sono inferiori ai precedenti di circa 200 numeri d'onda. Gli acidi (III), (IV) e (VI) presentano

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica Generale e Inorganica e di Chimica Organica e presso il Centro di Chimica Generale del C.N.R. dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) VENKATESWARAN, « Ind. J. Phys. », 5, 145 (1930); REITZ, « Z. physik. Chem. », 38, 275 (1938); BONINO, MANZONI-ANSIDEI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VI), 25, 489 (1937); MANZONI, ANSIDEI, « Ric. Sci. », 10, 328 (1939); LORD-MILLER, « J. Chem. Phys. », 10, 328 (1942); CHIORBOLI, MANARESI, « Gazz. Chim. It. », 84, 269 (1954); FUSON, JOSIEN, POWELL, UTTERBACK, « J. Chem. Phys. », 20, 145 (1952); MIRONE, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (VIII), 11, 365 (1951).

inoltre, tutti, allo stato solido, un doppietto che fa supporre che esistano nella molecola due tipi di associazione che nel 3-4-dicarbossi-pirrolo (III) sarebbero entrambi molto forti.

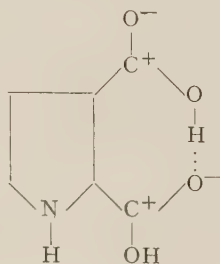
DISCUSSIONE PER LA VIBRAZIONE DEL C=O.

Nel campo di vibrazione del C=O si trovano, per le sostanze solide, quasi sempre due massimi i quali, per le sostanze disciolte in diossano, si assommano talvolta in uno. Per il 3-carbossi-pirrolo (I) si trovano i valori di 1650 e 1630 cm^{-1} per la fase solida ed il valore singolo di 1700 cm^{-1} per la soluzione in diossano.

Poiché è noto che il diossano dà una interazione del tipo acido-base con i carbossili e, quindi, tende a riordinare gli elettroni secondo la struttura dello ione carbossilato, esso ha sicuramente influenza sulla frequenza del C=O. Nella interpretazione comparativa dei dati delle nostre misure si suppone che il diossano abbia effetti analoghi su tutte le molecole che si considerano.

Per gli acidi (II) e (IV) si hanno anche, come si rileva dalla tabella, due massimi che in soluzione si assommano in uno. Questi due massimi rispecchiano due condizioni energetiche diverse che si risolvono in una condizione unica nelle soluzioni diossaniche.

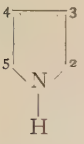
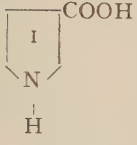
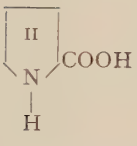
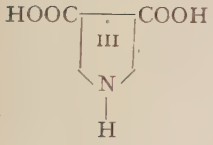
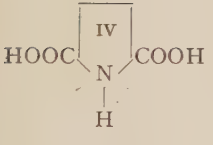
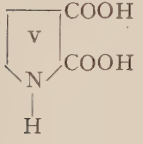
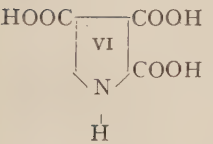
Per il 2,3-dicarbossi-pirrolo (V) come pure per il 2, 3, 5-tricarbossi-pirrolo (VII) permangono invece due massimi distinti anche in soluzione e senza grandi differenze di frequenza. La frequenza abbastanza alta del primo massimo non farebbe supporre un C=O associato mentre il secondo massimo permane anche in soluzione ad un valore di frequenza notevolmente più basso del primo. A questo punto le spiegazioni possibili vanno collegate a due condizioni energetiche diverse dei C=O nel pirrolo, non imputabili tanto a chelazioni intermolecolari quanto ad una associazione intramolecolare tra i due carbossili vicini che si legherebbero con un ponte idrogeno secondo uno schema che può essere rappresentato in questo modo:



e che conferirebbe ai due legami $\text{C}^+ \text{---} \text{O}^-$ una polarità differente, consentendo due diverse possibilità di coniugazione tra il carbossile e l'anello pirrolico.

Al fine di considerare meglio tali possibilità di coniugazione, può essere interessante un confronto tra le rilevazioni spettrofotometriche nell'infrarosso e quelle nell'ultravioletto per le sostanze in esame.

TABELLA.

Formula	Ultravioletto		Infrarosso		
	λ_{\max}	ϵ_{\max}	$\nu_{\text{N-H}}$ cm^{-1}	$\nu_{\text{C=O}}$ cm^{-1} in olio	$\nu_{\text{C=O}}$ cm^{-1} in diossano
	210	16.000	3417	—	—
	245	4.800	3417	1650 1630	1700
	262	12.000	3370	1650 1629	1677
	243 259	6.900 7.300	3184 3100	1644 1626	ins.
	272 (280) (*)	20.100 (17.000)	3448 3370	1654 1628	1694
	243 282	2.900 4.200	— —	1652 1622	1700 1620
	279	8.000	3346 3170	—	ins.

(*) I valori in parentesi sono quelli dei massimi poco netti.

Segue: TABELLA.

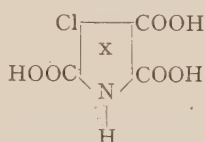
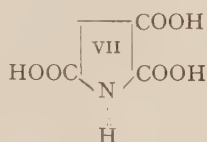
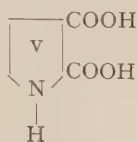
Formula	Ultravioletto		Infrarosso		
	λ_{\max}	ϵ_{\max}	$\nu_{\text{N-H}}$ cm^{-1}	$\nu_{\text{C=O}}$ cm^{-1} in olio	$\nu_{\text{C=O}}$ cm^{-1} in diossano
$\begin{array}{c} \text{COOH} \\ \text{VII} \\ \text{HOOC} \diagdown \text{N} \diagup \text{COOH} \\ \\ \text{H} \end{array}$	261	10.200	3204	1686	1700
	270	10.300	—	1610	1614
$\begin{array}{c} \text{HOOC} \diagdown \text{COOH} \\ \text{VIII} \\ \text{HOOC} \diagdown \text{N} \diagup \text{COOH} \\ \\ \text{H} \end{array}$	277	7.600	3253	1651	1700
$\begin{array}{c} \text{CH}_3 \diagdown \text{COOH} \\ \text{IX} \\ \text{HOOC} \diagdown \text{N} \diagup \text{COOH} \\ \\ \text{H} \end{array}$	264	10.000	3257	1680	ins.
	278	9.500	—	1594	
$\begin{array}{c} \text{Cl} \diagdown \text{COOH} \\ \text{X} \\ \text{HOOC} \diagdown \text{N} \diagup \text{COOH} \\ \\ \text{H} \end{array}$	263	9.600	3225	1680	1703
	(278)	(7.000)	—	1600	1623

Le relazioni tra inibizione sterica di risonanza e spettri elettronici sono state interpretate da Braude e coll. ⁽²⁾ secondo alcuni principi che possono essere riassunti nel seguente modo. L'assorbimento nell'U. V. può essere riguardato come una transizione da uno stato fondamentale ibrido al quale le forme di risonanza a più alto contenuto energetico portano un relativamente piccolo contributo, ad uno stato eccitato dove tali forme energetiche (particolarmente forme di risonanza ionica) portano un grande contributo. Un cambiamento nella struttura il quale aumenti la coniugazione e, quindi, abbassi il contenuto energetico delle forme a più alta risonanza, normalmente diminuisce l'energia dello stato eccitato più di quella dello stato fondamentale (in quanto il contributo di queste forme è diverso nei due stati) e, quindi, diminuisce l'energia di eccitazione: tale cambiamento aumenta la lunghezza d'onda associata con la transizione elettronica.

(2) BRAUDE, JONES, KOCH, RICHARDSON, SONDHEIMER E TOOGOOD, « J. Chem. Soc. », 1890 (1949).

Anche cambiamenti strutturali i quali tendano a diminuire la planarità del sistema coniugato avranno delle influenze nelle proprietà di assorbimento nell'U. V. Se l'influenza sterica derivante dalla non planarità è relativamente piccola, allora la transizione caratteristica del cromoforo può essere ristretta agli stati vibrazionali nei quali i legami sono sufficientemente estesi da permettere un largo grado di complanarità.

Applicando le considerazioni precedenti e confrontando i dati ottenuti nell'infrarosso e nell'ultravioletto è interessante rilevare che gli acidi (V) (VII) (X) i quali nell'infrarosso



sembrerebbero i più perturbati per la sensibile differenza tra le due frequenze del C=O, e, quindi, per i più bassi valori di frequenza del secondo massimo, presentano nell'U. V. due bande ben distinte che nelle altre sostanze non sono più così nettamente separabili o, talvolta, si assommano in una. Sappiamo che un aumento nella coniugazione diminuisce l'energia di eccitazione con conseguenti spostamenti batocromici. Dal confronto si nota che quelle sostanze che presentano una sola banda I. R. o due bande sufficientemente vicine (che in soluzione diossanica si assommano in una) danno nell'U. V. una sola banda con effetto batocromo abbastanza in buon accordo con la situazione vibrazionale del C=O rilevabile dalle misure infrarosse su soluzione diossanica.

Per quelle sostanze che presentano, invece, una forte differenza fra le due frequenze del C=O nell'I. R., si trovano parimenti due bande nell'U. V. che potrebbero interpretarsi come due situazioni di coniugazione energeticamente differenti. Per il (IX), dalle misure U. V. si prevede una situazione del tutto analoga, ma non si hanno purtroppo i corrispondenti valori nell'I. R. non essendo questa sostanza sufficientemente solubile in diossano. Anche per il 3, 4-dicarbossi-pirrolo (III) non è possibile una discussione comparativa poichè anche per questo mancano i dati infrarossi in soluzione; ma si può notare anche in questo caso uno sdoppiamento nella banda U. V. che porta a supporre anche per questo composto, diverso dai precedenti per la posizione dei carbossili, una chelazione intramolecolare vicinale.

Completamente diversa, invece, si prospetta la situazione per l'acido tetracarbonico (VIII) il cui unico valore di frequenza I. R. e la banda unica U. V. avrebbero potuto far supporre una associazione completa tra i vari carbossili con l'ultimo C=O legato all'idrogeno del gruppo imminico NH; ma l'alto valore di frequenza infrarossa in soluzione sembra escludere la possibilità di un qualsiasi legame intramolecolare, mentre la più bassa frequenza (ugualmente unica) nel solido farebbe pensare a chelazioni tra molecole diverse e che interesserebbero in ugual maniera tutti i gruppi carbossilici presenti.

I valori delle estinzioni molecolari nell'U.V. analizzati comparativamente completano, in certo senso, il quadro per quelle irregolarità che appaiono in questo schema generale imputabili con ogni probabilità a perturbazioni di ordine sterico, tenendo conto della non trascurabile complessità delle molecole più grandi.

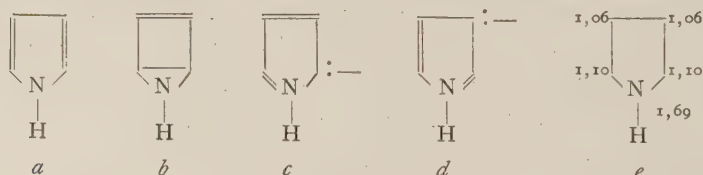
È interessante a questo punto un confronto tra gli spettri degli acidi isomeri tra loro. Nei due acidi monosostituiti si osserva nel 2-carbossi-pirrolo (II) confrontato con il 3-carbossi-pirrolo (I) uno spostamento di banda nell'U. V. verso lunghezze d'onda maggiori ed un maggior valore del coefficiente di estinzione molecolare, fenomeni che indicano per questo composto una interazione elettronica maggiore ed un maggior numero di transizioni permesse (fig. 1).

Per quel che riguarda i tre acidi bicarbossilici, non abbiamo dati di infrarosso adeguati per il (III) il quale invece nell'U. V. presenta due massimi distinti. Il (IV) presenta nell'I. R. in fase solida due massimi ben definiti a 1654 e 1628 cm^{-1} ed in soluzione diossanica un assorbimento a 1694 cm^{-1} abbastanza largo che potrebbe involupparne un secondo molto vicino il quale non appare risolto, mentre il (V) presenta in soluzione diossanica due massimi ben definiti e distanziati fra loro a 1700 e 1620 cm^{-1} . Parallelamente nell'U. V. il (IV) ha un massimo ben risolto a $272\text{ m}\mu$ ed un altro molto vicino ($280\text{ m}\mu$) e parzialmente involuppato nel primo, mentre il (V) ne ha due ben definiti a 243 e $282\text{ m}\mu$ (fig. 2).

Anche in questo caso sembrerebbero prospettarsi due possibilità di coniugazione energeticamente differenti. Nel caso (IV), come era prevedibile, le due possibili coniugazioni se anche sussistono sono energeticamente abbastanza vicine, mentre nel (V), dove i due carbossili sostituenti occupano due posizioni diverse nella molecola (2 e 3), la differenza energetica nella coniugazione è più nettamente sentita.

In analogia ai composti (I e II) è interessante inoltre rilevare la notevole differenza nei valori dell'estinzione molecolare che per il (IV) sono $\epsilon_1 = 20.100$ ed $\epsilon_2 = 17.000$ e per il (V) $\epsilon_1 = 2.900$ ed $\epsilon_2 = 4.200$.

I risultati delle nostre misure sembrano avvalorare l'ipotesi, formulabile anche in base a prove di reagibilità ed ai diversi valori di distribuzione di carica nelle posizioni 2 e 3, che tra le possibili configurazioni del pirrolo:



il contributo alla energia di risonanza delle forme *c* e *d* non sia uguale; si rileva inoltre che negli acidi carbossilici del pirrolo si ha una interazione associativa interna, del tipo legame idrogeno, tra carbossili in posizione orto.

Nel gruppo degli acidi pirrol-tricarbossilici sostituiti con H, CH₃, Cl, in posizione 4 si osserva che mentre le condizioni energetiche del C=O permangono abbastanza simili sia in fase solida che in soluzione, si hanno variazioni sensibili nei valori di frequenza dell'NH.

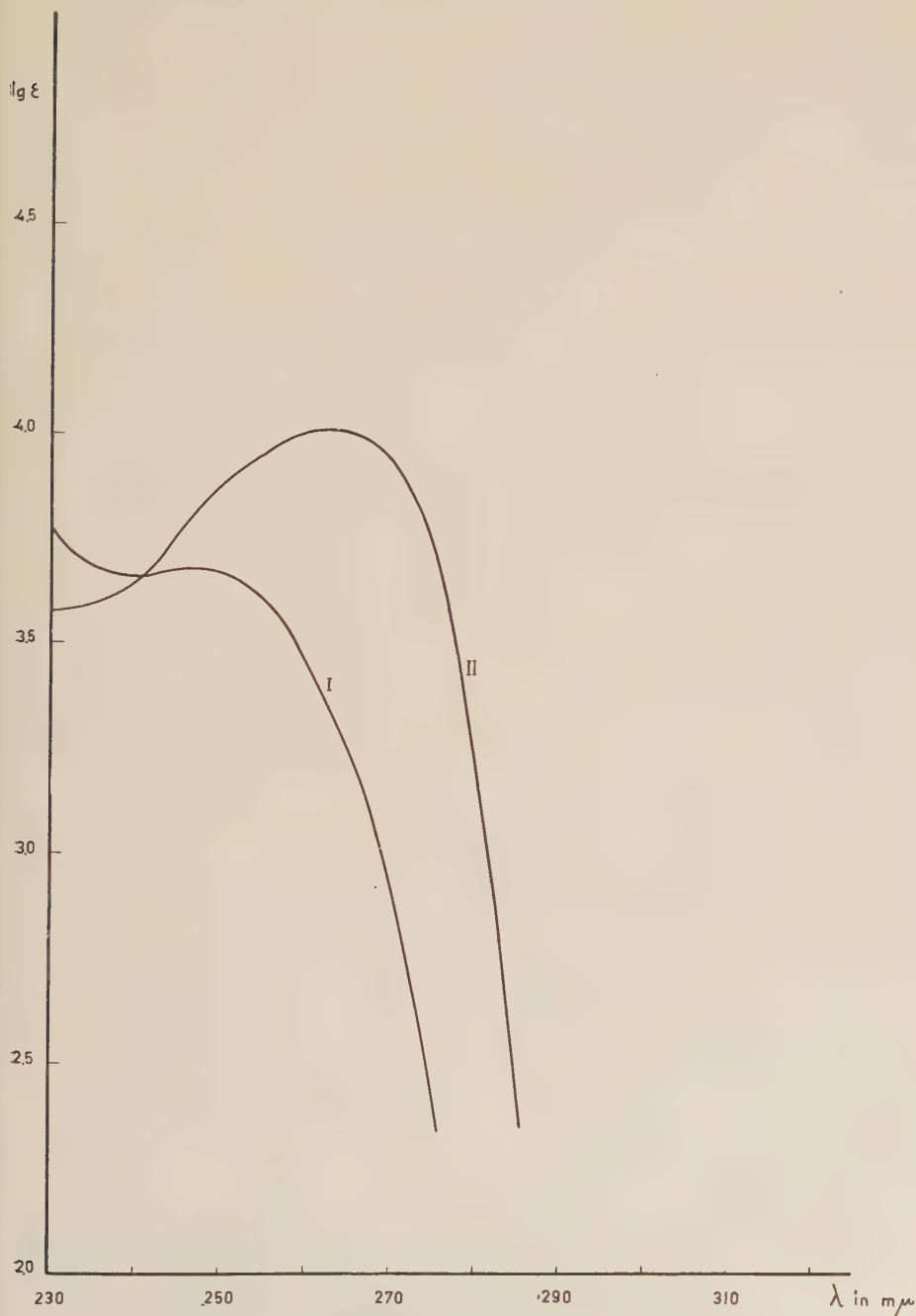


Fig. 1. - Spettri di assorbimento all'ultravioletto.

I: 3-carbossi-pirrololo; II: 2-carbossi-pirrololo.

La situazione energetica dell'etero-atomo è quella, quindi, che appare più sensibile a sostituzioni nella molecola. Tale fenomeno è stato meglio studiato in un lavoro parallelo su una serie di esteri pirrolici sostituiti in 2

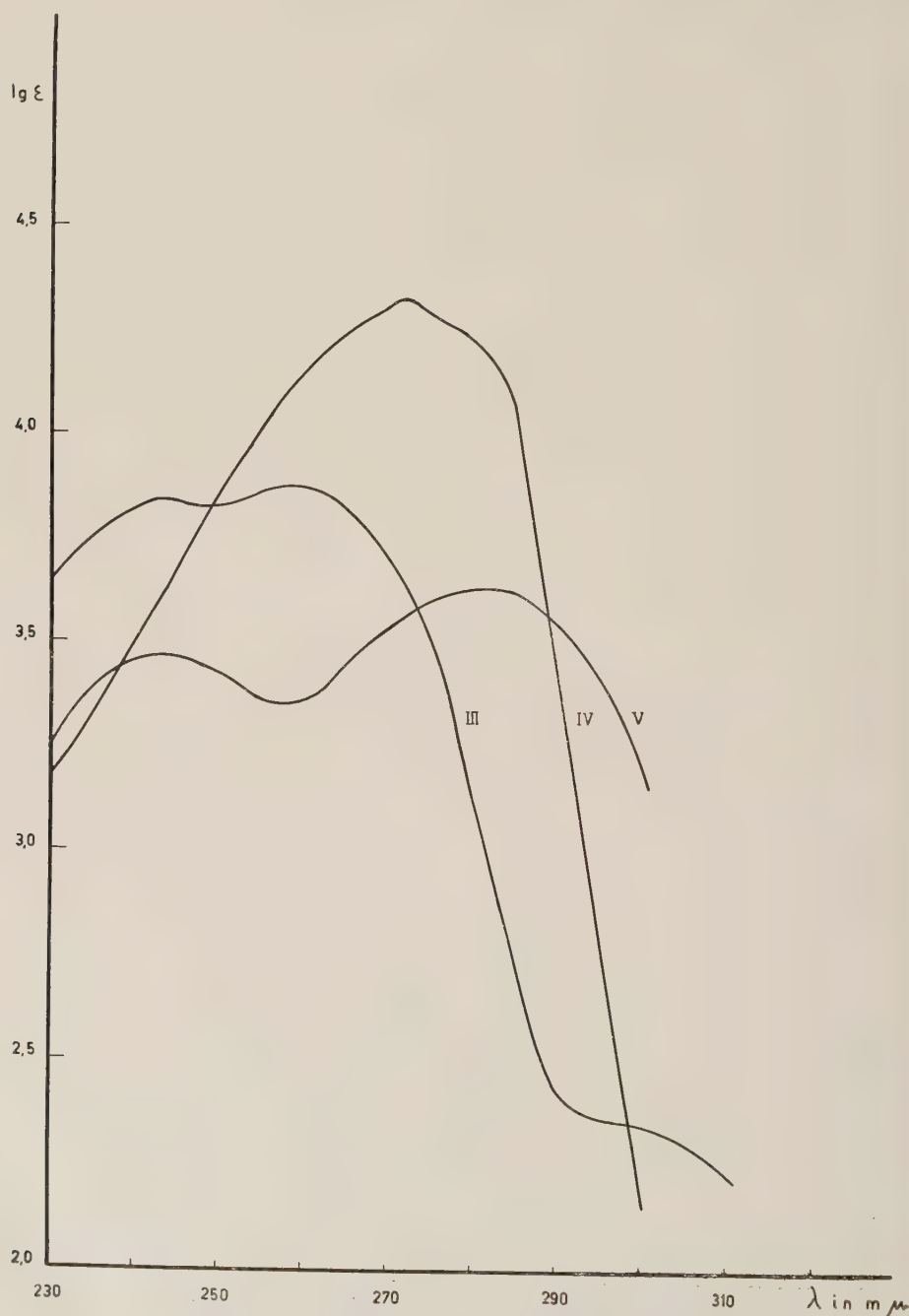


Fig. 2. - Spettri di assorbimento all'ultravioletto.

III: 3,4-dicarbossi-pirrolo; IV: 2,5-dicarbossi-pirrolo; V: 2,3-dicarbossi-pirrolo.

con H, CH₃, CHO, COOH, Br, Cl, dove le variazioni di frequenza dell'NH vengono confrontate con i rispettivi valori di pK_a .

PARTE SPERIMENTALE

PREPARAZIONE DEI COMPOSTI ESAMINATI.

3-carbossi-pirrolo (I). — È stato ottenuto per ebollizione con potassa acquosa del 3-carbetossi-4-carbossi-pirrolo (vedi R. Nicolaus e L. Mangoni, Nota V, *Sugli acidi pirrolcarbossilici* in corso di stampa sulla « Gazz. Chim. It. »). Si purifica per sublimazione in alto vuoto e successiva cristallizzazione dal benzolo. Aghetti bianchi p. f. 146°–147°.

2-carbossi-pirrolo (II). — È stato preparato secondo B. Oddo, « Gazz. Chimica Ital. », 39, 656 (1909). Piccoli aghetti bianchi p. f. 203°–205° dec. Si altera facilmente all'aria.

3, 4-dicarbossi-pirrolo (III). — Preparato secondo Kornfeld e Jones, « J. Org. Chem. », 16, 1671 (1954). Si purifica per cristallizzazione da molto alcool. Aghi bianchi che si decompongono intorno ai 290°.

2,5-dicarbossi-pirrolo (IV). — Ottenuto per riduzione catalitica con H₂ e Ni-Raney del 3,4-dicloro-2,5-dicarbossi-pirrolo (ved. Nota VI, *Sugli acidi pirrolcarbonici* in corso di pubblicazione nella « Gazz. Chim. Ital. »). Si purifica per cristallizzazione da miscele idroalcoliche. Aghi bianchi che si decompongono intorno ai 265°.

2,3-dicarbossi-pirrolo (V). — Ottenuto per saponificazione con KOH alcoolica dal 2-carbossi-3-carbetossi-pirrolo (ved. Nota VI, *Sugli acidi pirrolcarbonici*, loc. cit.). Si purifica per cristallizzazione da acqua: lunghi aghi bianchi contenenti 1 mol. di acqua di cristallizzazione che perde in stufa a 110°. Anidro fonde a 225° con dec.

2,3,4-tricarbossi-pirrolo (VI). — Ottenuto per saponificazione del 2,3,4-tricarbetossi-pirrolo preparato per ciclizzazione dell'ossalil-formil-succinato di etile con acetato ammonico (ved. Nota V, *Sugli acidi pirrolcarbonici*, loc. cit.). Si purifica per cristallizzazione dall'acido acetico. Lamine rettangolari incolori infusibili fino a 300°.

2,3,5-tricarbossi-pirrolo (VII). — È stato preparato secondo R. Nicolaus, « Gazz. Chim. Ital. », 83, 239 (1953). Si purifica per cristallizzazione dall'acido acetico. Tozzi prismi bianchi infusibili fino a 300°.

2,3,4,5-tetracarbossi-pirrolo (VIII). — È stato ottenuto secondo Nicolaus e Oriente, « Gazz. Chim. Ital. », 84, 230 (1954). Tozzi aghetti incolori dal diossano infusibili fino a 300°.

4-metil-2,3,5-tricarbossi-pirrolo (IX). - Si ottiene secondo Panizzi e Nicolaus, « Gazz. Chim. Ital. », 82, 435 (1952). Si purifica per cristallizzazione da acetone e acqua. Aghetti bianchi che fondono con decomposizione intorno ai 290°.

4-cloro-2,3,5-tricarbossi-pirrolo (X). - È stato preparato secondo Nicolaus, « Gazz. Chim. Ital. », loc. cit. Si purifica per cristallizzazione dal diossano. Aghetti bianchi infusibili fino a 300°.

Tutti gli acidi esaminati sono cromatograficamente puri.

MISURE SPETTROFOTOMETRICHE.

Le misure spettrofotometriche nell'I. R. sono state eseguite con un apparecchio Beckmann IR₂ montato con prisma di fluoruro di litio per il capo di lunghezze d'onda da 2 a 5 μ e con prisma di cloruro di sodio per il campo di lunghezza d'onda 5-15 μ .

Le misure sono state effettuate in soluzione diossanica e, per lo stato solido, in sospensione in olio di vaselina.

Le misure nell'U. V. sono state eseguite con un apparecchio Beckmann D. U. in soluzioni etanoliche.

Chimica. - *Sulla « reversibilità » polarografica di alcuni sistemi azo-idrazo (*)*. Nota di ANTONIO FOFFANI, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

È noto che la « reversibilità » di un sistema organico ossido-riduttivo risulta generalmente tanto migliore quanto più lungo è il tempo lasciato al sistema per avvicinarsi alla condizione di equilibrio, qualora naturalmente in questo tempo non intervengano fenomeni secondari; in questo senso si ottengono quindi risultati migliori per via potenziometrica che per via polarografica od oscillografica. Il dato polarografico di reversibilità viene generalmente ricavato: *a)* dall'analisi logaritmica delle curve corrente/potenziale, *b)* dal confronto dei dati così ottenuti con quelli deducibili applicando l'equazione di Ilkovic al processo ossido-riduttivo in esame, *c)* dal confronto, ove possibile, dei gradini di riduzione catodica della forma ossidata e di ossidazione anodica della corrispondente forma ridotta.

Un esempio tipico al riguardo è offerto dai sistemi azo-idrazo. Limitandoci per il momento al caso del sistema azobenzene-idrazobenzene, che è quello più studiato, un esame dei risultati finora ottenuti [1] mette subito in

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università di Padova e Centro di Studio per la polarografia del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

luce notevoli discordanze, la cui origine, ad un esame più attento, non appare attribuibile ad un fattore unico.

Si osserva infatti sperimentalmente che:

a) la forma cis dell'azobenzene presenta generalmente [1 *b*, 1 *d*] un potenziale di semigradino funzione pressoché lineare del pH, fin nell'intorno di pH 12, con pendenza normale di circa 60 mV per unità di pH; solo in ambiente fortemente alcalino si osservano anomalie;

b) il potenziale di semigradino della forma trans corre, in tutto il campo di pH esaminato, coincidente [1 *b*] o parallelo [1 *d*] ⁽¹⁾ a quello della forma cis, se la capacità tamponante polarografica ⁽²⁾ dell'elettrolita supporto è sufficientemente elevata; ed è importante notare che la diminuzione, in ambiente neutro od alcalino, di tale capacità tamponante esercita un'influenza molto maggiore sulla forma trans che su quella cis (Hillson e Birnbaum [1 *b*]); il verificarsi di questo effetto selettivo è un significativo indizio che il tamponamento del mezzo non è il solo o predominante fattore ai fini della reversibilità polarografica del processo elettrodico;

c) miscele azobenzene-idrazobenzene presentano [1 *d*] un gradino catodico-anodico unico ⁽³⁾ solo in un limitato campo di pH (da 2 a 6) e con impiego di particolari tamponi (acido formico-formiato e acido acetico-acetato) a concentrazione relativamente elevata della specie protogena; con impiego di tamponi del campo neutro o alcalino, e con i tamponi secondo Britton-Robinson in campo acido ⁽⁴⁾ si osserva [1 *c*] che, analogamente a quanto sopra detto per il sistema cis-trans, il gradino della specie azo- viene poco influenzato, mentre quello della specie idrazo- slitta in misura notevole verso valori meno negativi.

Da questo esame dei fatti sperimentali si può concludere che indubbiamente il rapporto tra la concentrazione della specie protogena del tampone e la concentrazione di depolarizzatore esercita un ruolo importante (ved. anche [2]) ai fini della velocità di rifornimento all'interfase degli ioni idrogenici richiesti dal processo elettrodico, ma che questo *non è il solo fattore* che intervenga in tale processo ossido-riduttivo. Occorre infatti tener conto evidentemente anche dell'influenza esercitata dalla disposizione sterica della molecola e dal sistema coniugato di cui l'azogruppo fa parte, sulla velocità del processo primario elettrodico; tale effetto dovrebbe essere rivelabile in modo particolarmente evidente dall'esame comparativo di azo- ed idrazo-benzene sostituiti o di azo- ed idrazo-derivati eterociclici.

(1) Con leggero slittamento nel senso negativo; è probabile che questo slittamento non sia da attribuire ad una manifestazione polarografica della differenza di energia libera dei due isomeri, ma ad un residuo di « irreversibilità ».

(2) Per una discussione sul significato di questa grandezza vedi ad esempio [2].

(3) E in corrispondenza l'analisi logaritmica dei gradini fornisce valori in ragionevole accordo con quanto prevedibile per un processo bivalente.

(4) Che pure presentano, in questa regione di pH, una capacità tamponante polarografica abbastanza elevata [2], trattandosi di specie protogene costituite da molecole indissociate o da coppie ioniche, e quindi poco influenzate dal campo elettrico catodico od anodico.

A questo scopo abbiamo iniziato lo studio degli equilibri acido-base e del comportamento polarografico delle 2-, 3- e 4-azofenil-piridine in forma trans e dei corrispondenti idrazo-derivati ed N-ossidi [3]. Le misure polarografiche verranno eseguite, per ogni isomero, in una serie di soluzioni di capacità tamponante polarografica gradualmente crescente e, a pari capacità tamponante, in soluzioni di differenti pH e realizzate con differenti tipi di tamponi; in corrispondenza verrà osservata, per i tre isomeri e per i corrispondenti N-ossidi, l'entità della separazione dei gradini delle specie azo- e idrazo-, considerata come misura della « reversibilità » dei corrispondenti processi elettrodici. Dovrebbe essere possibile in tal modo mettere in evidenza l'importanza relativa dei due fattori sopra menzionati sulla velocità globale del processo elettrodico. Sui risultati di queste misure verrà riferito in una Nota successiva.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] a) SHIKATA M. e TACHI I., « Mem. Coll. Agr. Kyoto Imp. Univ. », 17, 45 (1931); « Bull. Agr. Chem. Soc. Japan », 8, 75 (1932); « J. Electrochem. Assoc. Japan », 2, 275 (1934); WINKEL A. e SIEBERT H., « Ber. », 74 B, 670 (1941); VOLPI A., « Gazz. Chim. Ital. », 77, 473 (1947);
 b) HILLSON P. J. e BIRNBAUM P.P., « Trans. Far. Soc. », 48, 478 (1952); CASTOR C. R. e SAYLOR J. H., « J. Am. Chem. Soc. », 75, 1427 (1953);
 c) FOFFANI A. e FRAGIACOMO M., « Ricerca Sci. », 22, Suppl., 139, 155 (1952);
 d) WAWZONEK S. e FREDRICKSON J. D., « J. Am. Chem. Soc. », 77, 3985, 3988 (1955).
 [2] LANZA P., « Proc. I int. polar. congr. », Praga I, 155 (1951); « Ricerca Sci. », 22, Suppl., 27 (1952).
 [3] COLONNA M. e RISALITI A., « Gazz. Chim. Ital. », 85, 1148, 1508 (1955); 86, 288 (1956); 86 (1956), in corso di stampa; FOFFANI A., FORNASARI, E. e GRANDI F., « Ricerca Sci. », 26, Suppl., 156 (1956).

Fisiologia vegetale. — *Attività del sistema ossidativo TPN-glutatione-acido ascorbico in preparati mitocondriali di pisello* (« *Pisum sativum* ») (*). Nota di ERASMO MARRÈ e GIANNINO LAUDI, presentata (**) dal Socio S. TONZIG.

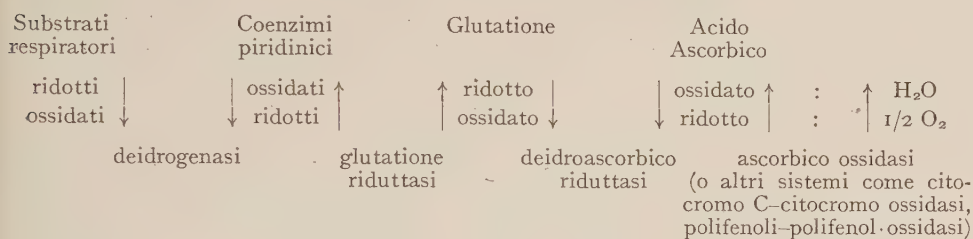
Numerose ricerche eseguite negli ultimi anni hanno dimostrato la presenza e la larga diffusione, nelle piante superiori, di una catena ossidoriduttiva capace di trasportare idrogeno (o elettroni) da substrati respiratori all'ossigeno tramite, successivamente, il trifosfopiridinucleotide, il glutatione e l'acido ascorbico [1-7]. Questa via di trasporto d'idrogeno, nettamente distinta da quella classica coenzimi piridinici-flavoproteine-citocromi, sembra rivestire un compito di non secondaria importanza nell'ambito non solo del metabolismo ossidativo dei tessuti eterotrofi della pianta, ma anche, e forse soprattutto, in quello della funzione fotosintetica: lavori recenti dimostrano infatti

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

una particolare attività del sistema tanto in estratti di tessuti verdi quanto in sospensioni di cloroplasti separati ed isolati [8, 9, 10]. L'importanza di questa via ossidoriduttiva appare ulteriormente accentuata dai reperti che indicano come (almeno in particolari condizioni, e contrariamente a quanto appariva da risultati precedenti) non solo il trifosfopiridinnucleotide, ma anche il difosfopiridinnucleotide possa assumersi il ruolo di sistema trasportatore di elettroni dai substrati respiratori al glutatione [10, 11].

L'insieme di questi reperti sembra quindi esaurientemente documentare l'attività, nella pianta, di una sequenza così schematizzabile:



D'altra parte, per quanto lo studio delle caratteristiche biochimiche dei vari anelli del sistema e dei meccanismi enzimatici in esso coinvolti sia ormai in una fase ben progredita, pure ancora totalmente oscuri restano alcuni aspetti che sono essenziali alla comprensione della sua portata e del suo significato fisiologico. In particolare, un problema fondamentale appare quello del rendimento energetico del trasporto di elettroni lungo questa catena (nella respirazione come nella fotosintesi) in confronto a quello di sistemi del tipo flavoproteine-citocromi.

Altro aspetto di pari importanza è quello della localizzazione intracellulare del sistema, e cioè se esso debba intendersi legato a particolari elementi, come plastidi e mitocondri, o diffuso nella fase solubile del plasma: conoscenza questa di ovvia importanza non solo da un punto di vista fisiomorfologico generale, ma anche da quello della comprensione dei suoi rapporti con altri meccanismi ossidoriduttivi simultaneamente presenti negli stessi tessuti. I dati a questo proposito sono scarsi, e non del tutto coerenti tra loro: mentre infatti la via TPN-glutazione-ascorbico sembra certamente presente nei cloroplasti [8, 9], altri dati la localizzano, in tessuti non clorofilliani, come attiva esclusivamente nella frazione solubile del plasma, ed assente dai mitocondri [7].

Da tempo interessati al significato fisiologico di questo sistema, abbiamo sviluppato, nella presente ricerca, alcuni dati che ne suggerivano l'attività anche in particelle plasmatiche insolubili di piante superiori. I risultati ottenuti documentano la presenza della catena ossidoriduttiva TPN-glutazione-ascorbico in preparati mitocondriali ⁽¹⁾ ripetutamente sottoposti a lavag-

(1) Il termine « preparato mitocondriale » si riferisce qui, secondo la consuetudine generale, all'insieme di particelle plasmatiche insolubili sedimentabili, in soluzione di saccarosio isoosmitica, per centrifugazione tra 1000 e 20.000 g. Questi preparati possono contenere, oltre ai mitocondri propriamente detti, anche particelle di altra natura, come plastidi in via di differenziazione, ecc.

gio, e forniscono pure una prima indicazione circa l'associazione di fenomeni fosforilativi (e quindi della produzione di energia metabolicamente utilizzabile) al gioco di ossidoriduzioni che la attività di questa catena comporta.

MATERIALI e METODI.

Come materiale abbiamo utilizzato la parte apicale (circa 5 mm.) di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum*, var. Alaska) coltivate su segatura in camera oscura termoregolata a 25 gradi C., di età di otto giorni dalla semina. I preparati mitocondriali sono stati ottenuti da questo materiale seguendo, nelle linee generali, la tecnica delineata da Laties [12]: gli apici, appena raccolti, venivano triturati in mortaio con sabbia, in presenza di due volumi di saccarosio 0,6 M e Tris 0,15 M, pH 6,9; l'omogeinato passato su garza e centrifugato a $1000 \times g$. per 5 min. primi, il sopranatante raccolto e centrifugato per 20 min. primi a $20.000 \times g$. I mitocondri sedimentali venivano risospesi in 20 volumi di soluzione di saccarosio e Tris, rispettivamente 0,4 M e 0,1 M, risedimentati a $20.000 \times g$. per 15 min. primi, risospesi ancora in 20 volumi della stessa soluzione e risedimentati; quindi risospesi per la terza volta in saccarosio e Tris, e i vari substrati e cofattori aggiunti, come indicato nelle singole esperienze. Tutte queste operazioni, a partire dalla triturazione del materiale in mortaio, venivano condotte in camera fredda a temperatura tra 0 e 3 gradi C. Nelle esperienze in cui era richiesta l'assenza di ossigeno durante l'incubazione dei preparati enzimatici con i diversi substrati, questa avveniva in provette da centrifuga disposte in un recipiente evacuato mediante un'efficiente pompa ad olio. L'ossidazione dell'acido ascorbico ad opera dell'ossigeno atmosferico, in presenza di mitocondri, è stata seguita su prove agitate, all'aria, al ritmo di 80 oscillazioni al minuto primo.

La riduzione del glutatione ossidato è stata misurata determinando secondo Grunert e Phillips [13] l'aumento della forma ridotta; quella dell'acido deidroascorbico ad ascorbico determinando l'acido ascorbico con il normale metodo al 2,6-diclorofenolindofenolo.

Come reagenti abbiamo usato: trifosfopiridinnucleotide forma ossidata (TPN) e forma ridotta (TPNH), difosfopiridinnucleotide forma ridotta (DPNH), controllati spettroscopicamente ed enzimaticamente e di purezza rispettivamente pari all'80,85 e 83 %, trisidrossimetilaminometano (Tris) adenosindifosfato (ADP) e glucosio-6-fosfato (Gl-6-P) tutti della ditta «Sigma»; glutatione ridotto (GSH) ed ossidato (GSSG) della «Schwarz»; e gli altri reagenti della ditta «Merck». L'acido deidroascorbico (DHA) è stato da noi preparato dall'acido ascorbico (AA) Merck per ossidazione con lievissimo eccesso di bromo, seguita da allontanamento del bromo residuo in corrente di azoto.

ESPERIENZE E RISULTATI.

A) *Presenza di una TPN-glutatione riduttasi nei preparati mitocondriali.*

I dati della tabella I mostrano come preparati mitocondriali di pisello, esaurientemente lavati come detto sopra, siano capaci di attivamente ridurre il glutatione ossidato non solo trasferendovi idrogeno dal TPNH, ma anche in presenza di TPN^+ , purché al sistema sia aggiunto un substrato capace di ridurre il TPN^+ a TPNH: condizione che è adempiuta dal Gl-6-P e dalla presenza, già rilevata in altri lavori [14, 15], di una notevole attività glucosio-6-fosfato deidrogenasica in questo materiale.

Dalla stessa tabella I si rileva come, almeno in queste condizioni, il DPNH non sostituisca il TPNH nella sua qualità di substrato capace di cedere di idrogeno al glutatione.

TABELLA I.

TPNH-Glutatione riduttasi in preparati mitocondriali di « *Pisum sativum* ».

Incubazione sotto vuoto. Temperatura 18 gradi C. Dati come media di due determinazioni. Mitocondri 3 grammi peso fresco per prova (5,8 mg. proteine) Volume finale cc. 2,5.

Aggiunte	γ GSH trovato	Incremento
Tempo 0 min. primi. Nessuna.	39	—
Tempo 60 min. primi. Nessuna	39	0
» » GSSG 60 γ	37	0
» » Gl-6-P 3 mg. TPN 20 γ	42	3
» » Gl-6-P 3 mg., TPN 20 γ , GSSG 60 γ	74	35
» » TPNH 200 γ , GSSG 60 γ	79	40
» » DPNH 200 γ , GSSG 60 γ	41	2

TABELLA II.

Glutatione-deidroascorbico riduttasi e trasporto di idrogeno da un substrato respiratorio (Gl-6-P) all'acido deidroascorbico attraverso TPN e Glutatione.

Incubazione sotto vuoto per 60 min. primi. Temperatura 18 gradi C. Dati come media di due determinazioni. Mitocondri 5 grammi peso fresco. Volume finale 1 cc.

Aggiunte	γ AA trovato
DHA 250 γ	8
» GSH 50 γ	14
» GSH 100 γ	26
» TPN 200 γ	12
» Gl-6-P 3 mg., TPN 20 γ	8
» TPNH 200 γ , GSH 50 γ	44
» Gl-6-P 3 mg., TPN 20 γ , GSH 50 γ	48

B) *Attività di una deidroascorbico riduttasi e riduzione del DHA tramite i sistemi del TPN e del glutatione.*

I dati della tabella II mostrano come i preparati mitocondriali catalizzano la riduzione del DHA ad opera del GSH aggiunto alle prove; e come la

quantità di DHA ridotto, in uno stesso periodo e per una stessa quantità di GSH aggiunto, venga di molto aumentata dalla presenza tanto di TPNH che di TPN^+ in presenza di un substrato capace di ridurre il TPN^+ a TPNH, come il Gl-6-P.

Dalla stessa tabella si rileva pure la quasi totale mancanza di capacità di ridurre il DHA da parte sia del TPNH che del sistema Gl-6-P + TPN^+ , quando all'incubato non sia stata aggiunta anche una quantità catalitica di glutatione. Questi dati, confrontati con quelli della tabella I, dimostrano quindi la presenza e la coordinazione, nelle particelle plasmatiche, di tutti i fattori necessari al trasporto di idrogeno da un substrato respiratorio al TPN, da questo al glutatione e dal glutatione all'acido deidroascorbico, che viene così ad essere ridotto ad AA.

C) Ossidazione dell'AA da parte di preparati mitocondriali.

La capacità della sospensione mitocondriale di ossidare attivamente l'acido ascorbico risulta evidente dai risultati riportati nella tabella III. Essa è probabilmente imputabile all'azione dei diversi enzimi tra cui, come rilevato da Honda [16] in analoghe condizioni sperimentali, la parte preponderante spetta presumibilmente sia all'ascorbico ossidasi che al sistema citocromo-citocromo ossidasi: enzima quest'ultimo a localizzazione notoriamente mitocondriale. Il dato qui riferito, senza entrare nel merito del meccanismo enzimatico specificamente coinvolto, viene peraltro a completare quelli riportati ai paragrafi precedenti: dimostrando come il DHA, ridotto ad AA dall'idrogeno proveniente, tramite TPN e glutatione, dai substrati respiratori, possa nuovamente essere riossidato dall'ossigeno atmosferico mediante una reazione catalizzata da enzimi presenti nelle particelle plasmatiche.

TABELLA III.

Ossidazione dell'acido ascorbico da parte di preparati mitocondriali di Pisum

Incubazione all'aria, in vaschette agitate con un ritmo di 80 oscillazioni al minuto primo. Concentrazione iniziale dell'acido ascorbico 1000 γ . Tampone al tris 0,1 M pH 6,5 e saccarosio 0,4 M. Etilendiamino tetracetato 0,1 $\%$. Tempo di reazione 8 minuti primi.

	γ AA ossidati
Mitocondri (0,1 grammi peso fresco iniziale per cc.)	26
Mitocondri (0,3 grammi » » » »)	65
Mitocondri (1 grammo » » » »)	212

TABELLA IV.

Attivazione da 2,4 dinitrofenolo e da adenosindifosfato del ritmo di riduzione del deidroascorbico in presenza di glucosio-6-fosfato, TPN e glutatione.

Incubazione sotto vuoto per 15 minuti primi. Temperatura 18 gradi C. dati come media di due determinazioni. Mitochondri corrispondenti a 5 grammi peso fresco iniziale per prova. Volume finale 1 cc.

Aggiunte	γ AA ridotti	Incremento %
DHA 500 γ , GSH 500 γ	72	—
» » DNP 2×10^{-4} M	85	18
» » DNP 10^{-4} M	83	15
» » DNP 5×10^{-5} M	84	16
» » ADP 10^{-4} M, KH_2PO_4 10^{-4} M	86	19
» » » » DNP 2×10^{-4} M	90	25
» » » » DNP 10^{-4} M	86	19
» » » » DNP 5×10^{-5} M	88	22

D) *Stimolazione dell'attività del sistema TPN-glutatione-ascorbico da parte di accettori di fosfato o di composti dissocianti le fosforilazioni dalle ossidazioni.*

I dati della tabella IV mostrano come il ritmo di riduzione del DHA ad opera dell'idrogeno proveniente da glutatione sia incrementato, in misura modesta ma ben significativa, dall'aggiunta al sistema tanto di un accettore di fosfato, quale l'ADP, quanto di un composto capace di dissociare le fosforilazioni dalle ossidazioni, quale il 2,4-dinitrofenolo (DNP). Il dato sembra da interpretare, pur con la dovuta cautela, come una buona indicazione che all'ossidazione del GSH da parte del DHA sia strettamente associato un processo fosforilativo del tipo di quelli da tempo noti per il sistema flavoproteine-citocromi (vedi al riguardo le analoghe conclusioni di Laties, [17], circa la funzione dell'acido adenilico nel metabolismo ossidativo di preparati mitocondriali di cavolfiore). Conclusione che, come detto nella parte introduttiva, sarebbe di fondamentale interesse per l'interpretazione del significato fisiologico del sistema ossido-riduttivo in esame, e che tenteremo di confermare con altre esperienze più direttamente intese a tale scopo.

CONCLUSIONI. - Riassumendo, i risultati ottenuti portano alle seguenti conclusioni:

I) Preparati mitocondriali ottenuti dalle parti apicali di piantine eziolate di pisello conservano, anche dopo ripetuto lavaggio, notevoli attività TPN-glutazione riduttasica e deidroascorbico riduttasica ed ossidano attivamente l'acido ascorbico a deidroascorbico;

II) Le attività di questi sistemi enzimatici appaiono coordinate tra loro, sì da dar luogo ad un sistema unitario capace di trasferire elettroni da un substrato respiratorio adatto fino alla coppia DHA/AA ed anche, secondo ogni evidenza, da questa all'ossigeno atmosferico;

III) L'attività di almeno un anello del sistema, quello che dal glutatione trasferisce idrogeno all'acido deidroascorbico, è stimolata dalla presenza di composti capaci, per meccanismi diversi, di rimuovere il freno che le fosforilazioni impongono alla ossidazione: il che costituisce una prima indicazione positiva circa il possibile significato energetico del sistema ossidoriduttivo in esame.

Nel loro complesso, questi dati vengono a porre in sempre maggior rilievo l'importanza fisiologica dei due sistemi del glutatione e dell'acido ascorbico e, di conseguenza, l'interesse dei meccanismi che, nella cellula, presiedono al loro controllo; argomento questo già ampiamente trattato in precedenti ricerche [18-21].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] YAMAGUCHI M. and JOSLIN M. A., « Plant Physiol. », 26, p. 757 (1951).
- [2] CONN E. E. and VENNESLAND B., « Journ. Biol. Chem. », 192, p. 17 (1951).
- [3] MAPSON L. W. and GODDARD D. R., « Bioch. Journ. », 49, p. 592 (1951).
- [4] CONN E. E., KRAEMER L. M., LIU P. N. and VENNESLAND B., « Journ. Biol. Chem. », 194, p. 143 (1952).
- [5] MARRÈ E. e LAUDI G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., 16, p. 649 (1954).
- [6] LAUDI G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., 19, p. 164 (1955).
- [7] MAPSON L. W. and MOUSTAFA E. M., « Bioch. Journ. », 62, p. 248 (1956).
- [8] HENDLEY D. D. and CONN E. E., « Arch. Bioch. », 46, p. 462 (1953).
- [9] MARRÈ E. LAUDI G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., 18, p. 402 (1955).
- [10] MARRÈ E. e SERVETTAZ O., « Memorie Acc. Naz. Lincei » (1956).
- [11] RACKER E., « Journ. Biol. Chem. », 217, p. 855 (1955).
- [12] LATIES G. G., « Plant Physiol. », 28, p. 577 (1953).
- [13] GRUNERT R. R. and PHILLIPS P. H., « Arch. Bioch. », 30, p. 217 (1951).
- [14] MARRÈ E. e SERVETTAZ O., « Giorn. di Bioch. », 4, p. 10 (1955).
- [15] MARRÈ E. LAUDI G. e ARRIGONI O., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., 19, p. 460 (1955).
- [16] HONDA S.I., « Plant Physiol. », 30, p. 402 (1955).
- [17] LATIES G. G., « Phys. Plantarum », 6, p. 199 (1953).
- [18] MARRÈ E. ARRIGONI O., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis., 18, p. 539 (1955).
- [19] TONZIG S. e MARRÈ E., « Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett. », 89, p. 243 (1955).
- [20] MARRÈ E. e LAUDI G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sc. Fis. (1956).
- [21] MARRÈ E. e ARRIGONI O., in corso di stampa.

Fisiologia (Chimica Fisiologica). — *Su un metodo colorimetrico per la microdeterminazione del Silicio nei tessuti*^(*). Nota di MARISA ANTONIELLI, presentata ^(**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

L'importanza delle funzioni che il Silicio, bioelemento pressoché ubiquitario, deve assolvere nell'organismo, non è stata mai messa in dubbio. Ma tutte le ipotesi, che ne fanno intravedere possibili rapporti con determinate attività enzimatiche ed in particolare con processi di ossido-riduzione, non sono a tutt'oggi molto documentate, così come, da ricerche eseguite nel nostro Istituto ⁽¹⁾, non è apparsa confermata la opinione di molti, che, in base a loro osservazioni, attribuiscono al Silicio imprecisate funzioni attivatrici cellulari e sensibile azione nel favorire l'accrescimento degli organismi animali, in analogia a quanto Lippmann avrebbe visto per i vegetali.

Ancora più discordanti tra loro sono stati i risultati delle ricerche relative al contenuto in Silicio dei vari organi e tessuti: basterebbe il solo esempio del contenuto d'esso nel cervello, che, dai risultati di Jsaacs, ne risulterebbe l'organo più ricco, e da quelle di Gonnermann, invece, il più povero.

È ovvio pertanto che, non potendosi in alcun modo dubitare della interpretazione dei risultati da parte di ricercatori sotto ogni aspetto sicuri, il motivo reale della enorme disparità va ricercato nella diversità dei metodi di dosaggio adoperati e nei pericoli insiti nei metodi stessi.

I metodi finora proposti da numerosi Autori si basano tutti sulla determinazione colorimetrica dell'acido silicio-molibdico giallo per quantità apprezzabili di Silicio, e del bleù di molibdeno, ottenuto per riduzione del complesso precedente, per quantità più piccole. I due complessi si formano facilmente e permetterebbero, mediante confronto con adatte curve di taratura, determinazioni rapide e precise.

In pura linea teorica, pertanto non vi sarebbe nulla da eccepire, se anche altri ioni, quali il Ge, l'As, il P, nelle stesse condizioni non reagissero in maniera identica.

La questione è stata da tempo affrontata da numerosi ricercatori che hanno studiato la via migliore per eliminare in particolare il fosforo, certamente il più importante per l'alta percentuale in cui è rappresentato nelle ceneri, ben maggiore di quella del Silicio, del quale altera profondamente le prove di determinazione quantitativa.

Così King ⁽²⁾ consiglia di allontanare quantitativamente i fosfati come fosfato ferrico ed eliminare quindi il ferro come acetato basico; ma in compenso il metodo, assai laborioso, si dimostra poco sicuro.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Perugia.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) F. SEDIARI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 28, 481 (1952).

(2) KING e J., « Biochem. J. », 33, 944 (1939).

Ollmeyer e Olpp ⁽³⁾ eseguono allo stesso scopo vari lavaggi delle ceneri con HCl normale caldo, centrifugando e poi decantando, ma anche tale tecnica non ci appare priva di seri inconvenienti, sia per i numerosi passaggi che debbono subire le ceneri sia per i ripetuti lavaggi che comportano facile perdita di sostanza.

Piyankov e Margolis ⁽⁴⁾, prima della riduzione, aggiungono acido tartarico al complesso giallo: in tal modo il fosfomolibdato giallo non viene ridotto. Anche se l'azione di interferenza dell'acido tartarico non può essere considerata totale, questo metodo a nostro avviso è il migliore fra quanti descritti, specie per la sua rapidità. Ciononostante, non permette di dosare il Silicio mediante il composto giallo che, per quantità apprezzabili, si rivela assai più preciso del complesso ridotto.

Altri Autori ⁽⁵⁾ infine estraggono il fosfomolibdato con acetato di etile, ma essi stessi rilevano come il metodo sia poco preciso.

È chiaro dunque che, come abbiamo in precedenza accennato, la disparità dei risultati ottenuti dai diversi ricercatori, oltre che per la diversità dei metodi adoperati, è già scontata in partenza dalla riconosciuta imprecisione dei metodi stessi.

Poiché è proposito del nostro Istituto tentare di portare un contributo alla conoscenza della funzione biologica del Silicio nell'organismo animale, ed a tal fine è necessario anzitutto, volendo eseguire ricerche comparative, valersi di un unico metodo di dosaggio ed il più preciso possibile, da oltre due anni ci stiamo occupando dell'argomento. E tutte le numerose prove, sistematicamente eseguite saggiando i principali metodi di dosaggio proposti e in precedenza ricordati, ci hanno convinto della impossibilità di ottenere con essi dati assolutamente sicuri e comparabili tra loro.

Ma studiando il silicio molibdato e il fosfomolibdato in soluzione acquosa abbiamo potuto osservare che essi presentano, di fronte al calore ed alle variazioni del pH, comportamento assolutamente diverso. Infatti, mentre il siliciomolibdato si forma anche a freddo e raggiunge il massimo di colore scaldato a 50° a bagno maria, a 50° il fosfomolibdato precipita in bei cristalli gialli.

Inoltre il siliciomolibdato si forma da pH 1 a pH 1,2 e la intensità della colorazione rimane invariata anche a pH 4; il fosfomolibdato si forma a pH da 0,5 a 1, ma il colore, indice della funzione quantitativa del sale, va gradatamente diminuendo, fino quasi a scomparire, con il progressivo diminuire dell'acidità del mezzo. In ambiente fortemente alcalino il fosfomolibdato non si forma affatto.

I numerosi ripetuti tentativi eseguiti studiando tale diverso comportamento dei due sali nelle identiche condizioni sperimentali, ci hanno permesso di mettere a punto una tecnica di dosaggio del Silicio, che qui riassumiamo

(3) OLLMEYER e OLPP, « H », 281, 203 (1944).

(4) PIYANKOV e MARGOLIS, « Excerpta Medica », 137 (1953).

(5) CHARLOT e GAUGIN, *Dosages Colorimetriques*, 212.

brevemente, riservandoci di esporla nei suoi minuti dettagli, anche dal punto di vista quantitativo, in un successivo lavoro in estenso.

Quando si voglia determinare il Silicio mediante il composto giallo, si tratta quindi prima con molibdato di sodio o di ammonio in soluzione acidissima, si scalda a 50° e si filtra per eliminare il fosfomolibdato che è precipitato.

Nel filtrato per ovvie ragioni inerenti la cinetica della reazione, scaldando può aversi precipitazione di altro fosfomolibdato. Ma con due filtrazioni al massimo (in filtro Watmann 1, e avendo cura di proteggere l'imbuto contro l'eccessivo raffreddamento), si ottiene una soluzione limpida priva di fosforo.

Si eleva poi leggermente il pH, onde assicurarsi completamente della scomparsa del fosforo e si fa la lettura al colorimetro, confrontando i valori letti con le curve di taratura precedentemente costruite.

Se il colore giallo del siliciomolibdato, per la piccola quantità, non raggiunge la soglia di sensibilità del colorimetro, si può ridurre il campione stesso con acido 1-amino-4-naftolsolfonico ed esaminare il complesso blu.

Siamo ben lontani dal pensare che la nostra tecnica sia la più precisa o assolutamente precisa: la sperimentazione futura lo dimostrerà o meno. Solo siamo lieti di poter rilevare che, in tutti i dosaggi del Silicio nei tessuti per ora adoperati, i valori da noi trovati sono stati costanti per ogni tessuto. E ciò è un passo notevole in avanti, in quanto ci permette senz'altro la comparazione.

Microbiologia. — *Il «virus» aftoso su coltura di tessuti «in vitro».* — I. *Coltivazione dei ceppi A₄ — O — C su cellule renali tripsinizzate di suino.* Nota di VITTORIO MAZZARACCHIO, ZEFFIRINO ORFEL, ANGELANTONIO D'AMORE, LEONIDA RAVAIOLI, BENITO CASTAGNOLI, presentata (*) dal Corrisp. D. MAROTTA.

La coltura dei *virus* su tessuti *in vitro* ha sempre urtato contro difficoltà considerevoli. Solo recentemente la messa a punto di particolari tecniche notevolmente semplificate ha permesso la coltivazione e lo studio di numerosi *virus*.

Omettiamo in questa Nota la parte storica per la quale rimandiamo ad una sintesi sull'argomento di uno di noi [1].

La coltivazione *in vitro* del *virus* aftoso è stata tentata con successi vari da numerosi Autori [2-3-4-5-6-7-8-9-10-11-12-13-14-15-16-17-18-19-20-21-22-23-24].

L'unico metodo che ha avuto uno sviluppo a carattere industriale, a scopo immunizzante, è quello adottato da Frenkel usando epitelio linguale bovino. Esso però per varie ragioni non si è ancora affermato nel campo pratico.

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

Recentemente la metodica delle colture di cellule tripsinizzate secondo Dulbecco [25-26] e Youngner [27] è stata usata anche per la coltivazione del *virus* aftoso.

Sellers [28] usando la tecnica di Dulbecco [25-26] con colture *in vitro* di epitelii renali tripsinizzati di suino e bovino ha potuto coltivare il *virus* dell'afta tipo C 997 Waldmann e tipo OM11 Vallè ed il *virus* della stomatite vescicolare. Egli ha notato che la citopatogenicità *in vitro* del *virus* della stomatite vescicolare è diversa da quella dei due *virus* aftosi usati. Il *virus* della stomatite vescicolare cresce e distrugge tutte le cellule presenti producendo placche di lisi circolari sulle colture di cellule renali di embrione bovino. Il *virus* dell'afta invece, sia ceppo C che O, produce sulle cellule di rene di vitello lievi alterazioni con lisi irregolari. Maggiore azione citopatogena si ha invece su coltura di rene suino.

Con tecnica pressoché simile [27] Bachrach, Hess e Callis [29] ottengono sviluppo con chiara azione citopatogena del *virus* aftoso tipo A su coltura di cellule renali di bovino e di suino. Gli Autori non trovano diversità tra azione citopatogena da *virus* aftoso e quella provocata da *virus* della stomatite ed esantema vescicolare.

Scopo del nostro lavoro è stato quello di riprendere ed estendere le esperienze sopra riportate in modo da acquisire nuovi dati sulla biologia dei *virus* aftosi coltivati *in vitro*.

La metodica da noi usata è quella adottata da Dulbecco [25-26] e modificata da Youngner [27] e dettagliatamente descritta da uno di noi [1]. Il tessuto usato è stato quello di rene di suino di età non superiore ai 70 giorni. Abbiamo ottenuto uno strato continuo di cellule in 5-6 giorni di incubazione e quindi abbiamo inoculato in ogni tubo coltura cm³ 0,1 di una sospensione di *virus* aftoso rispettivamente di ceppo A₄, O e C provenienti da epitelio linguale bovino.

RISULTATI.

Il ceppo A₄ si è sviluppato determinando azione citopatogena al primo passaggio; i ceppi C ed O hanno invece provocato l'azione citopatogena al secondo passaggio. I ceppi già adattati a coltura determinano attività citopatogena dalla 10^a alla 48^a ora successiva all'inoculazione in funzione della carica virale. Tale attività non si protrae oltre la 48^a ora, almeno con i ceppi da noi usati, e ciò è particolarmente interessante se si considera l'azione citopatogena di altri *virus*, quali i poliomielitici ed alcuni Coxsackie, che, coltivati su cellule renali di scimmia, si svolge in periodi assai più lunghi (6-7 giorni). La degenerazione della coltura, in seguito all'azione del *virus* aftoso, si manifesta inizialmente soltanto in alcune cellule periferiche dello strato cellulare con notevole rigonfiamento; poi i fenomeni degenerativi si estendono riducendo le cellule ad elementi di piccole dimensioni, rotondegianti, raggruppati a grappolo fino ad arrivare alla distruzione completa del tessuto.

Con il ceppo A₄ e C sono stati eseguiti 15 passaggi seriali e 5 passaggi con il ceppo O, sempre prelevando il *virus* alla 24^a ora dalla inoculazione. Dopo il 3°, 8°, 15° passaggio per i ceppi A₄ e C, e dopo il 5° per il ceppo O si sono eseguite le titolazioni di citopatogenicità su coltura (DC 50) calcolate secondo Reed e Muench [30]. Tali titolazioni non hanno subito notevoli variazioni mantenendosi su valori di $10^{-3,489}$, e di 10^{-4} per il ceppo A₄, di 10^{-4} e di $10^{-4,475}$ per il ceppo O, e di $10^{-3,758}$ per il ceppo C (ved. Tabella I). Controlli di infettività dei vari passaggi in coltura sono stati eseguiti su cavie e topini lattanti con esito positivo.

CONCLUSIONI. — Le esperienze da noi eseguite confermano la possibilità di una coltivazione *in vitro* dei *virus* aftosi con tecnica relativamente semplice (Dulbecco-Joungner).

L'uso del tessuto renale di suino molto giovane si è dimostrato particolarmente idoneo allo scopo.

TABELLA I.

Passaggio N.	Ceppo A ₄	Ceppo C	Ceppo C
3°	$10^{-3,489}$	10^{-4}	—
5°	—	—	$10^{-3,758}$
8°	$10^{-3,493}$	$10^{-4,375}$	—
15°	10^{-4}	$10^{-4,475}$	—

BIBLIOGRAFIA.

- [1] ORFELI Z., *Zooprofilassi*, II (1956).
- [2] HECKE F., « Zentralbl. Bakt. », 116, 386 (1930).
- [3] » » » 118, 283 (1931).
- [4] » » » 119, 385 (1931).
- [5] » » » 126, 93 (1932).
- [6] » » » 125, 215 (1932).
- [7] » » » 128, 336 (1933).
- [8] STRIEGLER E., « Zbl. Bakt. », 128, 332 (1933).
- [9] STRIEGLER E., NAGEL H. C., « Zbl. Bakt. », 134, 71 (1935).
- [10] BORCILA J., « Zbl. Bakt. », 136, 389 (1936).
- [11] WALDMANN O., « Bull. Off. Int. Ep. », 14, 191 (1937).
- [12] KÖBE K., FERTIG H., « Zbl. Bakt. », 138, 14 (1937).
- [13] MAITLAND M. C., MAITLAND H. B., « J. Compt. Path. Ther. », 44, 106 (1931).
- [14] FRENKEL H. S., « Bull. Off. Int. Ep. », 28, 155 (1947).
- [15] FRENKEL H. S., « Am. J. Vet. Res. », 11, 371 (1950).
- [16] » » » 12, 187 (1951).
- [17] » » » 13, 21 (1952).

- [18] FRENKEL H. S., « Bull. Off. Int. Ep. », 39, 91 (1953).
- [19] FRENKEL H. S., « Am. J. Vet. Res. », 15, 346 (1954).
- [20] FOGEDBY E. F., MICHELSEN E., « Bull. Off. Int. Ep. », 27, 201 (1947).
- [21] FOGEDBY E. F., JOHNSON M. G., « Bull. Off. Int. Ep. », 37, 482 (1952).
- [22] MACE D. L., DUNNE H. W., EICHLORN A., « J. Inf. Dis. », 88, 212 (1951).
- [23] PALMA ZULOAGA, « Vet. Med. », 44, 90 (1949).
- [24] HENDERSON W. N., « XV Int. Vet. Congress. Proceeding », 1, 191 (1953).
- [25] DULBECCO R., « Proc. Nat. Acad. Sci. », 38, 747 (1952).
- [26] DULBECCO R., VOGT M., « J. Exp. Med. », 99, 167 (1954).
- [27] YOUNGNER J. S., « Proc. Soc. Exp. Biol. », 85, 202 (1954).
- [28] SELLERS R. F., « Nature », 176, 547 (1955).
- [29] BACHRACH H. L., HESS W. R., CALLIS J. J., « Science », 122, 1269 (1955).
- [30] REED L. J., MUENCH H., « Amer. J. Hyg. », 27, 493 (1938).

Biochimica. — *Origine e significato biochimico dell'urea nell'embrione di pollo nei primi stadi di sviluppo*^(*). Nota di GIUSEPPE RICCERI, presentata ^(**) dal Corrisp. A. CLEMENTI.

SCOPO DEL LAVORO.

In base all'esame quantitativo dei prodotti del catabolismo azotato dell'embrione di pollo, Needham [1], [2], [3] nel 1926 giunse alla conclusione che il carattere del metabolismo proteico dell'embrione degli uccelli subisce delle modificazioni nel corso dello sviluppo. Egli infatti osservò che nei primi giorni dello sviluppo embrionale il catabolismo azotato dà luogo prevalentemente ad ammoniacale, nei giorni immediatamente successivi conduce prevalentemente alla formazione di urea e infine al 10° giorno viene raggiunto il rapporto *urea/acido urico*, che si riscontra nella vita postembrionale, in quanto l'azoto dell'acido urico corrisponde al 95 % dell'azoto totale dei prodotti del catabolismo.

Secondo Needham [3], questo fatto si può considerare come l'espressione biochimica della legge biogenetica fondamentale di Haeckel: il carattere del metabolismo azotato dell'embrione degli uccelli, in un primo tempo ammoniotelico come quello di alcuni invertebrati e dei teleostei, sarebbe successivamente sostituito da quello ureotelico degli anfibi e infine dal tipo definitivo uricotelico, proprio degli uccelli.

Questa concezione fu avvalorata un anno dopo dalle ricerche di Przylecki e Rogalski [4], i quali affermarono che l'embrione di pollo, dal 2° al 7° giorno di età, possiede l'uricasi, enzima presente nel fegato degli anfibi e dei pesci (Przylecki [5], Fosse e coll. [6], Stransky [7], Florkin e Duchateau [8]), ma assente nell'organismo degli uccelli (Wells e Corper, [9], Landmann [10]) e perciò conclusero che il carattere del catabolismo azotato dell'embrione degli

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Catania.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

uccelli, nei primi stadi di sviluppo, rappresenta un fenomeno di ricapitolazione di quello degli anfibi e dei pesci.

L'ipotesi formulata da Needham [3] è stata pertanto ritenuta corrispondente a un fatto pienamente acquisito nella embriologia chimica.

Io recentemente, esaminando il lavoro di Przylecki e Rogalski [4], fui indotto a dubitare dell'esattezza delle conclusioni di questi ricercatori; infatti, in base ai loro esperimenti risultava presente l'uricasi nell'embrione di pollo dal 2° al 7° giorno di età, ma nello stesso periodo era assente la xantinosidasi, cioè l'enzima, che assieme all'uricasi, partecipa al catabolismo purinico e la cui azione deve precedere quella dell'uricasi. Ma anche un altro argomento induceva a porre in dubbio la presenza dell'uricasi nell'embrione di pollo; esso si poteva trarre dalle stesse ricerche di Przylecki e Rogalski [4] ed era rappresentato dal fatto che l'uricasi risultava presente negli embrioni, nello stadio nel quale questi già possiedono i caratteri morfologici, che distinguono la classe degli uccelli dalle classi dei vertebrati inferiori.

Pertanto giudicai interessante effettuare il controllo degli esperimenti, che avevano indotto i precedenti autori ad ammettere la presenza dell'uricasi nell'embrione di pollo, e con le ricerche [11] eseguite su oltre 50 embrioni, con la tecnica più scrupolosa e con i metodi più sensibili, dimostrai che nell'embrione di pollo, anche nei primi stadi di sviluppo, l'uricasi è nettamente assente, e mancano anche gli altri enzimi del sistema uricolitico, cioè l'allantoinasi, l'allantoicasi e l'ureasi, conformemente al fatto che essi mancano nell'organismo degli uccelli nella vita postembrionale.

Giunsi anche alla conclusione, che Przylecki e Rogalski nei loro esperimenti avevano adottato una tecnica errata: infatti, la diminuzione della quantità dell'acido urico incubato con gli estratti di embrioni di pollo nei primi stadi di sviluppo era evidentemente da attribuire alla prolungata permanenza in termostato (7 giorni!); e d'altra parte tale diminuzione non veniva rilevata nelle prove preparate con gli estratti di embrioni nei successivi stadi di sviluppo, in quanto in queste prove aveva luogo contemporaneamente, per via catabolica dalle basi puriniche, la neoformazione di una piccola quantità di acido urico, resa possibile dalla presenza della xantinosidasi, che nell'embrione di pollo compare appunto al 7° giorno di età.

L'ipotesi formulata da Needham [3], sebbene suggestiva, faceva sorgere dei dubbi; questi scaturivano non solo dall'analisi critica e dalla revisione sperimentale dei lavori successivi dai quali essa sembrava avvalorata, ma anche dall'esame degli stessi dati sperimentali sui quali essa era fondata. Già Needham [12] nel 1935 e cioè circa 10 anni dopo la formulazione della sua prima ipotesi, rilevò nel corso di nuove ricerche, che nell'embrione di pollo l'urea può derivare dalla scissione enzimatica dell'arginina; egli pertanto, modificando l'ipotesi precedentemente formulata, giunse alla nuova conclusione, che l'ureagenesi nell'embrione degli uccelli, sebbene non si possa mettere in relazione filogenetica con la sintesi dell'urea che si attua negli anfibi, tuttavia rappresenta un fenomeno di ricapitolazione del metabolismo degli invertebrati, in cui l'urea ha appunto origine con tale meccanismo

(Baldwin e Needham [13]). Questa affermazione è tuttora riportata nella recente monografia di Needham ([14], p. 54), edita nel 1950.

Needham evidentemente ritiene che nell'organismo degli uccelli, durante la vita postembrionale, l'arginasi sia del tutto assente; in effetti, in questi vertebrati ha luogo la formazione di una piccola quantità di urea dall'arginina, per azione dell'arginasi: Clementi [15] infatti dimostrò nel 1914, che nell'organismo degli uccelli questo enzima, sebbene sia nettamente assente nel fegato, è presente nei reni; egli [16] successivamente ha stabilito nel 1933, che l'urea negli uccelli si forma, in quantità relativamente piccola

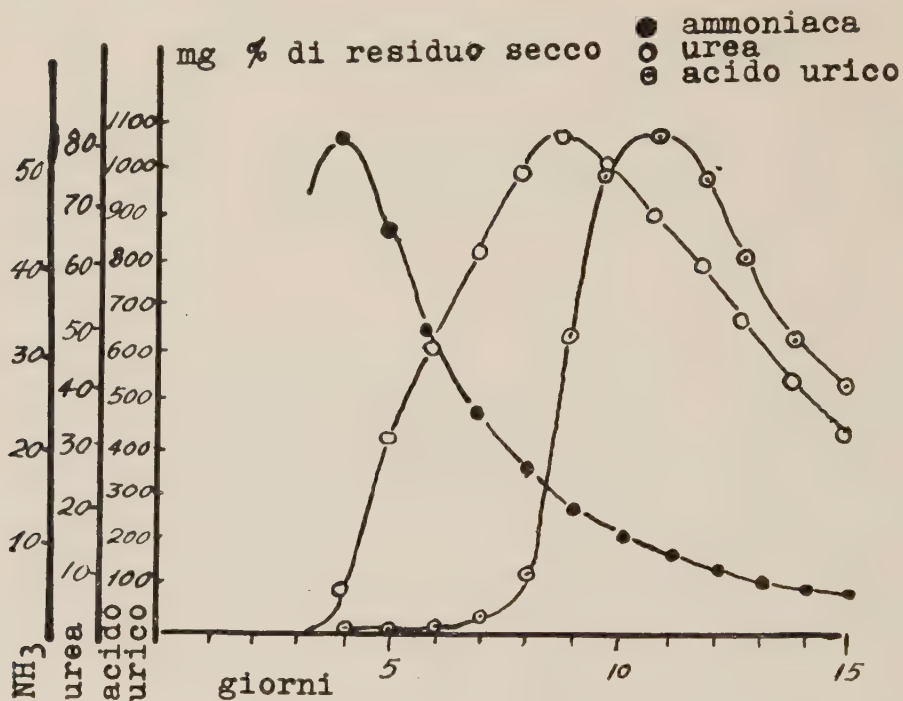


Fig. 1. - Da Needham (loc. cit. [3]).

rispetto all'acido urico, non per via sintetica, ma esclusivamente per via idrolitica nei reni dall'arginina per azione dell'arginasi renale. Needham verosimilmente è stato tratto in errore dai lavori di Edlbacher [17], il quale nel 1915 negò la presenza dell'arginasi nei reni degli uccelli, già dimostrata qualche anno prima da Clementi [15], e successivamente eseguì ricerche sull'arginasi renale degli uccelli [18].

In base alle considerazioni suesposte, si può affermare che, *a priori*, risulta arbitraria la conclusione di Needham [10], [12], che l'ureagenesi nell'embrione di pollo rappresenta un fenomeno di ricapitolazione del metabolismo degli invertebrati; infatti la formazione dell'urea nell'embrione ha luogo con lo stesso meccanismo col quale Clementi ha dimostrato attuarsi nella vita postembrionale.

Anche l'affermazione di Needham [3], che il metabolismo dell'embrione di pollo è in un primo tempo ammoniotelico e successivamente acquista il carattere uricotelico, appare arbitraria: infatti, per dare fondamento a questa affermazione, si dovrebbe dimostrare che la quantità di ammoniaca formata giornalmente dall'embrione, diminuisce a partire da un determinato tempo e che tale diminuzione si accompagna ad un aumento della quantità dell'acido urico prodotto. Ma dai dati sperimentali riferiti da Needham [3], non risulta alcuna diminuzione né delle quantità di ammoniaca né di quelle dell'urea formata dall'embrione di pollo in via di sviluppo; infatti le quantità giornaliere, riferite a 1 embrione, aumentano uniformemente durante lo sviluppo dell'embrione, sebbene tale aumento non sia così notevole come quello delle quantità dell'acido urico. Le tre caratteristiche curve ottenute da Needham [3] e tuttora riportate da altri autori (Florkin [19]), le quali sembrano dimostrare che le quantità di ammoniaca e di urea diminuiscono, mentre aumenta la quantità dell'acido urico, sono state infatti tracciate riferendo i valori a 100 di residuo secco (fig. 1) oppure a 100 di azoto totale (tabella I e fig. 2). Se invece vengono tracciate le curve in base alle quantità assolute dei cataboliti azotati giornalmente formati, è facile rilevare (fig. 3) che esse aumentano progressivamente; sicché non risulta dimostrato che il carattere del metabolismo azotato dell'embrione si modifichi nel corso dello sviluppo.

TABELLA I (da Needham, loc. cit. [3]).

Escrezione dell'azoto.

Giorni	mg N. totale escreto per embri- one e per giorno (*)	mg escreti per embrione e per giorno, espressi in percento di azoto totale escreto per embrione e per giorno (**)		
		Ammoniaca	Urea	Acido urico
4-5	0,00382	38,8	55,49	5,71
5-6	0,00471	43,74	48,83	7,43
6-7	0,01263	21,45	54,75	23,8
7-8	0,08358	4,04	15,80	80,16
8-9	0,1881	2,18	9,19	88,63
9-10	0,2611	2,02	8,58	89,40
10-11	0,3486	1,68	8,43	89,89
11-12	0,4457	1,14	7,96	90,90
12-13	0,5619	1,45	7,79	90,76
13-14	0,6942	1,36	7,39	91,25

(*) Da Needham, tabella II, colonna 6.

(**) Da Needham, tabella III.

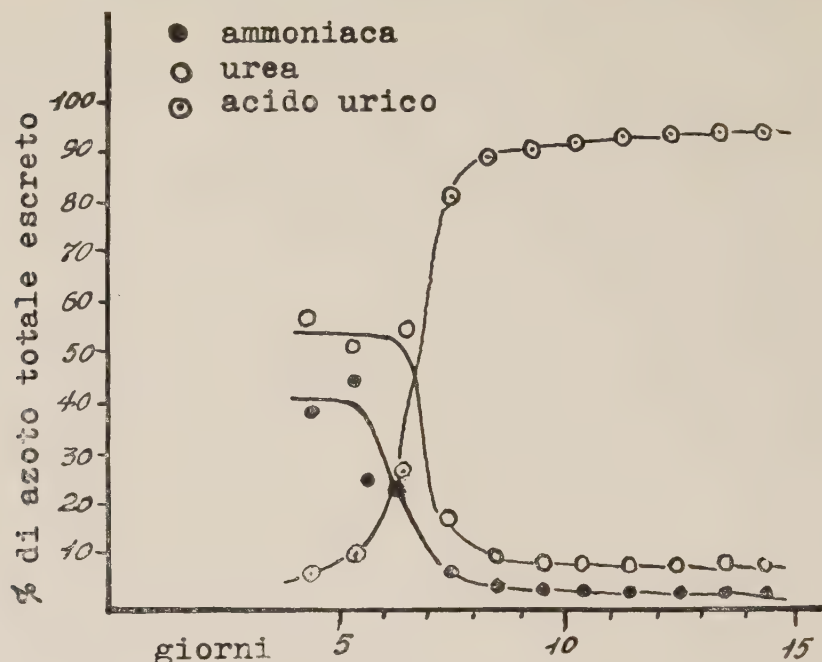


Fig. 2. - Da Needham (loc. cit. [3]).

TABELLA II.

Azoto dell'ammoniaca, dell'urea e dell'acido urico escreti per embrione e per giorno ().*

Giorni	Ammoniaca μg	Urea μg	Acido urico μg
4-5	1,47	2,10	0,21
5-6	2,05	2,29	0,35
6-7	2,70	6,89	2,99
7-8	3,37	13,19	66,9
8-9	4,10	17,28	166,7
9-10	5,27	22,40	233,4
10-11	5,84	29,33	308,7
11-12	5,07	35,42	404,5
12-13	8,13	43,7	509,1
13-14	9,33	51,28	633,2

(*) Quantità assolute escrete, dedotte dai valori di Needham riferiti a 100 di azoto totale escretato.

Nella tabella II sono riportati i valori delle quantità assolute formate per embrione e per giorno, dell'ammoniaca, dell'urea e dell'acido urico; tali valori sono stati dedotti dai dati analitici, che Needham [3] esprime in per cento di azoto totale escreto. Nella fig. 3 sono riportate le curve da me tracciate in base ai valori della tabella II; esse illustrano chiaramente l'aumento progressivo, nel corso dello sviluppo, della produzione di tutti i cataboliti azotati.

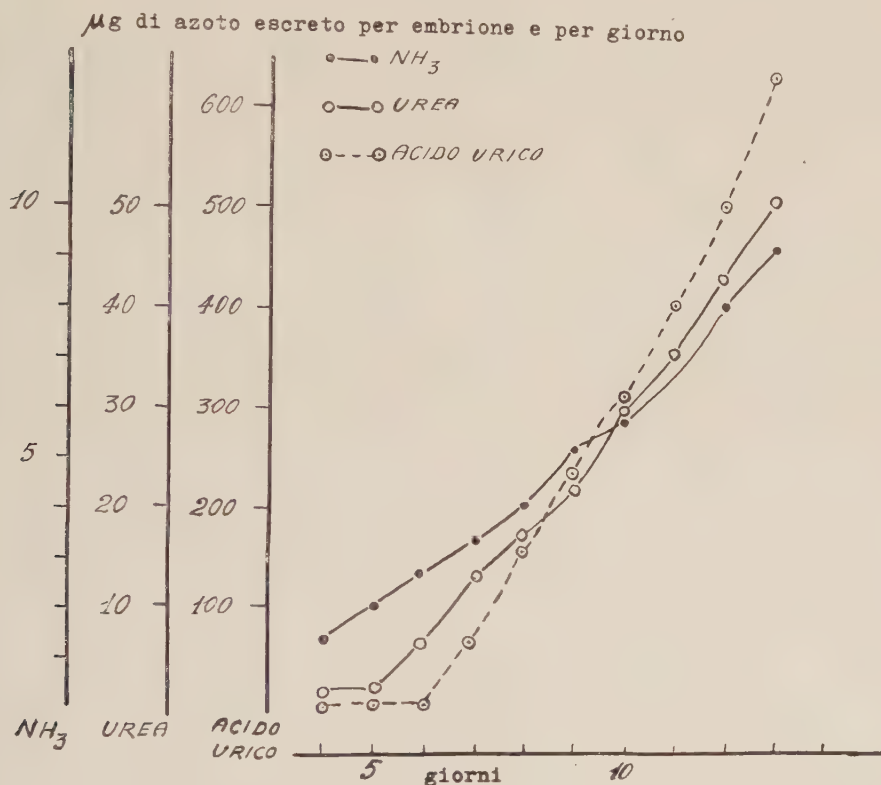


Fig. 3. — Azoto dell'ammoniaca, dell'urea e dell'acido urico escreti per embrione e per giorno (in μg).

(valori della tabella II, espressi graficamente).

Allo scopo di dare la dimostrazione diretta dell'esattezza delle conclusioni da me tratte, secondo cui la formazione dell'urea nell'embrione degli uccelli non si può considerare come un fenomeno di ricapitolazione, ho eseguito un gruppo di esperimenti su embrioni di pollo nei diversi stadi di sviluppo, per determinare la loro capacità più o meno marcata a formare urea dall'arginina, cioè la loro attività arginasi; infatti l'eventuale esistenza di uno stretto rapporto tra le quantità di urea formate, rilevate da Needham [3] negli embrioni in diversi stadi di sviluppo e l'attività arginasi, può rappresentare non solo la conferma dell'origine esclusivamente arginolitica dell'urea nell'embrione degli uccelli, ma anche la dimostrazione, che

la presenza dell'arginasi e la formazione dell'urea nell'embrione di pollo non si possono considerare come un fenomeno biochimico di ricapitolazione, in quanto l'enzima, presente sin dai primi stadi di sviluppo, successivamente non scompare, né diminuisce di attività, ed è perciò da identificare con l'arginasi estraepatica, presente normalmente nell'organismo degli uccelli.

METODO DI INDAGINE.

Le uova di pollo fecondate erano poste ad incubare, lo stesso giorno della loro deposizione, in una camera temostato a 38°C in condizioni adatte di umidità e di areazione. Esse venivano ruotate 2 volte nelle 24 h. Dopo incubazione per un periodo di tempo, che secondo i diversi esperimenti, variava da 2 a 12 giorni⁽¹⁾, gli embrioni venivano prelevati con le modalità prescritte, dopo avere controllato con scrupolosità la presenza delle pulsazioni in corrispondenza dell'abbozzo del cuore, in modo da avere la sicurezza che essi erano viventi; gli embrioni venivano quindi lavati rapidamente con soluzione di Ringer e utilizzati *in toto* per la preparazione di un estratto: questo era ottenuto mediante triturazione con sabbia di quarzo, aggiunta di soluzione di Ringer e decantazione. Per la determinazione dell'attività arginasica, con l'estratto ottenuto venivano preparate 4 prove: 2 con estratto attivo, rispettivamente con e senza aggiunta di cloridrato di L (+) arginina (mg 10,5); 2 analoghe, di controllo, preparate con estratto inattivato, mediante immersione in bagnomaria bollente per 1 minuto. Le prove, dopo aggiunta di 5 cc di soluzione tampone glicina / NaOH a pH 9, di una goccia di soluzione di MnSO_4 al 2% e di alcuni cc di toluolo, venivano poste in termostato a 37°C per 24 h. Quindi si procedeva al dosaggio dell'urea liberata per azione dell'arginasi sull'arginina impiegata come substrato. Per tale scopo, si aggiungevano alle singole prove cc 0,7-cc 1 di HCl 0,1 N, in modo da portare il pH alla neutralità, e 1 cc di una soluzione di ureasi, preparata di recente; questa era ottenuta sciogliendo in 10 cc di glicerina al 60% g 0,5 di polvere enzimatica, precedentemente purificata col metodo di Hunter e Downs [20], allo scopo di privarla dell'eventuale attività arginasica. Le prove venivano nuovamente incubate a 37°C per 1 h. Si procedeva quindi alla deproteinizzazione col metodo di Folin e Wu [21] e, nel filtrato, al dosaggio dell'ammoniaca col reattivo di Nessler-Koch [22]: a 1 cc di filtrato venivano aggiunti 18 cc di H_2O e 1 cc di reattivo; la lettura era eseguita al colorimetro fotoelettrico Lumetron ($\lambda = 420 \text{ m}\mu$) e riferita alla curva di taratura.

RISULTATI E CONCLUSIONI.

Gli esperimenti sono stati eseguiti su oltre 10 embrioni di pollo, dell'età rispettivamente di 2, 4, 7, 10 e 12 giorni.

(1) Alcune uova sono state lasciate in incubazione fino alla schiusura; esse hanno dato al 21° giorno pulcini perfettamente vitali.

Età degli embrioni	Preparazione dell'estratto		Composizione delle prove (*)				Dosaggio dell'urea col metodo all'ureasi (**)			Attività della arginasi (unità arbitrarie)
	Embrioni	Soluzione di Ringer	Estratto	Soluzione tampone glicina-NaOH a pH 9	Arginina cloridrato	Azoto della ammoniaca (metodo al Nessler)	Arginina scissa			
							nell'estratto impiegato	riferita a 1 embrione		
giorni	N°	cc	cc	cc	mg	µg	mg	mg		
2	4	4	1	5	10,5	360	2,55	2,55	1	
			1	5	0	20				
4	2	6	1	5	10,5	tracce			2,69	
			(bollito)	5	0	tracce				
7	1	4	1	5	10,5	472	3,44	6,88	3,63	
			1	5	0	13				
10	1	16	1	5	10,5	tracce			16,94	
			(bollito)	5	0	tracce				
12	1	16	1	5	10,5	374	2,70	43,20	20,45	
			1	5	0	10				
			1	5	10,5	tracce				
			1	5	0	tracce				
			1	5	10,5	450	3,26	52,16		
			1	5	0	15				
			1	5	10,5	9				
			1	5	0	9				

(*) Le prove, dopo aggiunta di 1 goccia di soluzione di MnSO_4 al 2 %, venivano poste in termostato a 37°C sotto toluolo per 24 h.

(**) Per eseguire la scissione enzimatica dell'urea, le prove venivano incubate per 1 h a 37°C con 1 cc di soluzione di ureasi purificata, secondo Hunter e Downs [20].

L'attività arginasica veniva determinata su una frazione dell'estratto ottenuto da un numero vario di embrioni della stessa età o da un solo embrione e veniva poi riferita all'intero embrione.

Come risulta dai dati trascritti nella tabella III, l'attività arginasica, riferita all'intero embrione, aumenta progressivamente durante lo sviluppo. Assumendo come uguale a 1 l'attività arginasica dell'embrione al 2° giorno di età, l'attività negli stadi successivi di sviluppo risulta di 2,69 al 4° giorno, di 3,63 al 7° giorno, di 16,94 al 10° giorno e di 20,45 al 12° giorno. Risulta perciò dimostrato che l'arginasi, presente già nell'ovaio del pollo e nell'embrione di pollo sin dai primi stadi di sviluppo, successivamente non solo non scompare, ma intensifica la sua attività; questo fatto evidentemente si spiega con l'esistenza, nell'organismo degli uccelli, di un'arginasi estraepatica, presente specialmente nei reni: infatti Clementi [15] ha dimostrato nel 1914 che in questi vertebrati, come negli altri vertebrati a metabolismo azotato uricotelico, l'arginasi è assente nel fegato, ma è presente nei reni, e ha stabilito [16], nel 1933, che negli uccelli alla formazione sintetica di una elevata quantità di acido urico si accompagna la formazione di una quantità relativamente piccola di urea, e che essa ha luogo non nel fegato attraverso il ciclo dell'ornitina, ma nei reni, per l'attività idrolitica dell'arginasi estraepatica sull'arginina delle proteine alimentari e delle proteine tissulari.

Dalle indagini sperimentali e dalle considerazioni critiche suesposte si possono trarre le seguenti conclusioni:

1° nell'embrione di pollo la produzione dell'urea non subisce un aumento temporaneo e una diminuzione successiva, ma presenta un aumento progressivo;

2° l'attività dell'arginasi nell'embrione di pollo non è limitata ai primi stadi di sviluppo, ma si intensifica progressivamente e parallelamente all'aumento della produzione dell'urea;

3° la presenza dell'arginasi e la formazione dell'urea nell'embrione di pollo nei primi stadi di sviluppo, contrariamente all'affermazione di altri ricercatori [3], [12], [14], non si possono considerare come un fenomeno di ricapitolazione del metabolismo dei pesci, degli anfibi o degli invertebrati; infatti rappresentano caratteri biochimici degli uccelli, nei quali, come risulta dalle ricerche di Clementi [16], ha luogo formazione di urea dall'arginina, per l'attività idrolitica dell'arginasi estraepatica, presente prevalentemente nei reni.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] J. NEEDHAM, « Brit. J. exper. Biol. », 3, 189 (1926).
- [2] J. NEEDHAM, « Brit. J. exper. Biol. », 4, 114 (1926).
- [3] J. NEEDHAM, « Brit. J. exper. Biol. », 4, 145 (1926).
- [4] St. J. PRZYLECKI e L. ROGALSKI, « Arch. internat. Physiol. », 29, 423 (1927).
- [5] St. J. PRZYLECKI, « Arch. internat. Physiol. », 24, 238 (1925); 26, 33 (1926).

- [6] R. FOSSE, A. BRUNEL e P. DE GRAEVE, « C. R. Acad. d. Sc. » (Paris), 190, 79 (1930).
- [7] E. STRANSKY, « Bioch. Zeit. », 266, 287 (1933).
- [8] M. FLORKIN e G. DUCHATEAU, « Arch. internat. Physiol. », 53, 267 (1943).
- [9] G. WELLS e H. CORPER, « J. Biol. Chem. », 6, 321 (1909).
- [10] G. LANDMANN, « Zeit. Physiol. Chem. », 92, 416 (1914).
- [11] G. RICCERI, « Boll. Accad. Gioenia Sc. Natur. Catania », ser. IV, 3, 121 (1955); « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 31, 1358 (1955).
- [12] J. NEEDHAM, J. BRACHET e R. BROWN, « Brit. J. exper. Biol. », 12, 321 (1935).
- [13] E. BALDWIN e J. NEEDHAM, « Bioch. J. », 28, 1372 (1934).
- [14] J. NEEDHAM, « Biochemistry a. Morphogenesis », Cambridge, Univ. Press, 1950.
- [15] A. CLEMENTI, « Rendic. R. Accad. Lincei », ser. V, 23, 517 e 612 (1914); « Arch. di Fisiol. », 13, 189 (1915).
- [16] A. CLEMENTI, « Arch. Sc. Biol. », 18, 97 (1933); 24, 357 (1938); « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 13, 1099 (1938); 14, 570 (1939).
- [17] S. EDLBACHER, « Zeit. Physiol. Chem. », 95, 81 (1915).
- [18] S. EDLBACHER, e H. ROTHLE, « Zeit. Physiol. Chem. », 148, 273 (1925).
- [19] M. FLORKIN, *L'évolution biochimique*, éditions Desoer, Liège, 1950.
- [20] A. HUNTER e C. E. DOWNS, « J. Biol. Chem. », 155, 173 (1944).
- [21] O. FOLIN e H. WU, « J. Biol. Chem. », 38, 81 (1919).
- [22] F. C. KOCH, « J. Lab. a. Clin. Med. » 11, 3 (1926), (citato da KOCH-HANKE, *Metodi pratici in Biochimica*, Napoli, Ed. Idelson, 1952).

Biologia. — *Azione della tripsina sui quartetti animali, isolati allo stadio di 8 blastomeri, dell'uovo di « Phallusia mamillata ».* Nota di GIUSEPPINA ORTOLANI (*), presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

I.

I territori presuntivi degli organi nell'uovo di « Ascidie » allo stadio di 8 blastomeri sono così distribuiti: nei blastomeri animali quelli che daranno origine al sistema nervoso, agli organi di senso, ai palpi e a tutto il rivestimento epidermico; nei blastomeri vegetativi quelli che daranno origine alla corda, all'intestino, al mesenchima e alla muscolatura (Conklin, 1905)⁽¹⁾, (Ortolani 1954, 1955)⁽²⁾.

Questi territori allo stadio di 8 blastomeri sono irrevocabilmente determinati, ad eccezione di quelli che concernono il sistema nervoso con i relativi organi di senso e i palpi. Diversi tipi di esperienze portano a ritenere che la formazione di questi organi è *dipendente* dai blastomeri vegetativi

(*) Ringrazio il prof. G. Reverberi per aver guidato le presenti ricerche e il prof. G. Montalenti per la concessione di una borsa di studio presso il Centro di Biologia del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) E. G. CONKLIN, « J. Acad. Nat. Sci., Philadelphia », 13, 1 (1905).

(2) G. ORTOLANI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 25, 161 (1954); « Experientia », 11, 445 (1955).

anteriori (Tung 1934)⁽³⁾ (Rose, 1938, 1939)⁽⁴⁾, (von Ubisch 1939, 1940)⁽⁵⁾, (Reverberi e Minganti 1942, 1946 a, 1946 b, 1947, 1949)⁽⁶⁾.

In particolare dal quartetto animale separato dal quartetto vegetativo si forma solo una vescicola epidermica sempre sprovvista di cervello e di organi sensoriali pigmentati, oltre che di palpi.

Precedenti esperimenti (Ortolani, in corso di pubblicazione) con l'uso della tripsina avevano rivelato che questo enzima produce, nelle larve sviluppate da uova trattate precocemente, macchie pigmentate in grande numero. Nasceva, di conseguenza, il problema di indagare se una simile azione si esercitasse anche sui quartetti animali separati dai vegetativi: il problema degli organi pigmentati è problema degli organi di senso; e questo è connesso col problema del differenziamento del sistema neurale. Con questi scopi furono eseguiti gli esperimenti che sono qui esposti.

II. - MATERIALE E METODO.

Furono usate uova di *Phallusia mamillata*. Il trattamento con tripsina fu esercitato o sull'uovo vergine o sui quartetti animali già separati. Nel primo caso l'uovo fu trattato con soluzioni al 0,5 % di tripsina cristallizzata (Worthington Biochemical Sales Co.) per 2 h, ovvero 1 % per 1 h; in queste condizioni le membrane che avvolgono l'uovo vengono sciolte: le uova lavate ripetutamente in acqua di mare filtrata, vennero successivamente fecondate; allo stadio di 8 blastomeri venne operata la separazione del quartetto animale.

Nel secondo caso i quartetti animali previamente separati vennero trattati con soluzione 0,1 % per 15': lavati ripetutamente, vennero fatti sviluppare in acqua di mare normale.

I risultati che si ottennero risultarono identici con ambedue i trattamenti. Lo studio si basa su 126 quartetti animali.

III. - RISULTATI.

Lo sviluppo dei quartetti animali con tripsina non presenta, sotto certi aspetti, diversità sostanziali da quanto si riscontra per gli stessi quartetti non trattati (cfr. Reverberi e Minganti 1942, 1946 a, b)⁽⁶⁾: la segmentazione procede come in questi, e la gastrulazione non si compie. Per altri aspetti tuttavia si notano delle diversità di un certo interesse. Le forme di sviluppo, invece di sferiche, risultano allungate e prima o dopo, per strozzamento incompleto mediano, si individualizzano in due masse di volume quasi uguale

(3) T. C. TUNG, « Arch. Anat. Micr. », 30, 381 (1934).

(4) S. M. ROSE, « Anat. Rec. », 70, suppl., 102 (1938); « Biol. Bull. », 77, 216 (1939).

(5) L. VON UBISCH, « Roux'Arch. », 139, 438 (1939); « Roux'Arch. », 140, 1 (1940).

(6) G. REVERBERI e A. MINGANTI, « Boll. Zool. », 13, 99 (1942); « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 20, 135 (1946 a); « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 20, 199 (1946 b); « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 21, 1 (1947); « Riv. Biol. », 41, 125 (1949).

(figg. 1, 2, 3, 4). In una di esse, spesso in corrispondenza della costrizione, si notano, in superficie, numerose macchie di pigmento (figg. 1, 2, 3). Le due masse, nelle forme che furono fatte sviluppare più a lungo, risultano strutturalmente diverse (figg. 2, 3, 4): in una di esse, e talvolta in ambedue, si forma internamente una cavità (figg. 1, 3, 4); può anche accadere che le due masse vengano a separarsi, e che una di esse, quella costituita di cellule piccole che si distaccano facilmente, vada in disintegrazione (fig. 4). In nessuno dei due pezzi si forma la membrana testale, che compare invece sempre nei quartetti animali non trattati.



Figg. 1-4. — Semiembrioni animali dopo trattamento con tripsina; in essi si notano numerose macchie di pigmento.

Lo studio in sezione precisa questi dati. La differenza tra le due masse viene confermata: l'una è costituita da cellule piccole ammassate insieme piuttosto disordinatamente e con nucleo piccolo e chiaro, l'altra è data da cellule epiteliali tipiche, molto spesso delimitanti una cavità, e con nucleo grande e colorato. Probabilmente questa differenza di struttura ha la sua base nel fatto che nel quartetto sono presenti due diversi territori presuntivi: l'uno, il territorio epidermico, l'altro il territorio neurale. È tuttavia da far notare come l'eventuale tendenza dei due blastomeri anteriori a dare delle strutture neurali non porta mai al differenziamento di un vero organo nervoso: le cellule piccole con nucleo chiaro, se sono cellule che potrebbero dare origine a cellule neurali, non formano, tuttavia, un tessuto con i caratteri tipici del cervello delle larve di «*Ascidie*».

Il fatto che queste cellule non siano ravvolte dall'epitelio ectodermico, come nei normali semiembrioni animali, si può attribuire alla perdita dell'attività epibolica delle cellule derivanti dai blastomeri animali posteriori, che appunto hanno tale epitelio (che nella larva normale riveste la coda). Tale perdita sarebbe causata dalla tripsina, che altererebbe una struttura superficiale di tali cellule, rendendole incapaci di movimenti di estensione.

L'altro dato interessante, che lo studio delle sezioni rivela più nettamente, è quello concernente le macchie di pigmento. Non si tratta, anche qui, di organi sensoriali: più precisamente, non si ha mai differenziamento di un ocello o di uno statolite; si ha solo una grande quantità di granelli di pigmento che si formano probabilmente come granelli di secrezione endocellulare e che successivamente si portano nella porzione più corticale delle

cellule che le hanno prodotte; queste cellule poi sono sempre superficiali e spesso hanno un aspetto rigonfio e vacuoloso. Ogni granello esaminato a sé rivela una struttura: il pigmento nero è alla periferia di una porzione centrale che resta apigmentata.

Questo secondo risultato è riuscito del tutto nuovo. Infatti, non solo nei quartetti animali non trattati non si ha mai comparsa di granuli pigmentati, ma nei semiembrioni che ne derivano non si è dimostrata presenza di tirosinasi (Minganti, 1951)⁽⁷⁾, che è l'enzima necessario per la formazione del pigmento nero. Queste ricerche quindi, aprono un importante problema, quello dell'azione della tripsina nella melanogenesi. È possibile che tutte le cellule del territorio presuntivo nervoso, e cioè derivanti dai due blastomeri animali anteriori, posseggono le capacità di dare origine agli organi sensoriali pigmentati, e che nello sviluppo normale, queste capacità siano «realizzate» solo da quelle poche cellule che vengono a trovarsi in una posizione definita della piastra neurale o della vescicola cerebrale; in ogni modo queste cellule per realizzare queste potenze hanno bisogno di una evocazione da parte dei materiali vegetativi anteriori. I risultati di questi esperimenti dicono che l'azione della tripsina evidentemente sostituisce questa evocazione: sotto lo stimolo della tripsina molte delle cellule presuntive nervose si mettono a costruire pigmento: e questo, per il fatto che non si costituiscono degli organi di senso, si presenta in granuli numerosi e slegati. Poiché però, il pigmento nero non può formarsi senza l'enzima specifico, viene fatto di supporre che l'azione della tripsina si eserciti appunto o smascherando l'enzima bloccato o suscitandone una intensa produzione.

IV.

Per ciò che concerne i quartetti vegetativi la tripsina non ha avuto nessun effetto evidente su tali quartetti, poiché essi si sono sviluppati esattamente come i quartetti vegetativi non sottoposti ad alcun trattamento.

I semiembrioni vegetativi sono stati descritti da Reverberi e Minganti (1942, 1946 a)⁽⁶⁾ ed io confermo i loro risultati. E precisamente, dai blastomeri vegetativi ha avuto origine quello che da essi sarebbe derivato nell'embrione normale, in accordo con il *cell-lineage*; cioè entoderma, mesenchima, muscolatura, corda. In questi semiembrioni, che non sono mai avvolti da membrana testale (che è una produzione ectodermica) si nota una porzione ben organizzata corrispondente al materiale entodermico differenziato in intestino con lume, e una porzione confusa e slegata costituita da cellule cordali, muscolari e mesenchimali che non si sono invaginate. Non sono mai presenti formazioni neurali né macchie pigmentate. Non sono mai state riscontrate animalizzazioni, come quelle trovate da Hörstadius (1953)⁽⁸⁾ nei semiembrioni vegetativi di riccio di mare trattati con tripsina.

(7) A. MINGANTI, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», 23, 52 (1951).

(8) S. HÖRSTADIUS, «J. Embryol. and Exp. Morph.», 1, 327 (1953).

V. — CONCLUSIONI.

Dai quartetti animali dell'uovo di *Phallusia mamillata*, separati allo stadio di 8 blastomeri, e trattati con una soluzione di tripsina si ottengono due masse ben distinte e di volume quasi uguale: una costituita da cellule piccole, con nuclei chiari e che va presto in disintegrazione; su di questa massa o nel punto di costrizione delle due masse si differenziano costantemente delle macchie di pigmento, la cui formazione è da attribuire all'azione della tripsina; l'altra massa è più compatta e ben organizzata con cellule a contorno poligonale con grossi nuclei, e può essere considerata come materiale epiteliale.

Biologia (Microbiologia). — *Nota sull'agente eziologico della epidemia marchigiana di meningite benigna* ^(*). Nota di ITALO ARCHETTI e ADALBERTO FELICI, presentata ^(**) dal Corrisp. D. MAROTTA.

Durante l'epidemia marchigiana di meningite benigna, di cui è stata data comunicazione lo scorso anno a questa Accademia ⁽¹⁾, sono stati isolati 135 ceppi di *virus* di cui 47 dal liquor, 41 dal gargarizzato e 47 dalle feci di pazienti affetti da questa forma morbosa.

L'indagine sierologica ha confermato l'ipotesi che i *virus* isolati fossero la causa eziologica della malattia. I *virus* appartengono al gruppo Coxsackie, ma le ricerche di identificazione del tipo, praticate con la deviazione del complemento e soprattutto con la prova di neutralizzazione, fanno ritenere che il prototipo non sia identificabile con nessuno dei 24 ceppi di *virus* Coxsackie dei gruppi A e B sino ad ora noti. I nostri risultati sono stati convalidati gentilmente dal dott. Dalldorf del Public Health Service, Albany USA).

Per questi motivi, in attesa di una completa identificazione del ceppo in questione, consideriamo questo come un tipo provvisorio che indichiamo come *virus* Coxsackie A, non tipizzato, non appartenente a nessuno dei tipi 1-19 (nome indicativo del ceppo: Vispo).

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Microbiologia dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) I. ARCHETTI, A. FELICI, V. MIGLIORI e F. RUSSI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. XIX, 180 (1955).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Corrispondente Piero Redaelli.

Tenuta (*) dal Socio Corrisp. LUIGI CALIFANO

È stata quella di Piero Redaelli una figura complessa per la ricchezza di interessi del Suo spirito, aperto alla visione del mondo. Lo interessarono Scienza ed Arte, Filosofia e Politica. Nella Scienza lo attrasse così la ricerca sperimentale come la dissezione anatomica, la sistematica e la biologia dei miceti come la istopatologia e la fisiopatologia.

Questi vari interessi non erano espressione di diletterismo o di curiosità, ma corrispondevano alla concezione che Egli ebbe del processo morboso che nella essenza è da cercarsi non solo, e forse non tanto, sul piano cellulare, secondo la concezione di Virchow, ma ben più intimamente su quello delle substrutture e quindi su quello molecolare, su quei piani dove si svolgono i fenomeni della vita normale cellulare e le cui deviazioni costituiscono il processo morboso.

Se da questo punto di vista si volesse inquadrare l'indirizzo scientifico di Redaelli si dovrebbe dire che esso fu quello di un patologo generale nel senso più moderno e più severo della parola; nel senso come lo concepì Gino Galeotti che, arditamente, dischiuse alla Patologia generale il suo vero orizzonte che è quello dello studio della interferenza delle cause morbose sui meccanismi del metabolismo cellulare, quelle interferenze che la indagine odierna va sempre più e meglio conoscendo e distinguendo e così appurando la vera natura dei fenomeni patologici.

Si spiega in tal maniera l'attività di Redaelli nei vari campi dei quali si interessò con la Sua fiorente Scuola e si comprendono anche le iniziative cui pose mano per realizzare un organizzato lavoro. L'Istituto di Anatomia patologica di Milano ebbe così, per Suo volere, un Centro di Endocrinologia, una Sezione di Istochimica, una di Radiobiologia ed un Centro di Micologia umana e comparata.

La Micologia fu in ogni tempo e cioè dal 1922, epoca della laurea di Redaelli, campo di studio che prese assai della Sua attività scientifica, con maggiore o minore lena nei vari periodi.

Prestissimo Egli iniziò con Ciferri, a Pavia, la revisione, dal punto di vista tassonomico, dei miceti patogeni, o ritenuti tali, per l'uomo e per gli animali.

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

Nessun ambiente poteva essere meglio adatto di quello di Pavia per una tale impresa. La grande figura di Agostino Bassi aveva iniziata l'alta tradizione che, continuata col Vittadini, era palpitante nell'opera diligente e appassionata di Gino Pollacci e aveva trovato una sua stabilità con la creazione del Laboratorio crittogamico.

La collaborazione Ciferri-Redaelli fu delle più felici e, continuata ininterrotta sino alla morte di questi, ha assai contribuito agli studi di Micologia in Italia e nel mondo. La creazione del Centro di Micologia umana e comparata nel 1938 a Pavia segnò non l'inizio di un lavoro, che già durava da anni, ma una maggiore organizzazione di esso, espressa anche con la fondazione del periodico «Mycopathologia» redatto da Ciferri e Redaelli e pubblicato dall'editore Junk in Olanda, a carattere largamente internazionale, che fu e resta uno dei più diffusi e noti periodici di tal genere di studi.

Le ricerche di Micologia del Redaelli e dei Suoi Collaboratori si svolgono su varie linee: identificazione di specie e ceppi isolati da materiale patologico o da altre fonti; rilievi e correzioni tassonomiche di generi e di specie, attività patogena, fenomeni immunitari e metabolici dell'ospite nel corso delle infezioni. Non sorprende questa pluralità di indirizzo in quanto la identificazione e la sistematica sono premesse essenziali nello studio della Microbiologia in genere e della Micologia in particolare perché qui le incertezze tassonomiche sono più rilevanti che altrove e il ricercatore che si occupi di Micologia è, e deve essere, come premessa di buon lavoro, innanzi tutto un sistematico.

Frutto della diligente e sagace opera svolta in tal senso è stato la identificazione da parte di Ciferri e Redaelli di un largo numero di miceti isolati da malattie umane a varia localizzazione, con il riconoscimento, in alcuni casi, di specie nuove ammesse ora come tali nella sistematica micologica moderna, come accettati sono molti dei proposti emendamenti di nomenclatura.

Un trattato di Tecnica micologica medica, pubblicato nel 1931 dimostra la esperienza acquisita dall'Autore in tale campo.

La indagine sistematica non poteva essere, però, per Redaelli, fine a se stessa, ma premessa per quella patologica che Egli largamente eseguì con lo studio istologico delle alterazioni nelle malattie spontanee dell'uomo o degli animali e in quelle sperimentalmente provocate.

Da tali indagini capi presto il Redaelli che nelle micosi dovessero svolgersi complesse interazioni di specie e di tessuto, e pose in evidenza l'intervento di fenomeni allergici, sia nel senso di iperrecettività che di resistenza immunitaria. Queste ricerche hanno contribuito alla conoscenza della patogenesi di alcune micosi e soprattutto ci hanno dato, in modo sistematico ed inquadrabile in concetti generali, la dimostrazione della importanza della reazione locale e di quella generale nell'impianto e nel decorso di queste particolari infezioni. Il trattato di Redaelli e Ciferri «Le granulomatosi fungine dell'uomo nelle regioni tropicali e subtropicali» pubblicato nel 1942, è un'opera insigne che compendia la larga esperienza dei due Ricercatori

nei vari settori della Micologia e interessa Biologi e Clinici per il suo alto valore culturale e pratico.

Di notevole rilievo è il più recente orientamento di Redaelli e dei Suoi Allievi sulla influenza di alcuni ormoni sull'impianto delle infezioni micotiche. La dimostrazione che l'introduzione di cortisone in animali accresce fortemente la recettività per miceti a scarso potere patogeno è di vivo interesse, non tanto per la localizzata questione, quanto perché ci dà un altro esempio della importanza del metabolismo nella recettività degli organismi agli agenti infettivi.

È questa una cognizione che era restata sempre malcerta, ammessa in via di supposizione, ma mai seriamente sottoposta ad analisi sperimentale. Questa analisi è, ora, in pieno svolgimento ed essa ci ha fatto conoscere, ad opera specialmente di Dubos dell'Istituto Rockefeller, che il metabolismo generale e quello particolare di un singolo tessuto, sono fattori tanto e forse più importanti che quelli dell'immunità. Una recente conclusione di Dubos che ammette si possa, a mezzo dell'alimentazione, e quindi per influenza sul metabolismo, rendere a volontà un organismo recettivo o resistente verso una data infezione, è assai grave ed è destinata ad un ampio sviluppo dottrinario e pratico. Il volume di Dubos, edito da poco più di un anno, e quello contemporaneo di Racker, entrambi sui rapporti tra metabolismo ed infezione, sono di estremo interesse. A questo orientamento si allaccia, a mio parere, la dimostrazione sperimentale di Redaelli, Cavallero e Piantoni dell'influenza del cortisone sulla granulomatosi micotica.

Se particolari diete, ricche di volta in volta in grassi o in corpi chetogeni o in acido citrico o in acido lattico, influenzano, come nelle ricerche di Dubos, lo sviluppo e l'andamento della tubercolosi sperimentale del topo per l'interferenza che tali sostanze esercitano nel metabolismo, gli ormoni surrenali fanno altrettanto nelle micosi sperimentali anche qui, verosimilmente, per la influenza che sul metabolismo viene da essi esercitata. La relazione di Cavallero al Simposio sulla infiammazione, svoltosi a Montreal nel 1953, che compendia le ricerche in tal campo dell'Istituto anatomico-patologico milanese, si inserisce, mi sembra, in questo moderno orientamento della Patologia Sperimentale.

L'altro campo di estesa indagine di Redaelli e dei Suoi Allievi è quello della Patologia endocrina, attività particolarmente feconda in questi ultimi anni svolta nel Centro di Endocrinologia «Mina Mosca» dell'Istituto di Milano. L'interesse a tali studi corrisponde, a mio avviso, alla larga visione che dei processi patologici ebbe il Redaelli.

La patologia endocrina non è solo quella particolare delle singole ghiandole, ma si inserisce in un assai più largo numero di fenomeni morbosi. Se si pensa che anche la deviazione morbosa anarchica e indisciplinata per eccellenza, cioè la crescita neoplastica, risente della influenza endocrina ora meno ora più, sino alla diretta dipendenza, come nei tumori cosiddetti condizionati, ci si rende conto come l'Endokrinium, come dicono i tedeschi, cioè lo stato funzionale endocrino, abbia larga incidenza su processi patologici molteplici.

Ciò non sorprende perché le alterazioni patologiche sono, in ultima analisi, alterazioni del metabolismo il quale è sotto regolazione endocrina.

Già si è accennato alle ricerche sull'influenza di alcuni corticosteroidi sulle micosi sperimentali e non fa d'uopo ripetere come tali ricerche si inquadrino nella concezione generale. Altre numerose indagini furono dal Redaelli e dagli Allievi eseguite sulle varie ghiandole in malattie dell'uomo o in condizioni sperimentali.

Su di un gruppo di esse, però, desidero richiamare l'attenzione anche perché di queste il Redaelli era particolarmente soddisfatto. Si tratta delle ricerche sulla importanza del glucagone nel diabete umano e nelle varie forme sperimentali di esso. Il diabete è una endocrinopatia e pertanto una malattia del ricambio. È malattia endocrina non solo per la parte che in essa ha il difetto della sintesi della insulina, quanto perché nella patogenesi sono interessate altre ghiandole interne. A prescindere da minori effetti, forse minori perché ancora scarsamente noti, esercitati dall'ipofisi con l'ormone della crescita, dalla tiroide e dalle gonadi, essenziale importanza hanno i surreni con la secrezione dei glicormoni e le cellule A del pancreas con quella del secondo ormone di questo organo, che è il glucagone. I surreni, a mezzo degli ormoni glicocorticoidi, influenzano la neoglicogenesi, cioè agiscono su quella fase del metabolismo che porta a formazione di glucosio dagli aminoacidi e su ciò le nostre cognizioni sono assai estese e sono valse a spiegare l'importante fenomeno dimostrato già da anni che la surrenectomia fa migliorare o addirittura scomparire il diabete sperimentale da pancreatectomia, effetto che si raggiunge anche con la ipofisectomia, che equivale a esclusione funzionale dei surreni.

Scarse e contraddittorie erano, invece, fino a pochi anni fa, le nostre conoscenze sull'importanza del secreto delle cellule A del pancreas, secreto cui fu dato il nome di pelagina e poi quello di glucagone. Un fatto sperimentale era noto, e sembrava paradossale, cioè che l'asportazione parziale del pancreas causa un diabete più grave che non la asportazione totale dell'organo, ciò che faceva supporre che nel tessuto pancreatico dovesse prodursi qualche sostanza antagonista alla insulina. Questa sostanza, che è il glucagone, noi ora la conosciamo e ad essa attribuiamo funzione e dignità di ormone. Alla conoscenza dell'importanza del glucagone nel diabete ha notevolmente concorso la Scuola di Redaelli e particolarmente il Cavallero. È stato così dimostrato che si ricava glucagone dal pancreas solo quando le cellule A sono integre e che esse si ipertrofizzano nel diabete umano ed in quello sperimentale. Un fatto importante messo in evidenza è che il glucagone non è di per sé diabetogeno. Ciò avviene perché l'insulina ne bilancia ed annulla l'azione iperglicemizzante. Partecipa esso, invece, alla patogenesi del diabete perché in tale malattia le scarse quantità di insulina non sono sufficienti a bilanciare il glucagone che viene ora prodotto in maggiore quantità a causa della ipertrofia ed iperplasia delle cellule A che si instaura.

La più recente dimostrazione di Cavallero che il glucagone influenza in senso positivo la crescita e la connessa ipotesi che l'ormone somatotropo agisca per tale via sono assai interessanti.

L'influenza del glucagone sul ricambio dei carboidrati è ora molto indagata da altri ricercatori sul piano più strettamente biochimico e sappiamo che esso agisce stabilizzando la fosforilasi A del fegato e così permettendo una più rapida fosforolisi e con ciò depolimerizzazione del glicogeno. La vecchia cognizione della mancanza di glicogeno nelle cellule epatiche del diabetico è perfettamente ora spiegata come dovuta in parte alla deficienza insulinica e quindi a deficiente sintesi, in parte all'accesso di glucagone e quindi ad accelerata depolimerizzazione.

Il destino non ha permesso al Redaelli che, come si è detto, guardava alle ricerche sul glucagone nel suo Istituto con particolare interesse, il vedere lo svolgimento di queste recenti cognizioni sul piano biochimico, come non gli ha permesso di assistere all'attuale svolta nella terapia del diabete nell'impiego che si fa ora di sulfamidici ad azione bloccante sulle cellule A del pancreas ciò che determina limitazione nella sintesi di glucagone.

Lo sviluppo della moderna Citochimica attrae negli ultimi anni l'attenzione del Redaelli che vede, in tale sviluppo, una svolta importante della Istologia normale e di quella patologica, sia pure con le inerenti limitazioni e provvisorietà. Egli entusiasma dei giovani a tale indirizzo ed attrezza un laboratorio allo scopo. Buoni contributi sulla citochimica delle cellule del sangue e di quelle di varie ghiandole endocrine affiorano presto da tale attività. La fondazione, insieme con altri egregi cultori di tali studi, della « Rivista di istochimica normale e patologica » esprime l'entusiasmo e l'impegno di Redaelli in tale campo.

Né indifferente lo trova lo sviluppo delle ricerche di Radiobiologia sia nel senso di influenza delle radiazioni come, e specialmente, dell'impiego degli isotopi radioattivi, e della autoradiografia ed Egli, alacre come sempre, dà mano ad una nuova iniziativa, costituendo quella Sezione di Radiobiologia che organizza con particolare amore e nella quale riponeva molte speranze.

Questa multiforme opera a carattere precipuamente biologico, mai distrasse il Redaelli, dall'inizio della carriera sino alla maturità, dalla indagine anatomico-patologica nel senso tradizionale.

In una esposizione sull'attività del Suo Istituto Egli così si esprime in proposito: « La necroscopia conserva costante il suo alto valore per la diagnostica e per la didattica; la necroscopia clinica è il più grande ausilio per l'educazione dello studente e del medico, anche se alla necroscopia non possiamo chiedere oggi un aiuto sempre del tutto valido per la più fine indagine scientifica ». Con tale frase Egli esprime la reale situazione dell'Anatomia patologica che fu e permane base assai solida della Clinica, come è parte altrettanto solida ed intima di tutta la Patologia.

Fanno fede della Sua attività più strettamente anatomico-patologica, oltre alle molte pubblicazioni su questioni particolari ed in special modo sulle cirrosi, sulle endimopatie, sulla tubercolosi, sulle nefropatie delle quali si occupò specialmente il Giordano, un *Corso di lezioni di Anatomia patologica generale e speciale*, la *Guida pratica all'autopsia del corpo umano*, pub-

blicata in collaborazione con Lesca e Palazzi ed il bell'*Atlante di Istologia patologica* in collaborazione con Cavallero.

L'opera vasta di Piero Redaelli esprime, nel complesso, la concezione unitaria che Egli ebbe della Patologia. Egli non concepì suddivisioni e limitazioni ma presente fu alla Sua mente l'oggetto e cioè il fatto patologico che indagò e interpretò morfologicamente e funzionalmente nelle sue relazioni con l'organismo nel senso e della insorgenza come del destino. Egli fu un Patologo nel senso reale della parola.

All'attività scientifica corrispose, in pari altezza, il Suo amore per l'insegnamento nel quale fu scrupolosissimo sin dagli inizi della Sua carriera di insegnante.

Pari in altezza, fu altresì, l'interesse che portò alla Sua Scuola che fu fiorentissima a Catania come a Pavia come, e specialmente, a Milano. Due Suoi diretti Allievi occupano Cattedre universitarie: Alfonso Giordano, degnamente succeduto al Redaelli a Milano, Cesare Cavallero a Pavia. Oltre questi, molti Allievi si sono formati alla Sua Scuola e sono adesso in Cliniche generali o speciali o in Settorati ospedalieri. Tutti hanno tratto dal Maestro la severa educazione scientifica, l'amore alla ricerca, l'impronta della personalità umana.

C'è, così, nella Anatomia patologica italiana una larga eredità di doti e di indirizzi, una particolare fisionomia in cui vivono la figura e l'opera di Piero Redaelli.

La morte ha stroncato una esistenza ancora giovane, una vita che avrebbe ancora dato tanto alla Scienza ed alla Università.

Benigna nella triste determinazione gli fu la sorte solo nel fare che si spegnesse, così all'improvviso, in un pomeriggio di ottobre tra il cielo e il mare che Egli tanto amava, soffusa negli occhi la luce del cadente sole!

«La morte» disse Goethe ad Eckermann «è pure qualche cosa di tanto strano che, come non accadesse tutti i giorni, non la si ritiene possibile nelle persone a noi care, e arriva sempre come qualche cosa di inaspettato e di non credibile. È in certa guisa, una impossibilità, che improvvisamente diventa realtà. E questo trapasso da una esistenza conosciuta in un'altra della quale non sappiamo niente, è qualche cosa di così violento, che non può avvenire senza profondamente commuovere quelli che restano».

BIOGRAFIA.

Piero Redaelli nacque in Milano nel 1898, si licenziò dal Liceo nel 1916-17.

Compì gli studi medici a Pavia laureandosi con lode nel 1922. Da studente fu allievo interno dell'Istituto di Anatomia normale.

Fu assistente dal 1922 al 1926 nell'Istituto di Anatomia patologica di Pavia diretto dal prof. Achille Monti.

Nel 1925 vinse il concorso per il premio Cagnola dell'Istituto lombardo di Scienze e Lettere.

Libero docente in Anatomia patologica nel 1926.

Dal 1927 al 1930 Aiuto dell'Istituto anatomico patologico di Pavia.

Nel 1928 vinse il premio Beretta e nel 1929 quello della Fondazione Carlo Forlanini. Frequentò per breve tempo nel 1929 il Ross Institute for tropical Medicine di Londra. Incaricato di Anatomia patologica a Catania per l'anno 1930–31, fu nominato straordinario nel 1931–32 e ordinario nel 1934.

Fu trasferito a Pavia nel 1935 e quindi a Milano nell'anno 1943–44.

Socio di numerose Accademie e Società biologiche italiane ed estere.

Socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei dal 1947.

Combattente, come tenente di Fanteria nella prima guerra mondiale, partecipò nel 1944, come Comandante di una divisione partigiana, alla guerra clandestina.

Mori in Ischia il 25 ottobre 1955.

PERSONALE ACCADEMICO

Il prof. Levi comunica che soltanto ora è pervenuta alla Accademia la notizia della morte del Socio Straniero Emile Borel, della I Categoria, spentosi il 4 febbraio 1956 e formula un pensiero di reverente omaggio alla memoria dell'illustre scienziato scomparso.

Il Presidente dà poi la parola al Socio Luigi Califano, che rievoca la figura e l'opera del compianto prof. Pietro Redaelli.

Il Presidente ringrazia il prof. Califano per la sua elevata e commossa orazione e rinnova ai familiari del Socio Redaelli, presenti alla commemorazione, l'espressione del vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la perdita del valoroso Collega.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Severi comunica che è presente alla seduta il prof. Solomon Lefschetz, emerito della Università di Princeton ed appartenente all'Università del Messico, a cui si deve il sorgere e l'affermarsi della fiorente scuola topologica americana. Al prof. Lefschetz l'Accademia ha attribuito il Premio Internazionale Feltrinelli di L. 5.000.000 per la Matematica, Meccanica e Applicazioni e il Socio Severi è lieto di porgere un affettuoso saluto all'insigne matematico che, con la sua multiforme opera scientifica, nella quale spiccano diversi volumi concernenti la geometria algebrica, la topologia e le equazioni differenziali, ha esercitato una grande influenza sullo sviluppo delle matematiche nel mondo durante gli ultimi quarant'anni. La Scuola Geometrica Italiana, con la quale il prof. Lefschetz ha avuto frequenti e fecondi rapporti di collaborazione, è onorata di considerarlo come un suo membro.

Il Presidente ringrazia il Socio Severi di essersi reso interprete, presso il prof. Lefschetz, dei sentimenti unanimi della Classe e porge all'illustre ospite le più vive felicitazioni e il cordiale saluto dell'Accademia e suo personale.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente presenta un plico suggellato, consegnato alla Cancelleria dal dott. Ugo Pontani in data 30 maggio c. a.

La Classe, constatata l'integrità dei sigilli, delibera che il plico di cui trattasi sia conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Margaria presenta il volume II della 3^a edizione aggiornata dell'opera sua e del prof. Luigi De Caro dal titolo: « Principii di fisiologia umana », che tratta della termoregolazione, delle ghiandole endocrine e ormoni, della fisiologia del sistema nervoso e degli organi di senso, del sistema e del lavoro muscolare e della riproduzione ed ereditarietà.

Il Socio Beccari presenta, per incarico del Collega Colosi, i due volumi del trattato dello stesso prof. Colosi dal titolo: « Zoologia e biologia generale », con le seguenti parole:

« In passato, e per molti anni, il compendio di Zoologia di Carlo Emery (in seguito rifatto ed ampliato da Alessandro Ghigi) costituì l'unico testo italiano ad uso degli studenti per il corso universitario di Zoologia. Poi venne quello del Pierantoni e, dopoché fu istituito per la laurea in Medicina il corso di Biologia e Zoologia generale in sostituzione dei corsi separati di Zoologia e Botanica, comparvero numerosi trattati più confacenti per quel corso, mentre ne furono pubblicati anche alcuni comprendenti la Zoologia sistematica. Non vi è quindi oggi in Italia penuria di buoni libri per l'insegnamento specialmente riguardo alla Biologia e alla Zoologia Generale. Tuttavia un nuovo libro di Zoologia, come questo del Colosi, non giunge superfluo, dato che, differendo dagli altri più o meno per l'ampiezza e per il particolare sviluppo di qualche capitolo, offre un maggior campo di scelta a seconda dei fini che ciascuno studioso si prefigge per la propria formazione culturale.

« È in due volumi, di complessive 1793 p., con 1404 figg. (molte originali) e un ricco indice analitico.

« La parte sistematica è svolta in giusta proporzione di quella generale e curata in maniera speciale, concordemente in parte al criterio seguito da molti altri zoologi moderni. Come lo stesso Colosi avverte, la sua opera non è, né poteva essere di erudizione, costretta com'è risultata entro limiti che pur hanno oltrepassato quelli che egli stesso e l'editore si erano prefissi. Ma per la copia dei dati che contiene e per il rigore scientifico col quale questi sono esposti, oltrepassa il carattere di un compendio o manuale didattico, e potrà essere consultata con profitto, oltre ché dallo studente, anche dallo studioso versato in altre discipline che desideri aggiornare le sue cognizioni d'indole generale e sistematica sul così vasto regno animale ».

Il Socio Tonzig presenta i volumi III e IV dei «Lavori dell'Istituto Botanico dell'Università di Milano», da lui diretto, contenenti 74 Note che si riferiscono ad argomenti assai diversi e mette in particolare evidenza quelle dedicate ai regolatori dell'attività cellulare e, altre, riguardanti la fisiologia dell'acido ascorbico.

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno presentato opere in omaggio all'Accademia.

Il Segretario accademico presenta le pubblicazioni inviate in dono all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci Scorza-Dragoni, Margaria, Tonzig, Caglioti, Semerano, Fantappiè, Picone, Cambi, Silva, G. B. Dal Piaz, Cotronei, Armellini e Clementi.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CLEMENTI A. - L'azione agglutinante della bilirubina sugli eritrociti in assenza di ioni calcio e in presenza di ioni magnesio.

SILVA G. - Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. - II. Formule risolutive.

SILVA G. - Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. - III. Determinazione delle irregolarità.

FICHERA G. - Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari. Note I e II (pres. dal Socio M. PICONE).

LEONARDI P. - Dislocazioni triassiche non orogeniche in val di Fassa (Dolomiti occidentali) (pres. dal Socio G. B. DAL PIAZ).

SCROCCO M. e NICOLAUS R. - Studio spettrofotometrico nell'infrarosso di alcuni derivati del 4-metil-3,5-dicarbetossi-pirrolo (pres. dal Corrisp. V. CAGLIOTI).

SEBASTIÃO E SILVA J. - Sui funzionali che sono funzioni di funzionali lineari dei loro argomenti (pres. dal Corrisp. L. FANTAPPIÈ).

TEMI PER DISCUSSIONI

Il Presidente comunica che è all'ordine del giorno la formulazione di proposte per temi di discussione da svolgere nel prossimo anno accademico e invita i Colleghi a prendere la parola.

Il Socio Califano propone, come tema, quello riguardante le ossidazioni biologiche che interesserebbe tutta la Categoria V.

Il Socio Cotronei è d'accordo e propone che il tema suggerito dal Collega Califano sia così precisato: « Le ossidazioni biologiche ».

Il Socio Cambi si associa in linea di massima, ma osserva che il suddetto tema gli sembra troppo vasto e propone pertanto che i Colleghi competenti abbiano degli scambi d'idee per concordare uno schema di lavoro più definito e circoscritto.

Il Presidente è senz'altro d'accordo e prega i Soci della Categoria V di voler studiare l'argomento e presentare concrete proposte nella seduta di novembre.

CONGRESSI

Il Socio Gortani comunica che l'Ente Nazionale Idrocarburi intende promuovere un Convegno internazionale per lo studio dei giacimenti gassiferi dell'Europa ed ha espresso il desiderio che tale manifestazione si svolga sotto gli auspici dell'Accademia, stanziando, a tale scopo, la somma di 20 milioni di lire.

Il Presidente prende atto con vivo compiacimento di quanto comunicato dal Collega Gortani e assicura che trasmetterà alla Presidenza dell'Accademia la proposta dell'Ente Nazionale Idrocarburi, al quale rivolge intanto un vivo ringraziamento.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 giugno 1956

- Atoms for Peace Awards*. A memorial to Henry Ford and Edsel Ford. Cambridge (Mss.), 1956. Pp. 26, in-8°.
- BALKE S. — *Entwicklungstendenzen bei der Deutschen Bundespost*. Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, 1955. Pg. 30, in-8°.
- BENIOFF Hugo and GUTENBERG Beno. — *General introduction to seismology*. Estr. da « Bulletin of the Department of Natural Resources of the State of California », 1955, n. 171, p. 11.
- COLOSI Giuseppe. — *Zoologia e biologia generale*. Vol. I e II. Torino, Unione Tipografico-Editrice Torinese, 1956. Voll. 2, in-4°, con figg.
- DE CARO Luigi. — Vedi: MARGARIA Rodolfo e DE CARO Luigi.
- DE PIETRI-TONELLI Pietro. — *Contro la mosca delle ciliege nuovi insetticidi di sicura efficacia*. Estr. da « L'Italia Agricola », 1956, n. 1.
- Estructura del Consejo Superior de Investigaciones Científicas*. Madrid, Talleres Gráficos « Jura », 1956. Pp. 253, in-8°.
- GEROLA D. U. — Vedi: GEROLA F. M. e GEROLA D. U.
- GEROLA F. M. e GEROLA D. U. — *Ricerche sui pascoli delle Alpi centro-orientali*. I: *Flora e vegetazione (Asiago-Vezzena-Vigolana)*; II: *Flora e vegetazione (Lessini-Baldo-Stivo-Pasubio)*. Estr. da « Memorie del Museo di Storia Naturale della Venezia Tridentina », vol. X, 1955, nn. 1 e 2.
- GUTENBERG Beno. — *Geophysical data implied in isostatic calculations*. Estr. da « Veröffentlichungen des Finnischen Geodätischen Institutes », n. 46.
- *Low velocity lithosphere channel*. Estr. da « Bulletin of the Geological Society of America », vol. LXVI, 1955, settembre.
- GUTENBERG Beno. — Vedi: BENIOFF Hugo and GUTENBERG Beno.
- Vedi: RICHTER Charles F. and GUTENBERG Beno.
- GUTENBERG Beno and RICHTER Charles F. — *Magnitude and energy of earthquakes*. Estr. da « Nature », vol. CLXXVI, 1955, ottobre.
- JANNATTONI Livio e MAGLIETTA Luigi. — *Il Cinquantenario del traforo del Sempione, 1906-1956*. Estr. da « Ingegneria Ferroviaria », 1956, n. 5.
- Lavori dell'Istituto Botanico dell'Università di Milano*. Vol. III e IV, 1954-1955.
- MACHADO BANDEIRA DE MELLO Lydio. — *A origem dos sexos*. Belo Horizonte, 1955. Pp. 317, in-8°.
- MAGLIETTA LUIGI. — Vedi: JANNATTONI Livio e MAGLIETTA Luigi.
- MARGARIA Rodolfo e DE CARO Luigi. — *Principii di fisiologia umana*. 3ª ediz. Vol. II. Milano, Casa Ed. Francesco Vallardi, 1956. Pp. xv-946, in-8°, con figg.
- MEFFROY Jean. — *Contribution à l'étude de la stabilité du système solaire* (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris). Paris, Gauthier-Villars, 1955. Pp. 224, in-8°.
- MINISTERO DELL'INDUSTRIA E DEL COMMERCIO. DIREZIONE GENERALE DELLE MINIERE. CORPO DELLE MINIERE. — *Massimario del Consiglio Superiore delle Miniere*. Estr. da « Relazione sul Servizio Minerario e Statistica delle Industrie Estrattive del 1949 », vol. LXXV.
- PINTO Giovanni. — *Il concetto di sanità mentale*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1956. Pp. 99, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, XXXVII).
- POLSKA AKADEMIA NAUK. — *Sesja Kopersnikowska, 15-16, IX, 1953*. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1955. Pp. 482, in-8°, con tavv.
- *Zagadnienie zastępczości czynności ruchowych*. Warszawa, 1955. Pp. 212, in-8° (Zeszyty Problemowe Nauk Polskiej, V).
- RICHTER Charles F. and GUTENBERG Beno. — *Seismicity of Southern California*. Estr. da « Contribution of the Division of the

Geological Sciences, California Institute of Technology», n. 627.

STÜBNER W. — *Einführung in eine organische Physik*. Fasc. 2, in-4° (In cianografia).

TECHNISCHE UNIVERSITÄT. BERLIN-CHARLOTTENBURG. — *Feierstunde in der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg am 15. Januar 1955 aus Anlass der Wiedererrichtung der Werner Siemens-Denkmal*.

Berlin-Charlottenburg, s. d. Pp. 24, in-8°, con figg.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI. — *L'Istituto di Agronomia Generale e Coltivazioni erbacee della Facoltà Agraria di Portici negli Anni Accademici 1953-54 e 1954-55 [Attività didattica e sperimentale]*. Portici, A. G. Della Torre, 1956. Pp. 64, in-4°, con figg.

A. SIGNORINI.

ERRATA CORRIGE

Nella Nota di T. Terranova, pubblicata nel fascicolo 1, vol. XX (Gennaio 1956), pp. 116-125, la *Tabella VII* deve essere corretta nel modo seguente:

TABELLA VII.

Sostanze aggiunte	Mezzo sintetico basale liquido di Medill e O'Kane		
	% Trasmittanza		
	Lecture iniziali	a 24 h	a 48 h
Miscela aminoacidi	84	80	78
Idrolizzato caseina	81	8	6
Solfato d'ammonio	80	7	6
Penicillina 5000 U/ml,	100	21	21
Penicillina+aminoacidi	100	100	100
Penicillina+aminoacidi	100	48	47
Penicillina+Idr. caseina.	100	42	40
Penicillina+Riboflavina	84	82	78
Penicillina+Siero	84	100	80
Penicillina+Solfato am.	100	84	92
Penicillina+Aminoacidi+Atebrin	100	100	94

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

- AGOSTINELLI C., Piccoli movimenti in una massa gassosa stellare in evoluzione adiabatica. Nota I, 212.
- Piccoli movimenti in una massa gassosa stellare in equilibrio radiativo. Nota II, 347.
- AGOSTONI E., TAGLIETTI A. e SETNIKAR I., I fattori che intervengono nel regolare gli scambi di liquido attraverso la pleura viscerale, 106.
- AGOSTONI E., vedi MARGARIA R.
- ANTONIELLI M., Su un metodo colorimetrico per la microdeterminazione del Sili-
cio nei tessuti, 813.
- ANTONINI E., vedi ROSSI-FANELLI A.
- ARÀNEO A., vedi MALATESTA L.
- ARCHETTI I. e FELICI A., Nota sull'agente eziologico della epidemia marchigiana di meningite benigna, 831.
- ARCIDIACONO G., Sul significato fisico della «teoria di relatività finale», 463.
- La elettrodinamica e la idrodinamica nella «teoria di relatività finale», 616.

B

- BAFFONI G. M., Il nucleo della cellula nervosa dei Vertebrati. Osservazioni sui Mam-
miferi, 125.
- BALIN L., vedi TREZZI F.
- BARASA A. e GOBETTO A., Istogenesi del grande osso cardiaco dei bovini e sue trasformazioni strutturali durante l'accrescimento e la senescenza, 657.
- BASSOTTI L., Sulle relazioni a tre termini fra le coordinate di Grassmann. Nota I, 200.
- Sulle relazioni a tre termini fra le coordinate di Grassmann. Nota II, 318.
- BATINI C. e POMPEIANO O., Effetti di lesioni fastigiali croniche sul tono posturale del Gatto, 504.
- BENEDICENTI A., vedi TCHAKHOTINE S.
- BERTOLINI F., Su una generalizzazione del problema di Poisson, 759.

- BONINO C. B., Ricerche sulle oscillazioni « riferibili ai gruppi $C \equiv N$ » nel ferrocianuro di potassio cristallino, 418.
- e FABBRI G., Nuove indagini sperimentali sulla risoluzione nello spettro del cristallo della banda ultrarossa riferibile ai gruppi CN riscontrata nelle soluzioni acquose di ferrocianuro di potassio, 414.
- — Sullo spettro ultrarosso di assorbimento del Molibdebotocianuro di potassio, 566.
- e SALVETTI O., Simmetria e assorbimento ultrarosso del ferrocianuro di potassio anidro e idratato, 150.
- BOURGIN D. G., Un indice dei punti uniti. Nota II, 43.

C

- CALIFANO L., Commemorazione del Corrispondente Piero Redaelli, 832.
- CAMBI L. e CANONICA L., Complessi cobaltosi e cobaltici del benzoimidazolo e del benzopirazolo, 17.
- e PAGLIA E., Complessi triazolici del cobalto. Nota II, 735.
- CANDIOLLO L., Sull'origine delle cisti epiteliali esito di trapianto nel tessuto sottocutaneo di mucosa gastrica fetale, dopo trattamento con bleu-trypan, nel coniglio, 670.
- CANONICA L., vedi CAMBI L.
- CAPRIOLI G., vedi FORTINI T.
- CARTONI G., vedi LIBERTI A.
- CASNATI G., vedi PIOZZI F.
- CASTAGNOLI B., vedi MAZZAROCCHIO V.
- CAVALLINI D. e STIRPE F., Scissione biologica del cisteinsolfonato in tiosolfati, 378.
- CAVINATO A., Contributo alla conoscenza geologica della Sardegna. — I. Le pietre verdi, 572.
- CHERUBINO S., Logaritmi e radici, r^{me} di matrici non singolari, 24.
- CHISINI O., Sul comportamento effettivo delle polari, 547.
- CHIUNINI F. e MILLETTI L., Ancora sulla azione della penicillina sull'accrescimento

- e sulla differenziazione delle larve di « *Bufo vulgaris* ». Nota I, 249.
- CHIUMI F. e MILLETTI L., Ancora sull'azione della penicillina sull'accrescimento e sulla differenziazione delle larve di « *Bufo vulgaris* ». Nota II, 366.
- CIMINO M., Sulla stabilità degli ammassi globulari nella più generale ipotesi della distribuzione sferica della loro densità. Nota I, 217.
- Sulla stabilità degli ammassi globulari nella più generale ipotesi della distribuzione sferica della loro densità. Nota II, 353.
- COLA M., Sintesi e proprietà di un pirosseno tipo diopside ($\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$), 244.
- CONTI L., vedi LIBERTI A.
- CORRADINI P., vedi NATTA G.
- CREMONESI A., Sull'ortonormalizzazione di un particolare sistema di funzioni, 168.
- CREPAX P., Effetti della stimolazione del « lobus anterior » del cervelletto sull'attività elettrica della corteccia cerebrale, 95.
- e INFANTELLINA F., Modificazioni della attività elettrica del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto per effetto della sostanza P, 101.
- Effetti della recisione delle connessioni nervose sui fenomeni elettrici spontanei della corteccia cerebellare, 652.
- CRESCENZI V., vedi LIBERTI A.

D

- DALL'ASTA G., vedi NATTA G.
- DAL PIAZ G., Commemorazione dei Socio Ramiro Fabiani, 676.
- D'AMATO F., Attuali conoscenze sulla citotassonomia del genere « *Colchicum* », 632.
- tassonomia del genere « *Wolchicum* », 632.
- D'AMORE A., vedi MAZZAROCCHIO V.
- DE GIORGI E., Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli, 438.
- DEMARIA D. C., Sui ricoprimenti finiti della superficie sferica, 185.
- DE RENZI C. e POMPEIANO O., Effetti di lesioni unilaterali della corteccia cerebellare vermiana e del nucleo del tetto sul tono posturale del Gatto neonato decerebrato, 508.
- DE SCHWARZ M. J., Effetti flessionali di carichi sui bordi trasversali di volte cilindriche circolari, 49.
- DE SOCIO M. L., Sulle condizioni al contorno per le guide imperfettamente conduttrici, 469.

- DOLCHER T. e MARIANI P., Osservazioni sulla distensione cellulare determinata dall'estere etilico dell'acido indolacetico, 83.

F

- FABBRI G., vedi BONINO G. B.
- FADIGA E., PUPILLI G. C. e VON BERGER G. P., Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto, 426.
- — — Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto trattato con cloralosio, 575.
- FANTAPPIÈ L., Sull'integrale affine di una funzione analitica di due n -uple di variabili, 539.
- FAVERO P., MIRRI A. M. e VIANELLO E., Determinazione oscillografica dell'andamento della curva superficie-tempo per l'elettrodo a goccia di mercurio, 783.
- FELICI A., vedi ARCHETTI I.
- FERRERO F., vedi HANSON A.
- FINZI L., Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico. Nota I, 205.
- Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico. Nota II, 338.
- FOFFANI A., Sulla « reversibilità » polarografica di alcuni sistemi azo-idrazo, 804.
- FOIAS C., Elementi completamente continui e quasi completamente continui di un'algebra di Banach, 155.
- FORTI G., vedi MARRÈ E.
- FORTINI T. e CAPRIOLI G., Variazione, dal centro al lembo del Sole, del profilo della linea spettrale $\lambda = 4227$ del CaI. Nota I, 610.
- Variazione, dal centro al lembo del Sole, del profilo della linea spettrale $\lambda = 4227$ del CaI. Nota II, 773.

G

- GALLARATI D., Alcune osservazioni sopra le varietà i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati, 193.
- Sulle superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggiano a piani assegnati, 329.
- GAUTSCHI W., Una estensione agli integrali doppi di una condizione di Picone, necessaria per un estremo, 283.
- GEROLA F. M. e LAUDI G., Ricerche sulla fisiologia delle piante virosate. - I. Conte-

nuto in acido ascorbico nelle foglie di «*Spinacia oleracea*», affette da mosaico del cetriolo, 89.

GHIZZETTI A., Sui coefficienti di Fourier-Stieltjes di una funzione non decrescente, 580.

— Sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente, 753.

GIANNUZZI M. A., Sopra l'orbita della binaria π_2 *Ursae Minoris* (A.D.S. 9769), 224.

— Il sistema binario 20 *Draconis* (A.D.S. 10279), 605.

— La doppia ottica A.D.S. 10332, 766.

GIUSTINA G. e MESCHIA G., La riserva alcalina in condizioni di ipotermia, 511.

GOBETTO A., vedi BARASA A.

H

HANSON A., FERRERO F., MALVANO R. e TRIBUNO C., Sulla fotodisintegrazione del $^{209}\text{B}_{83}$, 362.

I

INFANTELLINA F., vedi CREPAX, P.

IPPOLITO F. e LUCINI P., Ulteriori osservazioni geologiche sulla zona di Monticchio nella basse valle dell'Agri (Basilicata), 239.

J

JARRE G., Un modello semplificato di miscela multipla di gas, 596.

K

KIRBI D., Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota I, 179.

— Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota II, 325.

— Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota III, 446.

L

LAUDI G., vedi GEROLA F. M.

— vedi MARRÈ E.

— vedi PECE G.

LERAY J., Fonction de variables complexes: sa représentation comme somme de pui-

sances négatives de fonctions linéaires, 589.

LEVANTI C., vedi STEFANELLI A.

LEVI F., Sul calcolo degli effetti di bordo nelle vòlte sottili cilindriche, 342.

LIBERTI A. e CARTONI G., Impiego accoppiato della coulombometria e della cromatografia in fase gassosa per l'analisi di costituenti di miscele volatili, 787.

— CONTI L. e CRESCENZI V., Valutazione del peso molecolare quale mezzo di identificazione di costituenti in cromatografia in fase gassosa, 623.

LUCINI P., vedi IPPOLITO, F.

M

MALATESTA L. e ARÀNEO A., Composti nitrosilici di ferro e cobalto con i fosfiti arilici, le triaril-fosfine, le triaril-arsine e le triaril-stibine. Nota preliminare, 365.

MALVANO R., vedi HANSON A.

MANARINI A. M., Sulla propagazione delle onde piane nei conduttori in moto, 229.

— Sulla velocità dell'energia elettromagnetica nei cristalli in moto, 357.

MARCUS S., Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel, 584.

MARCUZZI G., L'osmoregolazione nel «*Tenebrio molitor*» L. (Col. Tenebrionidae), 492.

MARGARIA R., AGOSTONI E. e TAGLIETTI A., Il tempo di apnea in funzione della pressione endopolmonare, 277.

— — — e MILIC EMILI G., Cinetica del ritorno ai valori di riposo della frequenza cardiaca e della ventilazione polmonare dopo lavoro muscolare, 739.

MARIANI P., vedi DOLCHER T.

MARINI M., Osservazioni sul nucleo della cellula nervosa degli Anfibi urodeli, 373.

MARRÈ E. e LAUDI G., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. XVI. Aumento dell'acido deidroascorbico ed inibizione della crescita in parti isolate di piante superiori trattate con acido ascorbico, 77.

— — Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XVII. Ripercussioni della rimozione di centri produttori di auxina sul ricambio del glutatione e dell'acido ascorbico in plantule di pisello, 638.

— — Attività del sistema ossidativo TPN-glutatione-acido ascorbico in preparati mitocondriali di pisello («*Pisum sativum*»), 806.

MARRÈ E., FORTI G. e PECE G., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XVIII. Inibizione da acido deidroascorbico dell'attività fosforilativa di preparati mitocondriali, 646.

— e SERVETTAZ O., Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. - I. Sul limite di resistenza all'inattivazione termica dei sistemi fotosintetico e respiratorio di alghe di acque termali, 72.

— vedi PECE G.

MARTIN E. L., Funzioni prive di estremanti in moti di sistemi binari di massa variabile, 56.

MAZZARACCHIO V., ORFEI Z., D'AMORE A., RAVAIOLI L. e CASTAGNOLI B., Il « virus » aftoso su coltura di tessuti « in vitro ». - I. Coltivazione dei ceppi A₄-O-C su cellule renali tripsinizzate di suino, 815.

MESCHIA G., vedi GIUSTINA G.

MESSERI A., Sulla localizzazione della resina nei canali resiniferi del corpo legnoso delle Conifere, 481.

MILIC EMILI G., vedi MARGARIA R.

MILLETTI L., vedi CHIUINI F.

MINEO C., Ancora sulla geodesia intrinseca, 552.

MIRRI A. M., vedi FAVERO P.

MORERO D., vedi NATTA G.

N

NARDINI R., Su qualche effetto del secondo ordine nella magneto-idrodinamica. Nota I, 457.

— Su qualche effetto del secondo ordine nella magneto-idrodinamica. Nota II, 591.

NATTA G., CORRADINI P. e DALL'ASTA G., Struttura della catena del polipropilenoossido cristallino, 408.

NATTA G., CORRADINI P. e PORRI L., Sulla struttura di nuovi polimeri a concatenamento 1-4 trans di diolefine coniugate, 728.

— — — e MORERO D., Polimero cristallino del butadiene a concatenamento 1-2 isotattico, 560.

NICOLAUS R., vedi SCROCCO M.

NOBILE V., Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due. Nota I, 715.

O

ORFEI Z., vedi MAZZARACCHIO V.

ORTOLANI G., Azione della tripsina sui quar-tetti animali, isolati allo stadio di 8 blastomeri, dell'uovo di « Phallusia mamillata », 827.

P

PAGLIA E., vedi CAMBI L.

PECE G., LAUDI G. e MARRÈ E., Azione inibente dell'acido deidroascorbico sull'attività ossidativa di preparati mitocondriali di fegato di ratto, 513.

PECE G., vedi MARRÈ E.

PECORINI G., La facies bauxitica nel Cre-taceo della Nurra (Sardegna). Nota preliminare, 232.

PERRI T., Ricerche sulle correlazioni tra midollo spinale ed arti negli Anfibi Anuri. Esperienze di asportazione e di trapianto di arti, 136.

— Trapianti embrionali di midollo spinale e genesi dei corni motori in « Bufo vulgaris », 666.

PETTINEO B., Sulla funzione di Green pel problema di Dirichlet relativo alle equazioni lineari ellittiche, 306.

PICONE M., Il parametro monormale di una varietà regolare dello spazio euclideo, 705.

PIERANTONI U., Commemorazione del Socio Achille Russo, 386.

PIOZZI F. e CASNATI G., Sulla sintesi di Madelung modalità della preparazione dei 2-alchil-indoli sostituiti, 629.

POMPEIANO O., Meccanismi estracerebellari nella regolazione reciproca delle risposte posturali alla stimolazione della corteccia vermiiana del « lobus anterior », 501.

— vedi BATINI C.

— vedi DE RENZI C.

PORRI L., vedi NATTA G.

PUCCI C., Alcune proprietà degli involucri, 294.

PUPILLI G. C., vedi FADIGA E.

R

RAVAIOLI L., vedi MAZZARACCHIO V.

RICCERI G., Origine e significato biochimico dell'urea nell'embrione di pollo nei primi stadi di sviluppo, 818.

RIZZA G. B., Sulle condizioni di regolarità delle funzioni in un'algebra, 38.

— Teoremi e formule integrali nelle algebre di Clifford, 174.

ROSSI A. Sulla incompatibilità larvale tardiva nei trapianti xenoplastici di Urodeli su Anuri, 130.

ROSSI-FANELLI A., ANTONINI E. e TRASARTI F., Ricerche sulla mioglobina degli invertebrati inferiori. Composizione in aminoacidi della mioglobina e l'emoglobina di «Thunnus Thynnus», 737.

S

SABBADIN A., Studio sperimentale della gemmazione in «Botryllus schlosseri» (Pallas) [Ascidacea], 379.

— Osservazioni sull'accrescimento delle gemme e degli zooidi di «Botryllus schlosseri» (Pallas) [Ascidacea] in condizioni normali e sperimentali, 485.

— «Situs inversus viscerum» provocato sperimentalmente in «Botryllus schlosseri» (Pallas) [Ascidacea], 659.

SALVETTI O., vedi BONINO G. B.

SCORZA DRAGONI G., Sulla derivazione degli integrali indefiniti, 711.

SCROCCO M. e NICOLAUS R., Ricerche nel campo della spettrofotometria I.R. ed U.V. su alcuni acidi pirrolici, 795.

SEBASTIÃO E SILVA J., Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes. Nota I, 743.

SEGRE B., Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota III, 3.

— Alcune osservazioni sulle superficie cubiche nel campo razionale, 147.

— Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota I, 271.

— Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota II, 395.

— Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota III, 531.

SERVETTAZ O., Sulla presenza del ciclo di ossidazione diretta degli esosio-mono-fosfati in preparati mitocondriali vegetali, 255.

SERVETTAZ O., vedi MARRÈ E.

SETNIKAR T., vedi AGOSTONI E.

SEVERI F., Contributi alla teoria delle irregolarità d'una varietà algebrica, 7.

SILVA G., Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. — I. Impostazione del problema, 720.

SORACE O., Sulle superficie di S_4 aventi cinque iperpiani di Blaschke indipendenti, 452.

STEFANELLI A. e LEVANTI C., Fenomeni di indipendenza tra accrescimento, morfogenesi, differenziamento istologico e funzione in abbozzi cardiaci espianati di embrione di pollo, 263.

STIRPE F., vedi CAVALLINI D.

T

TAGLIETTI A., vedi AGOSTONI E.

— vedi MARGARIA R.

TALLINI G., Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti. Nota I, 311.

— Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti. Nota II, 442.

TCHAKHOTINE S. e BENEDICENTI A., Azione di alcuni farmaci sugli esseri unicellulari, 19.

TERRANOVA T., Azione della riboflavina e dell'atebrin sulla produzione di forme L, 116.

TONOLO A., Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo. Nota I, 403.

— Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo. Nota II, 556.

TORALDO DI FRANCIA, Equazioni integro-differenziali e principio di Babinet per gli schermi piani a conduttività unidirezionale, 476.

TORTORICI P., Sulle deviazioni angolari locali del Geoide dall'Ellissoide, 777.

TRASARTI F., vedi ROSSI-FANELLI A.

TREZZI F. e BALIN L., Ricerche spettrofotometriche sull'azione della colchicina su estratti proteici *in vitro*, 60.

TRIBUNO C., vedi HANSON A.

V

VIANELLO E., vedi FAVERO P.

VIOLA T., Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti. Nota I, 290.

VIOLA T., Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti. Nota II, 431.

VOLPATO M., Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Nota I, 30.

— Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Nota II, 161.

— Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Nota III, 299.

VON BERGER G. P., vedi FADIGA E.

W

WIDDER D. V., Una trasformazione integrale connessa con la propagazione del calore, 750.

WIRTH A., Analisi dell'elettroretinogramma ottenuto con differenti tempi di esposizione, 112.

Z

ZACHER G., Sull'ordine di un gruppo finito risolubile somma dei suoi sottogruppi di Sylow, 171.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi funzionale. — Elementi completamente continui e quasi completamente continui di un'algebra di Banach. FOIAS C., 155.

Analisi matematica. — Su una generalizzazione del problema di Poisson. BERTOLINI F., 759.

— Sull'analicità delle estremali degli integrali multipli. DE GIORGI E., 438.

— Sull'integrale affine di una funzione analitica di due n -uple di variabili. FANTAPPIÈ L., 539.

— Una estensione agli integrali doppi di una condizione di Picone, necessaria per un estremo. GAUTSCHI W., 283.

— Sui coefficienti di Fourier-Stieltjes di una funzione non decrescente. GHIZZETTI A., 580.

— Sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente. GHIZZETTI A., 753.

— Fonction de variables complexes: sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctions linéaires. LERAY J., 589.

— Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel. MARCUS S., 584.

— Il parametro monormale di una varietà regolare dello spazio euclideo. PICONE M., 705.

— Alcune proprietà degli involucri. PUCCI C., 294.

— Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti. Nota I. VIOLA T., 290.

— Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti. Nota II. VIOLA T., 431.

Astronomia. — Sulla stabilità degli ammassi globulari nella più generale ipotesi della distribuzione sferica della loro densità. Nota I. CIMINO M., 217.

— Sulla stabilità degli ammassi globulari nella più generale ipotesi della distribu-

zione sferica della loro densità. Nota II. CIMINO M., 353.

— Variazione, dal centro al lembo del Sole, del profilo della linea spettrale $\lambda = 4227$ del CaI. Nota I. FORTINI T. e CAPRIOLI G., 610.

— Variazione, dal centro al lembo del Sole, del profilo della linea spettrale $\lambda = 4227$ del CaI. Nota II. FORTINI T. e CAPRIOLI G., 773.

— Sopra l'orbita della binaria π_2 *Ursae Minoris* (A.D.S. 9769). GIANNUZZI M. A., 224.

— Il sistema binario 20 Draconis (A.D.S. 10279). GIANNUZZI M. A., 605.

— La doppia ottica A.D.S. 10332. GIANNUZZI M. A., 766.

— Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due. Nota I. NOBILE V., 715.

Astronomia geodetica. — Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. — I. Impostazione del problema. SILVA G., 720.

B

Biochimica. — Scissione biologica del cisteinsolfonato in tiosolfati. CAVALLINI D. e STIRPE F., 378.

— Origine e significato biochimico dell'urea nell'embrione di pollo nei primi stadi di sviluppo. RICCERI G., 818.

— Ricerche sulla mioglobina degli invertebrati inferiori. Composizione in aminoacidi della mioglobina e l'emoglobina di « *Thunnus Thynnus* ». ROSSI-FANELLI A., ANTONINI E. e TRASARTI F., 737.

Biologia. — Nota sull'agente eziologico della epidemia marchigiana di meningite benigna. ARCHETTI I. e FELICI A., 831.

- Il nucleo della cellula nervosa dei Vertebrati. Osservazioni sui Mammiferi. BAF-
FONI G. M., 125.
- Sull'origine delle cisti epiteliali esito di
trapianto nel tessuto sottocutaneo di muc-
cosa gastrica fetale, dopo trattamento con
bleu-trypan, nel coniglio. CANDIOLLO L.,
670.
- Osservazioni sul nucleo della cellula ner-
vosa degli Anfibi urodela. MARINI M., 373.
- Azione della tripsina sui quartetti ani-
mali, isolati allo stadio di 8 blastomeri,
dell'uovo di « Phallusia mamillata ». OR-
TOLANI G., 827.
- Azione inibente dell'acido deidroascor-
bico sull'attività ossidativa di preparati
mitocondriali di fegato di ratto. PECE G.,
LAUDI G. e MARRÈ E., 513.
- Ricerche sulle correlazioni tra midollo
spinale ed arti negli Anfibi Anuri. Espe-
rienze di asportazione e di trapianto di
arti. PERRI T., 136.
- Trapianti embrionali di midollo spinale
e genesi dei corni motori in « Bufo vulga-
ris ». PERRI T., 666.
- Sulla incompatibilità larvale tardiva nei
trapianti xenoplastici di Urodela su Anuri.
ROSSI A., 130.
- Fenomeni di indipendenza tra accresci-
mento, morfogenesi, differenziamento isto-
logico e funzione in abbozzi cardiaci
espantati di embrione di pollo. STEFA-
NELLI A. e LEVANTI C., 263.
- Azione di alcuni farmaci sugli esseri
unicellulari. TCHAKHOTINE S. e BENEDI-
CENTI A., 19.
- Botanica.** — Sulla localizzazione della re-
sina nei canali resiniferi del corpo legnoso
delle Conifere. MESSERI A., 481.

C

- Citogenetica.** — Attuali conoscenze sulla
citotassonomia del genere « Colchicum ».
D'AMATO F., 632.
- Chimica.** — Sullo spettro ultrarosso di
assorbimento del Molibdenotrocianuro di
potassio. BONINO G. B. e FABBRI G., 566.
- Determinazione oscillografica dell'anda-
mento della curva superficie-tempo per
l'elettrodo a goccia di mercurio. FAVERO P.,
MIRRI A. M. e VIANELLO E., 783.
- Sulla « reversibilità » polarografica di alcuni
sistemi azo-idrazo. FOFFANI A., 804.
- Impiego accoppiato della coulombometria
e della cromatografia in fase gassosa per
l'analisi di costituenti di miscele volatili.
LIBERTI A. e CARTONI G., 787.
- Valutazione del peso molecolare quale
mezzo di identificazione di costituenti in
cromatografia in fase gassosa. LIBERTI A.,
CONTI L. e CRESCENZI V., 623.
- Struttura della catena del polipropileno-
sido cristallino. NATTA G., CORRADINI P.
e DALL'ASTA G., 408.
- Sulla struttura di nuovi polimeri a con-
catenamento 1-4 trans di diolefine coniugate.
NATTA G., CORRADINI P. e PORRI L.,
728.
- Polimero cristallino del butadiene a con-
catenamento 1-2 isotattico. NATTA G.,
PORRI L., CORRADINI P. e MORERO D., 560.
- Ricerche nel campo della spettrofoto-
metria I. R. ed U. V. su alcuni acidi
pirrolici. SCROCCO M. e NICOLAUS R., 795.
- Chimica fisica.** — Ricerche sulle oscil-
lazioni « riferibili ai gruppi $C\equiv N$ » nel
ferrocianuro di potassio cristallino. BO-
NINO G. B., 418.
- Nuove indagini sperimentali sulla riso-
luzione nello spettro del cristallo della
banda ultrarossa riferibile ai gruppi CN
riscontrata nelle soluzioni acquose di fer-
rocianuro di potassio. BONINO G. B. e
FABBRI G., 414.
- Simmetria e assorbimento ultrarosso del
ferrocianuro di potassio anidro e idratato.
BONINO G. B. e SALVETTI O., 150.
- Chimica inorganica.** — Complessi cobal-
tosi e cobaltici del benzoimidazolo e del
benzopirazolo. CAMBI L. e CANONICA L., 17.
- Complessi triazolici del cobalto. Nota II.
CAMBI L. e PAGLIA E., 735.
- Composti nitrosilici di ferro e cobalto
con i fosfiti arilici, le triaril-fosfine, le
triaril-arsine e le triaril-stibine. MALA-
TESTA L. e ARÀNEO A., 365.
- Chimica organica.** — Sulla sintesi di
Madelung: modalità della preparazione dei
2-alchil-indoli sostituiti. PIOZZI F. e CA-
SNATI G., 629.
- Commemorazioni.** — Commemorazione
del Corrispondente Piero Redaelli. CALI-
FANO L., 832.
- Commemorazione del Socio Ramiro Fa-
biani. DAL PIAZ G., 676.
- Commemorazione del Socio Achille Russo.
PIERANTONI U., 386.

Comunicazioni varie, 141, 267, 389, 693, 838.

Congressi, 267, 521, 841.

Cosmogonia. — Funzioni prive di estremani in moti di sistemi binari di massa variabile. MARTIN E. L., 56.

E

Elastostatica. — Effetti flessionali di carichi sui bordi trasversali di volte cilindriche circolari. DE SCHWÄRZ M. J., 49.

Embriologia. — Studio sperimentale della gemmazione in « Botryllus schlosseri » (Pallas) (Ascidacea). SABBADIN A., 379.

— Osservazioni sull'accrescimento delle gemme e degli zooidi di « Botryllus schlosseri » (Pallas) Ascidacea, in condizioni normali e sperimentali. SABBADIN A., 485.

— « Situs inversus viscerum » provocato sperimentalmente in « Botryllus schlosseri » (Pallas) [Ascidacea]. SABBADIN A., 659.

F

Fisica. — Sulla fotodisintegrazione del $^{209}\text{Bi}_{83}$. HANSON A., FERRERO F., MALVANO R. e TRIBUNO C., 362.

Fisica metemantica. — Sul significato fisico della « teoria di relatività finale ». ARCIDIACONO G., 463.

— La elettrodinamica e la idrodinamica nella « teoria di relatività finale ». ARCIDIACONO G., 616.

— Sulle condizioni al contorno per le guide imperfettamente conduttrici. DE SOCIO M. L., 469.

— Sulla propagazione delle onde piane nei conduttori in moto. MANARINI A. M., 229.

— Sulla velocità dell'energia elettromagnetica nei cristalli in moto. MANARINI A. M., 357.

— Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo. Nota I. TONOLO A., 403.

— Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo. Nota II. TONOLO A., 556.

— Equazioni integrodifferenziali e principio di Babinet per gli schermi piani a conduttività unidirezionale. TORALDO DI FRANCIA G., 476.

Fisiologia. — I fattori che intervengono nel regolare gli scambi di liquido attraverso la pleura viscerale. AGOSTONI E., TAGLIETTI A. e SETNIKAR I., 106.

— Su un metodo colorimetrico per la microdeterminazione del Silicio nei tessuti. ANTONIELLI M., 813.

— Effetti di lesioni fastigiali croniche sul tono posturale del Gatto. BATINI C. e POMPEIANO O., 504.

— Ancora sull'azione della penicillina sull'accrescimento e sulla differenziazione delle larve di « Bufo vulgaris ». Nota I. CHIUINI F. e MILLETTI L., 249.

— Ancora sull'azione della penicillina sull'accrescimento e sulla differenziazione delle larve di « Bufo vulgaris ». Nota II. CHIUINI F. e MILLETTI L., 366.

— Effetti della stimolazione del « lobus anterior » del cervelletto sull'attività elettrica della corteccia cerebrale. CREPAX P., 95.

— Modificazioni dell'attività elettrica del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto per effetto della sostanza P. CREPAX P. e INFANTELLINA F., 101.

— Effetti della recisione delle connessioni nervose sui fenomeni elettrici spontanei della corteccia cerebellare. CREPAX P. e INFANTELLINA F., 652.

— Effetti di lesioni unilaterali della corteccia cerebellare vermiana e del nucleo del tetto sul tono posturale del Gatto neonato decerebrato. DE RENZI C. e POMPEIANO O., 508.

— Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto. FADIGA E., PUPILLI G. C. e VON BERGER G. P., 426.

— Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto trattato con cloralosio. FADIGA E., PUPILLI G. C. e VON BERGER G. P., 575.

— La riserva alcalina in condizioni di ipotermia. GIUSTINA G. e MESCHIA G., 511.

— Il tempo di apnea in funzione della pressione endopolmonare. MARGARIA R., AGOSTONI E. e TAGLIETTI A., 277.

— Cinetica del ritorno ai valori di riposo della frequenza cardiaca e della ventilazione polmonare dopo lavoro muscolare. MARGARIA R., TAGLIETTI A., AGOSTONI E. e MILIC EMILI G., 739.

- Meccanismi estracerebellari nella regolazione reciproca delle risposte posturali alla stimolazione della corteccia vermiiana del « lobus anterior ». POMPEIANO O., 501.
- Analisi dell'elettoretinogramma ottenuto con differenti tempi di esposizione. WIRTH A., 112.

Fisiologia vegetale. — Osservazioni sulla distensione cellulare determinata dall'estere etilico dell'acido indolacetico. DOLCHER T. e MARIANI P., 83.

- Ricerche sulla fisiologia delle piante virosate. — I. Contenuto in acido ascorbico nelle foglie di « Spinacia oleracea » affette da mosaico del cetriolo. GEROLA F. M. e LAUDI G., 89.
- Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XVI. Aumento dell'acido deidroascorbico ed inibizione della crescita in parti isolate di piante superiori trattate con acido ascorbico. MARRÈ E. e LAUDI G., 77.
- Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XVII. Ripercussioni della rimozione di centri produttori di auxina sul ricambio del glutatione e dell'acido ascorbico in plantule di pisello. MARRÈ E. e LAUDI G., 638.
- Attività del sistema ossidativo TPN-glutatione-acido ascorbico in preparati mitocondriali di pisello (« *Pisum sativum* »). MARRÈ E. e LAUDI G., 806.
- Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XVIII. Inibizione da acido deidroascorbico dell'attività fosforilativa di preparati mitocondriali. MARRÈ E., FORTI G. e PECE G., 646.
- Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. — I. Sul limite di resistenza all'inattivazione termica dei sistemi fotosintetico e respiratorio di alghe di acque termali. MARRÈ E. e SERVETTAZ O., 72.
- Sulla presenza del ciclo di ossidazione diretta degli esosio-mono-fosfati in preparati mitocondriali vegetali. SERVETTAZ O., 255.
- Ricerche spettrofotometriche sull'azione della colchicina su estratti proteici *in vitro*. TREZZI F. e BALIN L., 60.

G

Gasdinamica. — Un modello semplificato di miscela multipla di gas. JARRE G., 596.

Geodesia. — Ancora su certa geodesia intrinseca. MINEO C., 552.

— Sulle deviazioni angolari locali del Geoide dall'Ellissoide. TORTORICI P., 777.

Geologia. — Contributo alla conoscenza geologica della Sardegna. — I. Le pietre verdi. CAVINATO A., 572.

— Ulteriori osservazioni geologiche sulla zona di Monticchio nella bassa valle dell'Agri (Basilicata). IPPOLITO F. e LUCINI P., 239.

— La facies bauxitica nel Cretaceo della Nurra (Sardegna). Nota preliminare. PECORINI G., 232.

Geometria. — Sulle relazioni a tre termini fra le coordinate di Grassmann. Nota I. BASSOTTI L., 200.

— Sulle relazioni a tre termini fra le coordinate di Grassmann. Nota II. BASSOTTI L., 318.

— Sul comportamento effettivo delle polari. CHISINI O., 547.

— Sui ricoprimenti finiti della superficie sferica. DEMARIA D. C., 185.

— Alcune osservazioni sopra le varietà i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati. GALLARATI D., 193.

— Sulle superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggiano a piani assegnati. GALLARATI D., 329.

— Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota I. KIRBY D., 179.

— Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota II. KIRBY D., 325.

— Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota III. KIRBY D., 446.

— Sulle superficie di S_4 aventi cinque iperpiani di Blaschke indipendenti. SORACE O., 452.

— Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti. Nota I. TALLINI G., 311.

— Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti. Nota II. TALLINI G., 442.

Geometria algebrica. — Contributi alla teoria delle irregolarità d'una varietà algebrica. SEVERI F., 7.

M

Magneto-idrodinamica. — Su qualche effetto del secondo ordine nella magne-

to-idrodinamica. Nota I. NARDINI R., 457.

— Su qualche effetto del secondo ordine nella magneto-idrodinamica. Nota II. NARDINI R., 591.

Matematica. — Logaritmi e radici r^{me} di matrici non singolari. CHERUBINO S., 24.

— Sull'ortonormalizzazione di un particolare sistema di funzioni. CREMONESI A., 168.

— Sulla derivazione degli integrali indefiniti. SCORZA DRAGONI G., 711.

— Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota III. SEGRE B., 3.

— Alcune osservazioni sulle superficie cubiche nel campo razionale. SEGRE B., 147.

— Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota I. SEGRE B., 271.

— Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota II. SEGRE B., 395.

— Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota III. SEGRE B., 531.

— Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes. Nota I. SEBASTIAO E SILVA J., 743.

— Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Nota I. VOLTATO M., 30.

— Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Nota II. VOLTATO M., 161.

— Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Nota III. VOLTATO M., 299.

— Una trasformazione integrale connessa con la propagazione del calore. WIDDER D. V., 750.

— Sull'ordine di un gruppo finito risolvibile somma dei suoi sottogruppi di Sylow. ZACHER G., 171.

Meccanica celeste. — Piccoli movimenti in una massa gassosa stellare in evoluzione adiabatica. Nota I. AGOSTINELLI C., 212.

— Piccoli movimenti in una massa gassosa stellare in equilibrio radiativo. Nota II. AGOSTINELLI C., 347.

Microbiologia. — Il « virus » aftoso su coltura di tessuti « in vitro ». — I. Coltivazione dei ceppi A_4-O-C su cellule renali tripsinizzate di suino. MAZZARACCHIO V., ORFEI Z., D'AMORE A., RAVAIOLI L. e CASTAGNOLI B., 815.

Mineralogia. — Sintesi e proprietà di un pirosseno tipo diopside ($CoCaSi_2O_6$). COLA M., 244.

Morfologia comparata. — Istogenesi del grande osso cardiaco dei bovini e sue trasformazioni strutturali durante l'accrescimento e la senescenza. Nota riassuntiva. BARASA A. e GOBETTO A., 657.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 144, 270, 394, 529, 703, 842.

P

Patologia. — Azione della riboflavina e dell'atebrin sulla produzione di forme L. TERRANOVA T., 116.

Personale accademico, 389, 518, 693, 838.

Plichi suggellati, 141, 518, 693, 838.

Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, 522.

Presentazione di libri, 142, 269, 390, 519, 694, 838.

Presentazione di Note e Memorie, 141, 267, 393, 520, 702, 840.

R

Relazioni di Commissioni, 142, 393, 520.

S

Scienza delle costruzioni. — Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico. Nota I. FINZI L., 205.

— Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico. Nota II. FINZI L., 338.

— Sul calcolo degli effetti di bordo nelle volte sottili cilindriche. LEVI F., 342.

T

Temi per discussioni, 840.

Teoria delle equazioni a derivate parziali. — Sulla funzione di Green pel problema di Dirichlet relativo alle equazioni lineari ellittiche. PETTINEO B., 306.

Teoria delle funzioni. — Sulle condizioni di regolarità delle funzioni in un'algebra. RIZZA G. B., 38.

— Teoremi e formule integrali nelle algebre di Clifford. RIZZA G. B., 174.

Topologia. — Un indice dei punti uniti. Nota II. BOURGIN D. G., 43.

Z

Zoologia. — L'osmoregolazione nel «Tenebrio molitor» L. (Col. Tenebrionidae). MARCUZZI G., 492.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO I.

GENNAIO 1956.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Sui punti fissi delle trasformazioni analitiche. Nota III	Pag. 3
SEVERI F., Contributi alla teoria delle irregolarità d'una varietà algebrica	7
CAMBI L. e CANONICA L., Complessi cobaltosi e cobaltici del benzoimidazolo e del benzopirazolo (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	17
TCHAKHOTINE S. e BENECICENTI A., Azione di alcuni farmaci sugli esseri unicellulari (pres. dal Socio <i>A. Benedicenti</i>)	19

NOTE PRESENTATE DA SOCI

CHERUBINO S., Logaritmi e radici r^{me} di matrici non singolari (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	24
VOLPATO M., Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Nota I (pres. dal Corrisp. <i>G. Scorza Dragoni</i>)	Pag. 30
RIZZA G. B., Sulle condizioni di regolarità delle funzioni in un'algebra (pres. dal Socio <i>F. Severi</i>)	38
BOURGIN D. G., Un indice dei punti uniti. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	43
DE SCHWARZ M. J., Effetti flessionali di carichi sui bordi trasversali di volte cilindriche circolari (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	49
MARTIN E. L., Funzioni prive di estremanti in moti di sistemi binari di massa variabile (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	56
TREZZI F. e BALIN L., Ricerche spettrofotometriche sull'azione della colchicina su estratti proteici <i>in vitro</i> (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	60
MARRÈ E. e SERVETTAZ O., Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. - I. Sul limite di resistenza all'inattivazione termica dei sistemi fotosintetico e respiratorio di alghe di acque termali (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	72
MARRÈ E. e LAUDI G., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XVI. Aumento dell'acido deidroascorbico ed inibizione della crescita in parti isolate di piante superiori trattate con acido ascorbico. (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	77
DOLCHER T. e MARIANI P., Osservazioni sulla distensione cellulare determinata dall'estere etilico dell'acido indolacetico (pres. dal Corrisp. <i>C. Cappelletti</i>)	83
GEROLA F. M. e LAUDI G., Ricerche sulla fisiologia delle piante virosate. - I. Contenuto in acido ascorbico nelle foglie di « <i>Spinacia oleracea</i> » affette da mosaico del cetriolo (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	89
CREPAX P., Effetti della stimolazione del « <i>lobus anterior</i> » del cervelletto sull'attività elettrica della corteccia cerebrale (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	95
CREPAX P. e INFANTELLINA F., Modificazioni dell'attività elettrica del lembo isolato di corteccia cerebrale di Gatto per effetto della sostanza P (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	101
AGOSTONI E., TAGLIETTI A. e SETNIKAR I., I fattori che intervengono nel regolare gli scambi di liquido attraverso la pleura viscerale (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	106
WIRTH A., Analisi dell'elettroretinogramma ottenuto con differenti tempi di esposizione (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	112

TERRANOVA T., Azione della riboflavina e dell'atebrin sulla produzione di forme L (pres. dal Corrisp. <i>L. Califano</i>)	Pag. 116
BAFFONI G. M., Il nucleo della cellula nervosa dei Vertebrati. Osservazioni sui Mammiferi (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	125
ROSSI A., Sulla incompatibilità larvale tardiva nei trapianti xenoplastici di Urodeli su Anuri (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	130
PERRI T., Ricerche sulle correlazioni tra midollo spinale ed arti negli Anfibi Anuri. Esperienze di asportazione e di trapianto di arti (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	136
Comunicazioni varie	141
Plichi suggellati	141
Presentazione di Note e Memorie	141
Relazioni di Commissioni	142
Presentazione di libri	142
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 gennaio 1956	144

FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1956.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Alcune osservazioni sulle superficie cubiche nel campo razionale	Pag. 147
BONINO G. B. e SALVETTI O., Simmetria e assorbimento ultrarosso del ferrocianuro di potassio anidro e idratato (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	150

NOTE PRESENTATE DA SOCI

FOIAS C., Elementi completamente continui e quasi completamente continui di un'algebra di Banach (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 155
VOLPATO M., Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>G. Scorza-Dragoni</i>)	161
CREMONESI A., Sull'ortonormalizzazione di un particolare sistema di funzioni (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	168
ZACHER G., Sull'ordine di un gruppo finito risolubile somma dei suoi sottogruppi di Sylow (pres. dal Corrisp. <i>G. Scorza-Dragoni</i>)	171
RIZZA G. B., Teoremi e formule integrali nelle algebre di Clifford (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	174
KIRBY D., Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota I (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	179
DEMARIA D. C., Sui ricoprimenti finiti della superficie sferica (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	185
GALLARATI D., Alcune osservazioni sopra le varietà i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	193
BASSOTTI L., Sulle relazioni a tre termini fra le coordinate di Grassmann. Nota I (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	200
FINZI L., Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Krall</i>)	205
AGOSTINELLI C., Piccoli movimenti in una massa gassosa stellare in evoluzione adiabatica. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	212
CIMINO M., Sulla stabilità degli ammassi globulari nella più generale ipotesi della distribuzione sferica della loro densità. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	217

GIANNUZZI M. A., Sopra l'orbita della binaria π_2 <i>Ursae Minoris</i> (ADS 9769) (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	Pag. 224
MANARINI A. M., Sulla propagazione delle onde piane nei conduttori in moto (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i>)	229
PECORINI G., La facies bauxitica nel Cretaceo della Nurra (Sardegna) Nota preliminare (pres. dal Corrisp. <i>S. Yardabasso</i>)	232
IPPOLITO F. e LUCINI P., Ulteriori osservazioni geologiche sulla zona di Monticchio nella bassa valle dell'Agri (Basilicata) (pres. dal Socio <i>G. D'Erasmus</i>)	239
COLA M., Sintesi e proprietà di un pirosseno tipo diopside ($\text{CoCaSi}_2\text{O}_6$) (pres. dal Corrisp. <i>P. Gallitelli</i>)	244
CHIUINI F. e MILLETTI L., Ancora sull'azione della penicillina sull'accrescimento e sulla differenziazione delle larve di « <i>Bufo vulgaris</i> ». Nota I (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i>)	249
SERVETTAZ O., Sulla presenza del ciclo di ossidazione diretta degli esosio-mono-fosfati in preparati mitocondriali vegetali (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	255
STEFANELLI A. e LEVANTI C., Fenomeni di indipendenza tra accrescimento, morfogenesi, differenziamento istologico e funzione in abbozzi cardiaci espantati di embrione di pollo (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	263
Comunicazioni varie	267
Presentazione di Note e Memorie	267
Congressi	267
Presentazione di libri	269
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 febbraio 1956	270

FASCICOLO 3.

MARZO 1956.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota I. Pag.	271
MARGARIA R., AGOSTONI E. e TAGLIETTI A., Il tempo di apnea in funzione della pressione endopolmonare (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	277

NOTE PRESENTATE DA SOCI

GAUTSCHI W., Una estensione agli integrali doppi di una condizione di Picone, necessaria per un estremo (pres. dal Socio <i>G. Sansone</i>)	Pag. 283
VIOLA T., Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti. Nota I (pres. dal Socio straniero <i>W. Sierpiński</i>)	290
PUCCI C., Alcune proprietà degli involucri (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	294
VOLPATO M., Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile. Nota III (pres. dal Corrisp. <i>G. Scorza Dragoni</i>)	299
PETTINEO B., Sulla funzione di Green pel problema di Dirichlet relativo alle equazioni lineari ellittiche (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	306
TALLINI G., Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti. Nota I (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	311
BASSOTTI L., Sulle relazioni a tre termini fra le coordinate di Grassmann. Nota II (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	318
KIRBY D., Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota II (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	325

GALLARATI D., Sulle superficie di S_5 i cui piani tangenti si appoggiano a piani asse- gnati (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	Pag. 329
FINZI L., Legame fra equilibrio e congruenza e suo significato fisico. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Krall</i>)	338
LEVI F., Sul calcolo degli effetti di bordo nelle volte sottili cilindriche (pres. dal Socio <i>G. Colonnetti</i>)	342
AGOSTINELLI C., Piccoli movimenti in una massa gassosa stellare in equilibrio radia- tivo. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	347
CIMINO M., Sulla stabilità degli ammassi globulari nella più generale ipotesi della distribuzione sferica della loro densità. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	353
MANARINI A. M., Sulla velocità dell'energia elettromagnetica nei cristalli in moto (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i>)	357
HANSON A., FERRERO F., MALVANO R. e TRIBUNO C., Sulla fotodisintegrazione del $^{209}\text{Bi}_{83}$ (pres. dal Corrisp. <i>G. Wataghin</i>)	362
MALATESTA L. e ARÀNEO A., Composti nitrosilici di ferro e cobalto con i fosfiti arilici, le triaril-fosfine, le triaril-arsine e le triaril-stibine (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	365
CHIUINI F. e MILLETTI L., Ancora sull'azione della penicillina sull'accrescimento e sulla differenziazione delle larve di « <i>Bufo vulgaris</i> ». Nota II (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i>)	366
MARINI M., Osservazioni sul nucleo della cellula nervosa degli Anfibî urodéli (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	373
CAVALLINI D. e STIRPE F., Scissione biologica del cisteinsolfonato in tiosolfati (pres. dal Corrisp. <i>A. Rossi Fanelli</i>)	378
SABBADIN A., Studio sperimentale della gemmazione in « <i>Botryllus schlosseri</i> » (Pallas) (Asciadiacea) (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i>)	379

COMMEMORAZIONI

PIERANTONI U., Commemorazione del Socio Achille Russo	Pag. 386
Comunicazioni varie	389
Personale accademico	389
Presentazione di libri	390
Presentazione di Note e Memorie	393
Relazioni di Commissioni	393
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 marzo 1956	394

FASCICOLO 4.

APRILE 1956.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota II	Pag. 395
TONOLO A., Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un con- duttore omogeneo e isotropo. Nota I	403
NATTA G., CORRADINI P. e DALL'ASTA G., Struttura della catena del polipropilenos- sido cristallino (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	408

BONINO G. B. e FABBRI G., Nuove indagini sperimentali sulla risoluzione nello spettro del cristallo della banda ultrarossa riferibile ai gruppi CN riscontrata nelle soluzioni acquose di ferrocianuro di potassio (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	Pag. 414
BONINO G. B., Ricerche sulle oscillazioni « riferibili ai gruppi $C = N$ » nel ferrocianuro di potassio cristallino	418
FADIGA E., PUPILLI G. C. e VON BERGER G. P., Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	426

NOTE PRESENTATE DA SOCI

VIOLA T., Su un problema riguardante le congruenze degli insiemi di punti. Nota II (pres. dal Socio Straniero <i>W. Sierpiński</i>)	Pag. 431
DE GIORGI E., Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	438
TALLINI G., Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti. Nota II (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	442
KIRBY D., Intorno alla classificazione dei rami e dei loro centri associati di proiezione. Nota III (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	446
SORACE O., Sulle superficie di S_4 aventi cinque iperpiani di Blaschke indipendenti (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	452
NARDINI R., Su qualche effetto del secondo ordine nella magneto-idrodinamica. Nota I (pres. dal Corresp. <i>D. Graffi</i>)	457
ARCIDIACONO G., Sul significato fisico della « teoria di relatività finale » (pres. dal Corresp. <i>L. Fantappiè</i>)	463
DE SOCIO M. L., Sulle condizioni al contorno per le guide imperfettamente conduttrici (pres. dal Corresp. <i>D. Graffi</i>)	469
TORALDO DI FRANCIA G., Equazioni integrodifferenziali e principio di Babinet per gli schermi piani a conduttività unidirezionale (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>)	476
MESSERI A., Sulla localizzazione della resina nei canali resiniferi del corpo legnoso delle Conifere (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i>)	481
SABBADIN A., Osservazioni sull'accrescimento delle gemme e degli zooidi di « Botryllus schlosseri » (Pallas) Ascidiacea, in condizioni normali e sperimentali (pres. dal Corresp. <i>U. D'Ancona</i>)	485
MARCUZZI G., L'osmoregolazione nel « Tenebrio molitor » L. (Col. Tenebrionidae) (pres. dal Corresp. <i>U. D'Ancona</i>)	492
POMPEIANO O., Meccanismi estracerebellari nella regolazione reciproca delle risposte posturali alla stimolazione della corteccia vermiana del « lobus anterior » (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	501
BATINI C. e POMPEIANO O., Effetti di lesioni fastigiali croniche sul tono posturale del Gatto (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	504
DE RENZI C. e POMPEIANO O., Effetti di lesioni unilaterali della corteccia cerebellare vermiana e del nucleo del tetto sul tono posturale del Gatto neonato decerebrato (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	508
GIUSTINA G. e MESCHIA G., La riserva alcalina in condizioni di ipotermia (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	511
PECE G., LAUDI G. e MARRÈ E., Azione inibente dell'acido deidroascorbico sull'attività ossidativa di preparati mitocondriali di fegato di ratto (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	513
Personale accademico	518
Plichi suggellati	518
Presentazione di libri	519
Presentazione di Note e Memorie	520
Relazioni di Commissioni	520
Congressi	521
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei	522
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 14 aprile 1956	529

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1956.

NOTE DI SOCI

SEGRE B., Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Nota III	Pag. 531
FANTAPPIÈ L., Sull'integrale affine di una funzione analitica di due n -uple di variabili	539
CHISINI O., Sul comportamento effettivo delle polari	547
MINEO C., Ancora sulla geodesia intrinseca	552
TONOLO A., Sulla determinazione del campo elettromagnetico all'interno di un conduttore omogeneo e isotropo. Nota II	556
NATTA G., PORRI L., CORRADINI P., MORERO D., Polimero cristallino del butadiene a concatenamento 1-2 isotattico (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	560
BONINO G. B. e FABBRI G., Sullo spettro ultrarosso di assorbimento del Molibdenotocianuro di potassio (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	566
CAVINATO A., Contributo alla conoscenza geologica della Sardegna. - I. Le pietre verdi	572
FADIGA E., PUPILLI G. C. e VON BERGER G. P., Gli effetti dello stimolo luminoso sull'elettrogramma della corteccia cerebellare di Gatto trattato con cloralosio (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	575

NOTE PRESENTATE DA SOCI

GHIZZETTI A., Sui coefficienti di Fourier-Stieltjes di una funzione non decrescente (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 580
MARCUS S., Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	584
LERAY J., Fonction de variables complexes: sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctions linéaires (pres. dal Corrisp. <i>L. Fantappiè</i>)	589
NARDINI R., Su qualche effetto del secondo ordine nella magneto-idrodinamica. Nota II (pres. dal Corrisp. <i>D. Graffi</i>)	591
JARRE G., Un modello semplificato di miscela multipla di gas (pres. dal Corrisp. <i>C. Ferrari</i>)	596
GIANNUZZI M. A., Il sistema binario 20 Draconis (A.D.S. 10279) (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	605
FORTINI T. e CAPRIOLI G., Variazione, dal centro al lembo del Sole, del profilo della linea spettrale λ 4227 del CaI. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	610
ARCIDIACONO G., La elettrodinamica e la idrodinamica nella « teoria di relatività finale » (pres. dal Corrisp. <i>L. Fantappiè</i>)	616
LIBERTI A., CONTI L. e CRESCENZI V., Valutazione del peso molecolare quale mezzo di identificazione di costituenti in cromatografia in fase gassosa (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i>)	623
PIOZZI F. e CASNATI G., Sulla sintesi di Madelung: modalità della preparazione dei 2-alchil-indoli sostituiti (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i>)	629
D'AMATO F., Attuali conoscenze sulla citotassonomia del genere « Colchicum » (pres. dal Socio <i>A. Chiarugi</i>)	632
MARRÈ E. e LAUDI G., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XVII. Riperussioni della rimozione di centri produttori di auxina sul ricambio del glutazione e dell'acido ascorbico in plantule di pisello (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	638

MARRÈ E., FORTI G. e PECE G., Ricerche sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XVIII. Inibizione da acido deidroascorbico dell'attività fosforilativa di preparati mitocondriali (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	Pag. 646
CREPAX P. e INFANTELLINA F., Effetti della recisione delle connessioni nervose sui fenomeni elettrici spontanei della corteccia cerebellare (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	652
BARASA A. e GOBETTO A., Istogenesi del grande osso cardiaco dei bovini e sue trasformazioni strutturali durante l'accrescimento e la senescenza (pres. dal Socio <i>G. Levi</i>)	657
SABBADIN A., «Situs inversus viscerum» provocato sperimentalmente in «Botryllus schlosseri» (Pallas) [Ascidiacea] (pres. dal Corrisp. <i>U. D'Ancona</i>)	659
PERRI T., Trapianti embrionali di midollo spinale e genesi dei corni motori in «Bufo vulgaris» (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	666
CANDIOLLO L., Sull'origine delle cisti epiteliali esito di trapianto nel tessuto sottocutaneo di mucosa gastrica fetale, dopo trattamento con bleu-trypan, nel coniglio (pres. dal Socio <i>G. Levi</i>)	670

COMMEMORAZIONI

DAL PIAZ G., Commemorazione del Socio Ramiro Fabiani	Pag. 676
Comunicazioni varie	693
Personale accademico	693
Plichi suggellati	693
Presentazione di libri	694
Presentazione di Note e Memorie	702
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 maggio 1956	703

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1956.

NOTE DI SOCI

PICONE M., Il parametro monormale di una varietà regolare dello spazio euclideo	Pag. 705
SCORZA DRAGONI G., Sulla derivazione degli integrali indefiniti	711
NOBILE V., Il problema del riferimento pei moti stellari e la sua essenziale connessione con quello della ricerca del potenziale galattico. La soluzione rigorosa del complesso dei due. Nota I	715
SILVA G., Sull'influenza e sulla determinazione delle irregolarità dei perni dell'asse orizzontale di uno strumento destinato ad osservazioni di passaggi stellari attraverso piani verticali. - I. Impostazione del problema.	720
NATTA G., CORRADINI P. e PORRI L., Sulla struttura di nuovi polimeri a concatenamento 1-4 trans di diolefine coniugate (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	728
CAMPI L. e PAGLIA E., Complessi triazolici del cobalto. Nota II (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	735
ROSSI-FANELLI A., ANTONINI E., TRASARTI F., Ricerche sulla mioglobina degli invertebrati inferiori. Composizione in aminoacidi della mioglobina e l'emoglobina di «Thunnus Thynnus» (pres. dal Corrisp. <i>A. Rossi-Fanelli</i>)	737
MARGARIA R., TAGLIETTI A., AGOSTONI E. e MILIĆ EMILI G., Cinetica del ritorno ai valori di riposo della frequenza cardiaca e della ventilazione polmonare dopo lavoro muscolare (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	739

NOTE PRESENTATE DA SOCI

SEBASTIÃO E SILVA J., Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes. Nota I (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 743
WIDDER D. V., Una trasformazione integrale connessa con la propagazione del calore (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	750
GHIZZETTI A., Sui coefficienti di Legendre-Stieltjes di una funzione non decrescente (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	753
BERTOLINI F., Su una generalizzazione del problema di Poisson (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	759
GIANNUZZI M. A., La doppia ottica A.D.S. 10332 (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	766
FORTINI T. e CAPRIOLI G., Variazione, dal centro al lembo del Sole, del profilo della linea spettrale $\lambda = 4227$ del CaI. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	773
TORTORICI P., Sulle deviazioni angolari locali del Geoide dall'Ellissoide (pres. dal Socio <i>C. Mineo</i>)	777
FAVERO P., MIRRI A. M. e VIANELLO E., Determinazione oscillografica dell'andamento della curva superficie-tempo per l'elettrodo a goccia di mercurio (pres. dal Corrisp. <i>G. Semerano</i>)	783
LIBERTI A. e CARTONI G., Impiego accoppiato della coulombometria e della cromatografia in fase gassosa per l'analisi di costituenti di miscele volatili (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i>)	787
SCROCCO M. e NICOLAUS R., Ricerche nel campo della spettrofotometria I. R. ed U. V. su alcuni acidi pirrolici (pres. dal Corrisp. <i>V. Caglioti</i>)	795
FOFFANI A., Sulla « reversibilità » polarografica di alcuni sistemi azo-idrazo (pres. dal Corrisp. <i>G. Semerano</i>)	804
MARRÉ E. e LAUDI G., Attività del sistema ossidativo TPN-glutatione-acido ascorbico in preparati mitocondriali di pisello (« <i>Pisum sativum</i> ») (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	806
ANTONIELLI M., Su un metodo colorimetrico per la microdeterminazione del Silicio nei tessuti (pres. dal Corrisp. <i>G. Amantea</i>)	813
MAZZARACCHIO V., ORFEI Z., D'AMORE A., RAVAIOLI L. e CASTAGNOLI B., Il « virus » aftoso su coltura di tessuti « in vitro ». - I. Coltivazione dei ceppi A_4-O-C su cellule renali tripsinizzate di suino (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i>)	815
RICCERI G., Origine e significato biochimico dell'urea nell'embrione di pollo nei primi stadi di sviluppo (pres. dal Corrisp. <i>A. Clementi</i>)	818
ORTOLANI G., Azione della tripsina sui quartetti animali, isolati allo stadio di 8 blastomeri, dell'uovo di « <i>Phallusia mamillata</i> » (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	827
ARCHETTI I. e FELCI A., Nota sull'agente eziologico della epidemia marchigiana di meningite benigna (pres. dal Corrisp. <i>D. Marotta</i>)	831

COMMEMORAZIONI

CALIFANO L., Commemorazione del Corrispondente Piero Redaelli	Pag. 832
Personale accademico	838
Comunicazioni varie	838
Plichi suggellati	838
Presentazione di libri	838
Presentazione di Note e Memorie	840
Temi per discussioni	840
Congressi	841
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 giugno 1956	842
Indice per Autori	847
Indice per materie	853
Indici dei fascicoli	859

